MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XXXV. Band.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1890.

I

I

I

V

I

I
E

E

E
E

P

P

P

S

S

Inhalt des fünfunddreissigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrales.*)

Von

Axel Harnack †.

§ 1.

Definition des Integrales.

Besitzt die Function $u + iv$ einer complexen Variabelen z am Rande eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden, ebenen Gebietes, in dessen Innern die Function regulär ist, die Werthe $U + iV$, so stellt das Integral

$$(1) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int \frac{U+iV}{z-\varrho e^{i\alpha}}\,dz,$$

erstreckt in positivem Umlauf (d. h. die eingeschlossene Fläche bleibt zur Linken) über alle Randpunkte z, den Werth der Function $u + iv$ für alle inneren Punkte dar. Dieselbe muss dabei „im allgemeinen gleichmässig stetig" in die Randwerthe übergehen. Das ebene Gebiet nehmen wir als ein einblättriges an.

Durch Zerlegen des Integrales in seinen reellen und imaginären Bestandtheil erhält man die Gleichungen:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U\frac{\cos\varepsilon}{l}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l},$$

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V\frac{\cos\varepsilon}{l}\,d\sigma.$$

Hier bedeutet $d\sigma$ das Bogenelement der Randcurve, l die positiv genommene Entfernung des Elementes $d\sigma$ von dem betrachteten Punkte

---

*) A. d. Berichten der k. sächs. Ges. d. W. v. Jahre 1885. Wir glauben, dass es unseren Lesern willkommen ist, wenn wir nachstehend die drei in den Berichten der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlichten Arbeiten Axel Harnack's zum Abdruck bringen. Sie enthalten die letzten Untersuchungen unseres so frühe der Wissenschaft entrissenen Mitarbeiters.

Die Redaction.

$x+iy=\varrho e^{i\alpha}$, für welchen die Werthe u und v ermittelt werden sollen, und ε den Winkel, welchen die nach innen gerichtete Normale des Elementes $d\sigma$ mit der Geraden l (in der Richtung von $d\sigma$ nach dem Punkte (x, y)) bildet. Die Grösse $\frac{\cos\varepsilon}{l}d\sigma$ ist die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ vom Punkte (x, y) aus, und wird von Herrn C. Neumann mit $(d\sigma)_x$ bezeichnet. Dieser Werth ist überall positiv, wenn die Fläche nur von *einer* Randcurve begrenzt ist, die überdies stets ihre convexe Seite nach aussen richtet, und weder nach innen gerichtete Spitzen noch Ecken besitzt, oder allgemeiner, wenn keine Tangente der Randcurve in das Innere der Fläche eintritt. In allen anderen Fällen wird $(d\sigma)_x$ wenigstens für gewisse Gebiete von x auch negativ. Es tritt dies ein, sobald die Fläche des vom Punkte x und dem Bogenelemente $d\sigma$ gebildeten Dreiecks beim Durchlaufen des Elementes $d\sigma$ zur Rechten bleibt; $(d\sigma)_x$ soll daher der *algebraische* scheinbare Winkel heissen.

Auch das Differential $\frac{dl}{l}$ kann durch $d\sigma$ ausgedrückt werden. Bezeichnet man nämlich mit ε' den Winkel zwischen der positiven Richtung des Bogenelementes und der Richtung l, so ist in allen Fällen, auch dem Zeichen nach: $dl=-\cos\varepsilon' d\sigma$.

Der Kürze wegen werde ich indessen im Folgenden stets die Form benutzen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l}, \\ v &= -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x. \end{aligned}$$

§ 2.

Die Relationen zwischen den Functionen U und V.

Die Functionen u und v sind nicht unabhängig von einander, denn sie genügen für jeden Punkt (x, y) im Innern des Gebietes den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Functionen, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, werde ich zwei conjugirte Functionen nennen; man hat dabei noch zu unterscheiden, welche Function den reellen, und welche den imaginären Bestandtheil der complexen Function bildet.

Auch die Functionen U und V können daher an den Randcurven eines Gebietes nicht willkürlich gewählt werden; vielmehr müssen zwischen den Randwerthen U und denen der conjugirten Function V,

und folglich auch zwischen den vier Integralen der Gleichungen (2) Relationen bestehen. Dieselben sollen zuerst ermittelt werden. Setzt man

$$(3)\qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x, & u_2 &= \frac{1}{2\pi}\int V\,\frac{dl}{l}, \\ v_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int U\,\frac{dl}{l}, & v_2 &= \frac{1}{2\pi}\int V\,(d\sigma)_x, \end{aligned}$$

so ist

$$u_1 + iv_1 = \frac{1}{2i\pi}\int U\,\frac{dz}{z-\varrho e^{i\alpha}}, \qquad u_2 + iv_2 = \frac{1}{2\pi}\int V\,\frac{dz}{z-\varrho e^{i\alpha}}.$$

Demnach sind $u_1 + iv_1$ und $u_2 + iv_2$ Functionen einer complexen Variabelen, und daraus folgt, dass sich diese Functionen aus ihren Randwerthen ebenso darstellen lassen müssen, wie u und v. Bezeichnet man also mit U_1, V_1, U_2, V_2 die Werthe, welche u_1, v_1, u_2, v_2 am Rande annehmen, so ist

$$U = U_1 + U_2, \qquad V = V_1 + V_2$$

und es bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi}\int U_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V_1\,\frac{dl}{l}, \\ u_2 &= \frac{1}{2\pi}\int V\,\frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi}\int U_2(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V_2\,\frac{dl}{l}, \\ v_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int U\,\frac{dl}{l} = -\frac{1}{2\pi}\int U_1\,\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V_1(d\sigma)_x, \\ v_2 &= \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x = -\frac{1}{2\pi}\int U_2\,\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V_2(d\sigma)_x. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, indem man für U und V die obigen Werthe einführt,

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int U_2(d\sigma)_x &= \frac{1}{2\pi}\int V_1\,\frac{dl}{l}, \\ -\frac{1}{2\pi}\int U_2\,\frac{dl}{l} &= \frac{1}{2\pi}\int V_1\,(d\sigma)_x. \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen lassen sich in den einen Ausdruck vereinigen:

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{(U_2 - iV_1)}{z-\varrho e^{i\alpha}}\,dz = 0.$$

Derselbe lehrt, dass ein complexes Integral dieser Art im Inneren eines beliebigen Gebietes allenthalben Null sein kann, ohne dass die im Zähler stehende Function verschwindet. Diese Function ist aber nicht als Randwerth einer „Function einer complexen Variabelen“ zu betrachten, und deshalb ist das Integral nicht als ein „Integral von Cauchy“ zu bezeichnen.

Bei der Ableitung der Gleichungen (4) ist vorausgesetzt, dass die Functionen $u_1, u_2, \ldots$ im allgemeinen gleichmässig in bestimmte Randwerthe übergehen, was noch zu beweisen ist. Zu dem Zwecke muss die Function

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x$$

nebst der conjugirten

$$v_1 = -\frac{1}{2\pi}\int U\,\frac{dl}{l}$$

näher untersucht werden. Ich beschränke mich dabei auf den Fall, dass U längs des Randes eine eindeutige und stetige Function ist. Auch soll der Rand von Curven gebildet sein, die bis auf einzelne Eckpunkte überall eine bestimmte, sich stetig ändernde Tangente besitzen, und die weder unendlich viele Wendungen machen, noch sich selbst oder unter einander durchschneiden. Alsdann sind die Functionen u_1 und v_1 im Inneren des Gebietes allenthalben stetig, und dasselbe gilt für die ersten partiellen Ableitungen, zwischen denen die bekannten Relationen bestehen, wie direct aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}[(d\sigma)_x] = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dl}{l}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}[(d\sigma)_x] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial l}{l}\right)$$

hervorgeht. Es werde nun am Rande ein bestimmter Punkt s betrachtet. Um diesen Punkt s als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis mit beliebig kleinem Radius, der durch seine äussersten Schnittpunkte auf dem Rande den Bogen σ' bestimmt. Ein Element dieses Bogens werde mit $d\sigma'$ bezeichnet, während alle übrigen Randelemente $d\sigma''$ heissen mögen. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma')_x + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_x.$$

Der Werth der Function U im Punkte s heisse U_s. Im ersten Integral der rechten Seite unterscheiden sich sämmtliche Werthe von U von dem Werthe U_s um eine Grösse, deren Betrag durch Verkleinerung von σ' kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig gewählte Grösse δ. Zufolge der Stetigkeit von U kann diese obere Grenze δ gleichzeitig für alle Punkte s fixirt werden. Also ist

$$\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_x + \frac{1}{2\pi}U_s\int(d\sigma')_x \pm \left(<\delta\,\frac{1}{2\pi}\int \text{abs}\,(d\,\sigma')_x\right).$$

Das Integral $\int(d\sigma')_x$ giebt, mit Unterscheidung positiver und negativer Elemente, den Winkel an, unter welchem der Bogen σ' von dem inneren Punkte x aus gesehen wird. Rückt der Punkt x in den Randpunkt s, so geht dieser Winkel in denjenigen über, unter welchem der Bogen σ' vom Punkte s aus gesehen wird. Drehrichtung und

Grösse dieses Winkels, der durch ω bezeichnet werden soll, ergiebt sich unzweideutig aus dem Grenzprocess. Kehrt die Randcurve an der Stelle s ihre concave Seite nach innen, so ist er ein überstumpfer Winkel, an einer convexen Stelle dagegen ein stumpfer oder spitzer.

Der Uebergang in den Werth ω ist für alle Randpunkte s ein gleichmässig stetiger, d. h. man kann nicht nur um jeden Punkt s einen Kreis angeben, so dass der scheinbare Winkel des Bogens σ' für alle Punkte x im Innern dieses Kreises von dem Werthe ω beliebig wenig abweicht, sondern es lässt sich auch für den Radius dieses Kreises die nämliche obere Grenze bei allen Werthen s bestimmen.

Der Nachweis dieser Behauptung folgt aus elementaren Betrachtungen, wenn man beachtet, dass die vom Punkte s ausgehenden Schenkel des Winkels ein gleichschenkliges Dreieck mit der Sehne des Bogens σ' bestimmen.

Das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_x = \frac{1}{2\pi}\int U\,\frac{\cos\varepsilon}{l}\,d\sigma''$$

ändert sich stetig, und zwar gleichmässig. Denn es erstreckt sich nur über solche Bogenelemente, für welche l niemals Null wird, auch wenn der Punkt x in den Punkt s hineinrückt. Demnach wird der Werth dieses Integrales schliesslich gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_s$$

und so erhält man vorläufig das Resultat: Rückt der innere Punkt x in den Randpunkt s, so wird

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\,\omega\,U_s + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma'')_s \pm\left(< \delta\,\frac{1}{2\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma')_x\right).$$

In dieser Formel ist $\int \text{abs}\,(d\sigma')_x$ jedenfalls eine endliche Grösse; denn entweder ist der Grenzwerth dieses Integrales gleich ω, falls der Bogen σ' seine concave Seite nach innen kehrt, oder er ist grösser als ω, aber endlich, weil der Bogen nicht unendlich viele Wendungen macht. Es ist ferner

$$\int U(d\sigma'')_s = \int U(d\sigma)_s - \int U(d\sigma')_s$$

und das zweite Integral der rechten Seite wird gleich $U_s\int (d\sigma')_s$ bis auf eine Grösse, die wiederum kleiner ist als

$$\delta\int \text{abs}\,(d\sigma')_s.$$

Da nun die Grösse δ durch Verkleinerung von σ' beliebig klein gemacht werden kann, so folgt, dass

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} U_s \lim \omega - \frac{1}{2\pi} U_s \lim \int (d\sigma')_s + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s$$

ist. In einem gewöhnlichen Curvenpunkte, in welchem die Tangenten, vor- und rückwärts genommen, den Winkel π bilden, ist

$$\lim \omega = \pi, \quad \lim \int (d\sigma')_s = 0,$$

also

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s.$$

In einem Eckpunkte der Curve, in welchem die Tangenten den Winkel α bilden, ist

$$\lim \omega = 2\pi - \alpha, \quad \lim \int (d\sigma')_s = 0,$$

also

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi}(2\pi - \alpha) U_s + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s.$$

Auch diese Grenzübergänge erfolgen nach Ausschluss der Eckpunkte durch beliebig kleine Umgebungen mit gleichmässiger Stetigkeit, wie aus dem Mittelwerthsatz der Differentialrechnung hervorgeht. Damit ist die ursprüngliche Behauptung vollständig bewiesen.

Zu einer Randfunction U gehört also eine bestimmte Function der Randpunkte, nämlich $\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s$. Ich werde diese Function mit $\frac{1}{2} P_s$ oder auch kürzer mit $\frac{1}{2} P$ bezeichnen, und P die zugeordnete Function von U nennen*).

Es ist für einen regulären Randpunkt

$$(5) \qquad \lim_{x=s} \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \lim u_1 = U_1 = \frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2} P_s.$$

Dagegen für Eckpunkte mit der Winkelöffnung α, die aber im Folgenden nicht weiter berücksichtigt werden sollen:

$$(5a) \qquad \lim \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \lim u_2 = U_1 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U_s + \frac{1}{2} P_s.$$

---

*) Von dieser zugeordneten Function handelt Herr C. Neumann bei der Theorie der Doppelbelegungen im 4. Capitel seines Buches: „Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential" (Leipzig, 1877). Der Beweis des Satzes von der gleichmässigen Convergenz ist jedoch daselbst nicht mitgetheilt (vergl. die Bemerk. pag. 152 daselbst).

Die zugeordnete Function ist eine stetige Function von s, solange keine Eckpunkte auf dem Rande vorhanden sind (Neumann, a. a. p. 139 und 150).

Dieselben Betrachtungen gelten auch für die Function

$$v_2 = \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x,$$

wobei wiederum V als eine stetige Function vorausgesetzt wird. Es ist für einen regulären Randpunkt s

$$\lim_{x=s} \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x = \lim v_2 = V_2 = \frac{1}{2} V_s + \frac{1}{2} Q_s. \tag{6}$$

Q bedeutet die der Function V zugeordnete Function, d. h. es ist

$$Q_s = \frac{1}{\pi}\int V(d\sigma)_s.$$

Für die zu u_1 und v_2 conjugirten Functionen

$$v_1 = -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l}$$

lässt sich der Nachweis, dass sie stetig nach bestimmten Randwerthen V_1 und U_2 convergiren, nicht in derselben directen Weise führen. Da aber

$$u = u_1 + u_2, \qquad v = v_1 + v_2$$

ist, so folgt, weil u und v der Voraussetzung nach in die bestimmten Werthe U_s und V_s übergehen, während x nach s convergirt:

$$\lim_{x=s} u_2 = U_2 = U - U_1 = \frac{1}{2} U_s - \frac{1}{2} P_s. \tag{7}$$

$$\lim_{x=s} v_1 = V_1 = V - V_2 = \frac{1}{2} V_s - \frac{1}{2} Q_s. \tag{8}$$

Trägt man diese Werthe von U_2 und V_1 in die Gleichungen (4) ein, so erhält man den folgenden Satz:

Besitzt die Function $u + iv$ einer complexen Variabelen z an dem Rande eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes die stetig sich ändernden Werthe $U + iV$, so bestehen zwischen den Functionen U und V die Relationen:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int U(d\sigma)_x - \dfrac{1}{2\pi}\int P(d\sigma)_x = \dfrac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l} - \dfrac{1}{2\pi}\int Q\,\frac{dl}{l}, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int U\frac{dl}{l} + \dfrac{1}{2\pi}\int P\,\frac{dl}{l} = \dfrac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x - \dfrac{1}{2\pi}\int Q(d\sigma)_x. \end{cases}$$

Dabei bedeuten P und Q die den Functionen U und V zugeordneten Functionen, und sämmtliche Integrale sind auf den Randcurven zu bilden, während der Punkt x, y im Innern des Gebietes beliebig gewählt wird.

Man kann die Voraussetzungen, unter denen dieses Resultat bewiesen wurde, noch erweitern. Ist z. B. nur U im Cauchy'schen Integrale eine stetige oder eine überall endliche, integrirbare Function, so dass die Function u im allgemeinen gleichmässig stetig in die Randwerthe U übergeht, so gilt das Cauchy'sche Integral für diesen Rand, sobald man unter den übrigen Integralen der Gleichung (2) die Grenzwerthe versteht, welche dieselben annehmen, wenn man von einer innerhalb der Fläche gelegenen Integrationscurve zum Rande selbst übergeht. In diesem Sinne gelten dann auch die vorstehenden Gleichungen, ohne dass V eine stetige Function zu sein braucht.

Der vorstehende, ganz allgemeine Satz erhält eine sehr einfache und bekannte Form, sobald der Rand nur aus einem einzigen Kreise besteht. Denn für einen Kreis werden die zugeordneten Functionen P und Q constant. Es ist, wenn R den Radius des Kreises angiebt, und $d\sigma = R d\varphi$ gesetzt wird

$$P_s = \frac{1}{\pi}\int U (d\sigma)_s = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos \varepsilon}{l} d\sigma = \frac{1}{2\pi R}\int U d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int U d\varphi,$$

$$Q_s = \frac{1}{\pi}\int V (d\sigma)_s = \frac{1}{\pi}\int V \frac{\cos \varepsilon}{l} d\sigma = \frac{1}{2\pi R}\int V d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int V d\varphi,$$

so dass hier der Satz lautet:

Besitzt die im Inneren des Kreises R reguläre Function $u + iv$ am Rande der Kreisperipherie die Werthe $U + iV$, so bestehen zwischen den Functionen U und V die Relationen:

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int U (d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int U d\varphi &= \frac{1}{2\pi}\int V \frac{dl}{l}, \\ -\frac{1}{2\pi}\int U \frac{dl}{l} &= \frac{1}{2\pi}\int V (d\varphi)_x - \frac{1}{2\pi}\int V d\varphi. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Gleichungen ist die Randwerthaufgabe, d. h. die Bestimmung der complexen Function aus dem reellen Randwerthe U *für den Kreis* ohne Weiteres lösbar; denn es bekommen die Gleichungen (2) hierbei die Form

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi}\int U (d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int U d\varphi, \\ v &= -\frac{1}{\pi}\int U \frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V d\varphi, \end{aligned}$$

wodurch u vollständig, und v bis auf eine additive Constante bestimmt ist.

Die speciellen Gleichungen (10) liefern für den Kreis die bekannten Relationen

$$\int U \cos k\varphi \, d\varphi = \int V \sin k\varphi \, d\varphi,$$
$$\int U \sin k\varphi \, d\varphi = -\int V \cos k\varphi \, d\varphi,$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots \infty),$$

welche hier die Anwendbarkeit der Fourier'schen Reihe für die Darstellung der Functionen u und v begründen. Analoge Relationen gelten für einen beliebig zusammengesetzten Rand.

Wird nämlich die Randcurve auf ein Polarcoordinatensystem mit beliebigem Anfangspunkt bezogen, so dass $r = f(\varphi)$ die Gleichung der Randcurve wird, so bestehen die Gleichungen:

$$\tag{11} \begin{gathered} \int (U - P)\, d\varphi = \int (V - Q)\, d \log r, \\ -\int (U - P)\, d \log r = \int (V - Q)\, d\varphi, \\ \int (U - P)\, d\left(\frac{\sin k\varphi}{k r^k}\right) = -\int (V - Q)\, d\left(\frac{\cos k\varphi}{k r^k}\right), \\ \int (U - P)\, d\left(\frac{\cos k\varphi}{k r^k}\right) = \int (V - Q)\, d\left(\frac{\sin k\varphi}{k r^k}\right), \\ (k = 1, 2, 3, \ldots \infty). \end{gathered}$$

§ 3.

Die Eindeutigkeit der Darstellung einer complexen Function mittelst des Cauchy'schen Integrales.

Der oben gefundene allgemeine Satz gestattet folgende Umkehrung:

Ist für den Rand eines ebenen Gebietes eine stetige Function U gegeben, und kann man eine Function V ermitteln, für welche die Gleichungen (4) *oder* (9) *erfüllt sind, so stellt die Gleichung*

$$u = \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi} \int V \frac{dl}{l}$$

eine Function dar, welche im Inneren des Gebietes die Bedingung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllt und an dem Rande den Werth U besitzt.

Der Beweis ergiebt sich durch eine Umkehrung der vorigen Betrachtung. Indem man nämlich die Functionen u_1, u_2, v_1, v_2 einführt (Gleichungen 3), und die Function U' durch die Gleichung definirt:

$$U' = U_1 + U_2,$$

erhält man aus den Gleichungen (2) zusammen mit den Gleichungen (4) die Relationen:

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x = \frac{1}{2\pi}\int U_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V_1\frac{dl}{l}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int U_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int U_2(d\sigma)_x,$$
$$v_1 = -\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} = -\frac{1}{2\pi}\int U_1\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int V_1(d\sigma)_x$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int U_1\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int U_2\frac{dl}{l}.$$

Hieraus folgt:

$$\int U(d\sigma)_x = \int U'(d\sigma)_x, \qquad \int U\frac{dl}{l} = \int U'\frac{dl}{l}$$

und aus diesen Gleichungen ist zu schliessen, dass die stetigen Functionen U und U' identisch sind.

Dazu bedarf man des folgenden Satzes:

Wenn eine stetige, nur für den Rand eines Gebietes definirte Function W die Eigenschaft hat, dass für jeden Punkt im Inneren des einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes

$$\frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_x \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl}{l}$$

constant gleich Null sind, so ist W für alle Punkte des Randes ebenfalls gleich Null.

Der Beweis für diesen Satz ist meines Wissens noch nicht ausgeführt worden, und in der That nicht ganz einfach, wenn man in Bezug auf die Function W keine weiteren, beschränkenden Voraussetzungen einführen will. Aber der Inhalt des Satzes ist von Bedeutung, weil aus ihm unmittelbar hervorgeht, dass die Integralrelationen (4) oder (9) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Zusammenhang der Functionen U und V bilden, und dass eine complexe Function nur auf eine einzige Weise in der Form des Cauchy'schen Integrales und der in demselben enthaltenen Reihenentwickelung darstellbar ist. Ich halte es daher für gerechtfertigt, auf den Beweis ausführlich einzugehen.

Lässt man den inneren Punkt x an einen Randpunkt s heranrücken, so wird

$$\text{(12)} \qquad \lim \frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_x = \frac{1}{2}W_s + \frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_s = 0,$$

daher

$$W_s = -\frac{1}{\pi}\int W(d\sigma)_s.$$

Hat man es mit einem ebenen Gebiete zu thun, das nur von einer einzigen Randcurve begrenzt ist, die ohne nach innen gerichtete Spitzen

oder Ecken nach aussen überall convex ist, oder allgemeiner ausgedrückt, deren Tangenten nicht in das Innere der Fläche eintreten, so kann man schon aus dieser letzten Gleichung unmittelbar schliessen, dass $W = 0$ ist. Denn in diesem Falle ist $(d\sigma)_s$ eine durchweg positive Grösse und

$$\frac{1}{\pi}\int (d\sigma)_s$$

im allgemeinen (d. h. abgesehen von etwaigen Eckpunkten) gleich Eins. Bezeichnet nun M denjenigen Werth von W, dessen Betrag am grössten ist, so ist auch

$$\frac{1}{\pi}\int (M + W)\,(d\sigma)_s = 0.$$

Da in diesem Integral alle Elemente von gleichem Zeichen sind, so muss im allgemeinen

$$M + W = 0$$

gleich sein; und da W stetig sein sollte, so ist überall W constant gleich $-M$. Diese Constante kann aber nur Null sein, zufolge der Gleichung

$$-\frac{1}{2\pi}\int M(d\sigma)_x = -M = 0.$$

Im allgemeinen Falle aber sind zunächst die Functionen

$$\frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_{x'} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl'}{l'}$$

gebildet *für einen ausserhalb der Fläche gelegenen Punkt* (x', y') zu untersuchen. Die Richtung der Normale ist bei diesen Integralen dieselbe wie früher.

Lässt man nun den äusseren Punkt an den Randpunkt s heranrücken, so gelten immer, d. h. bei jeder stetigen Function W die Gleichungen:

$$\text{(13)} \qquad \lim \frac{1}{2\pi}\int W(dx)_{x'} = -\frac{1}{2}W_s + \frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_s,$$

$$\text{(14)} \qquad \lim \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl'}{l'} = \lim \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl}{l}.$$

Die erste Gleichung ergiebt sich ebenso wie im vorigen Paragraph die Gleichung (5), wenn man nur beachtet, dass beim Heranrücken eines äusseren Punktes an das Element $d\sigma$ der Winkel $(d\sigma)_{x'}$ negativ wird und den Grenzwerth $-\pi$ erhält*). Aus den Gleichungen (12) und (13) folgt dann

*) Aus dieser Gleichung folgt, dass die Existenz einer Lösung der Randwerthaufgabe gezeigt ist, sobald die Möglichkeit nachgewiesen ist, das innere Gebiet einer Fläche derart eindeutig auf das äussere conform abzubilden, dass die Punkte der Randcurve sich selbst entsprechen.

$$(15) \qquad -\lim \frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_{x'} = W_s,$$

Es muss also W_s constant sein, wenn der Nachweis geführt werden kann, dass auch für alle äusseren Punkte das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int W(dx)_{x'} = \text{const.}$$

ist. Diese Constante kann dann nur Null sein, weil das Integral für den unendlich fernen Punkt diesen Werth hat.

Die Eigenschaft der Constanz folgt aber unmittelbar aus der noch zu beweisenden Gleichung (14). Denn da in dieser Gleichung unserer Voraussetzung zu Folge die rechte Seite constant gleich Null ist, so ist auch die linke Seite constant gleich Null, und die Function

$$\frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl'}{l'}$$

ist dann überhaupt gleich Null, weil sie auch im Unendlichen diesen Werth hat. Folglich muss auch die conjugirte Function

$$\frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma')_x$$

Null sein.

Der Beweis für die Gleichung (14) lässt sich folgendermassen führen:

Auf der Normale im Randpunkte s seien zu verschiedenen Seiten von s die Punkte x und x' in der beliebig kleinen Entfernung a von s gewählt. Indem wir annehmen, dass die Randcurve an keiner Stelle unendlich viele Wendungen besitzt, und nun den Punkt s nicht etwa in einen Wendepunkt verlegen, lässt sich eine convexe und eine concave Seite in der Umgebung von s unterscheiden. Mit x möge der Punkt bezeichnet sein, welcher auf der concaven Seite von s liegt, mit x' der andere. Es kann jetzt also x auch den äusseren Punkt bezeichnen, wenn die Curve bei s ihre concave Seite nach aussen kehrt, x' ist dann ein innerer Punkt. Der Punkt s sei zum Anfangspunkte eines Polarcoordinatensystemes gewählt, die Tangente in s sei die Coordinatenaxe; $r = f(\varphi)$ die Gleichung der Curve. Indem man zu beiden Seiten von s einen beliebig kleinen Bogen von der Gesammtlänge σ' abschneidet, von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = \varphi'$ auf der einen Seite der Normalen, und von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = \varphi''$ auf der anderen Seite, sind nur die Integrale zu betrachten, welche sich auf diesen Bogen σ' beziehen. Denn für den übrigen Theil des Randes, σ'', ist die Gleichung:

$$\lim \int_{\sigma''} W\frac{dl}{l} = \lim \int_{\sigma''} W\frac{dl'}{l'}$$

für $x = x' = s$ selbstverständlich.

Der Winkel von 0 bis φ' (und ebenso von 0 bis φ'') sei so klein gewählt, dass zu jedem Werthe von φ zwischen 0 und φ' nur *ein* Werth von r gehört; ferner sei nicht nur r für dieses Bogenstück eine durchaus wachsende Function, sondern es sei auch a so klein gewählt, dass für diesen Werth von a, sowie für alle kleineren die Grösse l immer grösser als a ist. Da

$$l^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = r^2 + a^2 - 2ar\sin\varphi,$$

so verlangt diese Bedingung, dass $r^2 - 2ar\sin\varphi > 0$, d. h. $a < \frac{r}{2\sin\varphi}$ ist. Diese Forderung ist immer erfüllbar, wenn sich die Randcurve in der Umgebung des Punktes s verhält, wie eine analytische Curve in einem regulären Punkte, wenn also daselbst z. B. r durch eine nach ganzen Potenzen von φ fortschreitende Reihe darstellbar ist, die mit der ersten Potenz von φ beginnt. Es ist nun

$$\begin{aligned} l^2 &= r^2 + a^2 - 2ar\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = r^2 + a^2 - 2ar\sin\varphi, \\ l'^2 &= r^2 + a^2 - 2ar\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = r^2 + a^2 + 2ar\sin\varphi \end{aligned} \tag{16}$$

ferner

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W\frac{dl}{l} + \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W\frac{dl'}{l} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d\lg\left(\frac{l}{l'}\right) = \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d\lg\left(\frac{l^2}{l'^2}\right)$$

$$\frac{l^2}{l'^2} = \frac{r^2 + a^2 - 2ar\sin\varphi}{r^2 + a^2 + 2ar\sin\varphi},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) &= \frac{4r\,dr\,ar\sin\varphi - 2(r^2 + a^2)\,ad\,(r\sin\varphi)}{l'^4} \\ &= \frac{(r^2 - a^2)2a[\sin\varphi\,dr - r\cos\varphi\,d\varphi] - 4ra^3\cos\varphi\,d\varphi}{l'^4}. \end{aligned}$$

Das Differential $\sin\varphi\,dr - r\cos\varphi\,d\varphi$ wird, wenn man es wie oben mit einem regulären Punkte zu thun hat, nicht unendlich oft sein Vorzeichen wechseln, sondern während φ das Intervall von 0 bis φ' durchläuft, stets positiv oder negativ, oder auch gleich Null bleiben. Ist längs eines ganzen Bogenstückes

$$\sin\varphi\,dr - r\cos\varphi\,d\varphi = 0,$$

so ist dieser Bogen ein Kreisbogen oder eine Gerade. Unsere Voraussetzung lässt sich geometrisch durch die etwas engere ersetzen, dass ein Kreis, welcher die Curve im Punkte s tangirt, nicht in beliebiger Nähe des Punktes s, und also auch nicht auf dem beliebig kleinen zu φ' gehörigen Bogen einen weiteren Berührungspunkt mit der Curve besitzt.

Die Grösse $(r^2 - a^2)$ wechselt ihr Zeichen, indem r durch den Werth a hindurchgeht. Setzt man zur Abkürzung das obige Differential

$$\frac{1}{2} d\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) = \frac{(r^2 - a^2)\, 2 a du - 4 a^3 r dv}{l'^4},$$

so behält jedes der Differentiale du und dv, während φ von 0 bis φ' variirt, ein unverändertes Zeichen und es ist

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d \lg\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) =$$

(17)
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{r=0}^{r=a} W \frac{(r^2 - a^2) 2 a}{l^2 l'^2} du + \frac{1}{2}\int\limits_{r=a}^{\varphi=\varphi'} W \frac{(r^2 - a^2) 2 a}{l^2 l'^2} du - \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W \frac{4 a^3 r}{l^2 l'^2} dv.$$

In Bezug auf das Differential du ist also eine Theilung des Integrationsintervalles vollzogen worden, weil $r^2 - a^2$ sein Vorzeichen wechselt. Auf jedes der Integrale rechts lässt sich nun der erste Mittelwerthsatz anwenden. Man bezeichne drei mittlere Werthe von W im Intervall von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi'$ mit

$$W_{\Theta\varphi'},\quad W_{\Theta'\varphi'},\quad W_{\Theta''\varphi'},$$

so ist die rechte Seite gleich:

$$\frac{1}{2} W_{\Theta\varphi'} \int\limits_{r=0}^{r=a} \frac{(r^2 - a^2) 2 a\, du}{l^2 l'^2} + \frac{1}{2} W_{\Theta'\varphi'} \int\limits_{r=a}^{\varphi=\varphi'} \frac{(r^2 - a^2) 2 a\, du}{l^2 l'^2} - \frac{1}{2} W_{\Theta''\varphi'} \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} \frac{4 a^3 r}{l^2 l'^2} dv.$$

Die Grösse φ' kann von vornherein so gewählt werden, dass die Werthe der stetigen Function W in diesem Intervall um weniger als eine Grösse δ sich unterscheiden. Also ist, wenn man

$$W_{\Theta\varphi'} = W_{\Theta'\varphi'} \pm (< \delta),$$
$$W_{\Theta''\varphi'} = W_{\Theta'\varphi'} \pm (< \delta)$$

setzt, die obige Summe gleich

(18)
$$W_{\Theta\varphi'} \left[\lg \frac{l}{l'}\right]_0^{\varphi'}$$

bis auf eine Grösse, deren Betrag kleiner ist als

(19)
$$\frac{\delta}{2}\left[\operatorname{abs}\int\limits_{r=0}^{r=a} \frac{(r^2 - a^2) 2 a}{l^2 l'^2} du + \operatorname{abs}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} \frac{4 a^3 r}{l^2 l'^2} dv\right].$$

In dem Ausdruck (18) verschwindet $\lg \frac{l}{l'}$ für $\varphi = 0$ und stellt für $\varphi = \varphi'$ eine endliche Grösse dar, die mit a nach Null convergirt. Es ist also nur noch zu zeigen, dass die beiden in (19) enthaltenen Integrale jedenfalls endlich bleiben, wenn a nach Null convergirt. Das erste dieser Integrale ist gleich

$$\int_{r=0}^{r=a} \frac{2a(r^2-a^2)}{l'l'^2}(\sin\varphi\, dr - r\cos\varphi\, d\varphi).$$

Da nun l^2 und l'^2 gleich oder grösser sind wie a^2, und da der Betrag von $r^2 - a^2$ gleich oder kleiner ist wie a^2, so ist der Betrag dieses Integrales kleiner wie

$$\frac{2}{a}\int_{r=0}^{r=a} dr + 2\int_{r=0}^{r=a}\cos\varphi\, d\varphi = 2 + 2\,[\sin\varphi]^{r=a},$$

also jedenfalls endlich. Desgleichen ist in dem anderen Integrale

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} \frac{4a^2 r\cos\varphi}{l^2 l'^2}\, d\varphi$$

$l^2 > a^2$, $l'^2 > ar$, also wird der Betrag des Integrales kleiner als

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} 4\cos\varphi\, d\varphi = 4\sin\varphi'.$$

Damit ist bewiesen, dass

$$\lim \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi'} W d\lg\left(\frac{l^2}{l'^2}\right)$$

beliebig klein wird für $a = 0$. Dasselbe gilt auch für den anderen Theil des Bogens σ'. Sonach ist der Satz vollständig bewiesen, und zwar für jede Randcurve, die im allgemeinen, d. h. bis auf einzelne singuläre Punkte, in Bezug auf ihre Tangente und deren Aenderung dieselben Eigenschaften besitzt, wie eine analytische Curve in einem regulären Punkt.

Man kann den obigen Satz auch noch in folgender Weise erweitern:

Wenn eine integrirbare, überall endliche Randfunction W die Eigenschaft hat, dass für jeden Punkt (x, y) im Innern eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes

$$\frac{1}{2\pi}\int W(d\sigma)_x \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\int W\frac{dl}{l}$$

constant gleich Null sind, so ist W für die Punkte des Randes im allgemeinen gleich Null, d. h. die Stellen, an denen W um mehr als irgend eine bestimmte Grösse von Null verschieden ist, bilden eine „discrete Menge".

Der Beweis ergiebt sich, indem man an Stelle der Function W aus der Gleichung (12) die ihr „im allgemeinen" gleiche Function

$-\frac{1}{\pi}\int W(d\sigma)$, einführt; denn diese Function ist ausser in etwaigen Eckpunkten der Randcurve stetig.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass der Satz

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int W \frac{dl}{l} = \lim \frac{1}{2\pi}\int W \frac{dl'}{l'}$$

aussagt: Bezeichnen W_i und W_a die inneren und äusseren logarithmischen Potentiale einer Doppelbelegung, so besteht zwischen den Differentialquotienten nach der inneren und äusseren Normale des Randes in jedem Randpunkte die Gleichung

$$\frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_a}{dn_1} = 0,$$

vorausgesetzt, dass diese Ableitungen überhaupt bestimmte stetige Werthe haben.

§ 4.

Die Neumann'sche Lösung der Randwerthaufgabe für eine Fläche ohne einspringende Randtangenten.

Die weitere Anwendung der Gleichung (9) liefert unter gewissen Bedingungen eine Lösung der Aufgabe, die Function u (und v) zu bestimmen, wenn die Werthe der Function U längs des Randes gegeben sind. Es ist das die Lösung, welche Herr Neumann in seiner oben genannten Schrift gegeben hat. Sie führt auf dem directesten Wege zum Ziele, daher ich sie im Zusammenhange mit meinen Untersuchungen noch kurz angeben möchte.

Es ist

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l}.$$

Ist also U gegeben, so ist nur das zweite Integral noch unbekannt. Für dieses ergiebt die erste der Gleichungen (9):

$$\frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int P(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int Q\frac{dl}{l}.$$

Hier ist die Function $Q = \frac{1}{\pi}\int V(d\sigma)_x$ unbekannt. Beachtet man nun, dass $-Q$ die conjugirte Function zu P ist, so kann man dieselbe Relation zwischen P und $-Q$ entwickeln, wie zwischen U und V. Sind also P_1 und Q_1 die zugeordneten Functionen zu P und $-Q$, so wird

$$-\frac{1}{2\pi}\int Q\frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi}\int P(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int P_1(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int Q_1\frac{dl}{l}.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, indem man zu P_1, $-Q_1$ die zugeordneten Functionen P_2, Q_2 bestimmt, so erhält man schliesslich die Gleichung:

$$\begin{aligned}(20)\qquad \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int P(d\sigma)_x + \frac{1}{\pi}\int P_1(d\sigma)_x + \cdots \\ + (-1)^n\cdot\frac{1}{\pi}\int P_{n-1}(d\sigma)_x + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int P_n(d\sigma)_x \\ + (-1)^n\cdot\frac{1}{2\pi}\int Q_n\frac{dl}{l}\cdot\end{aligned}$$

Diese Gleichung bestimmt das gesuchte Integral, und zwar in Form einer unendlichen Reihe, wenn die Function P_n, und also auch Q_n, mit wachsenden Werthen von n immer mehr einer Constante sich nähert. Es wird dann

$$\lim\int Q_n\frac{dl}{l} = 0, \qquad \lim\frac{1}{2\pi}\int P_n(d\sigma)_x = C$$

und man erhält die Function in der Form:

$$\begin{aligned}(21)\qquad u = C + \frac{1}{\pi}\int(U-P)(d\sigma)_x + \frac{1}{\pi}\int(P_1-P_2)(d\sigma)_x + \cdots \\ + \frac{1}{\pi}\int(P_{2n-1}-P_{2n})(d\sigma)_x + \cdots\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}(22)\qquad u = -C + \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int(P-P_1)(d\sigma)_x \\ - \frac{1}{\pi}\int(P_2-P_3)(d\sigma)_x - \cdots \\ - \frac{1}{\pi}\int(P_{2n}-P_{2n+1})(d\sigma)_x - \cdots.\end{aligned}$$

Für eine Fläche, deren Randcurve so gestaltet ist, dass die Tangenten derselben nicht in das Innere eintreten, bei welcher also $(d\sigma)_x$ und $(d\sigma)_t$ stets positiv ist, lässt sich die Convergenz dieser Reihe nachweisen; und zwar ergiebt sich dieselbe aus dem Satze, dass bei diesen Flächen die Schwankungen der Functionen $U, P, P_1, P_2, \ldots$ stärker wie eine geometrische Progression abnehmen. Der Fall der Dreiecks- und Vierecksfläche ist dabei noch besonders zu berücksichtigen.

Die vorstehende Entwickelung bleibt auch dann noch gültig, wenn für U bloss die Voraussetzung der Endlichkeit und Integrirbarkeit gemacht wird. Auch ist die ganze Betrachtung (wie überhaupt ohne jede Einschränkung die Sätze in § 2 und § 3) auf die von der Curve begrenzte äussere Fläche mit geringer Modification übertragbar. Für eine beliebig gestaltete Randcurve aber lässt sich die Convergenz

dieser Reihen, die man mit Einführung eines festen Punktes a, b in der Form

$$\begin{aligned} & u(x, y) - u(a, b) \\ = & \frac{1}{\pi}\left[\int U(d\sigma)_x - \int U(d\sigma)_a\right] - \frac{1}{\pi}\left[\int P(d\sigma)_x - \int P(d\sigma)_a\right] + \cdots \\ & + (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\left[\int P_n(d\sigma)_x - \int P_n(d\sigma)_x\right]\cdots \end{aligned}$$

zusammenfassen kann, allgemein noch nicht nachweisen. Auch ist es bisher nicht gelungen, verwandte Reihen dieser Art für den allgemeinen Fall zu bilden. Derselbe erfordert, zumal bei den räumlichen Problemen in der Potentialreihe, eine andere Methode des Beweises.

Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume*).

Von

Axel Harnack †.

I.

Die Probleme in der Ebene.

§ 1.

Allgemeine Sätze.

1. Für jedes geradlinig begrenzte Polygon, auch wenn dasselbe einspringende Ecken besitzt, ist die Aufgabe als gelöst anzusehen: Eine Function $u(x, y)$ zu construiren, welche nebst ihren Ableitungen im Innern des Polygons allenthalben eindeutig und stetig ist, daselbst der Bedingung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt, und am Rande des Polygons vorgeschriebene Werthe besitzt. Eine Function dieser Art, die also innerhalb eines gegebenen Gebietes eine Lösung der partiellen Differentialgleichung und zwar ohne singuläre Punkte bildet, soll kurz eine „harmonische" in diesem Gebiete genannt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe ist auf zweierlei Weisen erreicht worden. Erstlich durch die gewissermassen expliciten Formeln, mittels deren die Herren Cristoffel und Schwarz die conforme Abbildung jedes Polygones auf die Halbebene ausgeführt haben (Annali di Matem. S. II. t. I. und Journal f. Math. Bd. 70), zweitens durch die von Herrn Neumann angegebene „Methode des arithmetischen Mittels", welche zunächst für Polygone ohne einspringende Ecken das Problem lösen lässt. Der Uebergang von diesen Polygonen zu den anderen ist durch die Combinationsmethoden ermöglicht, welche von den Herren Schwarz

*) A. d. Berichten der k. sächs. Ges. d. W. v. Jahre 1886.

und Neumann gleichzeitig gefunden wurden. (Vgl. auch Klein: Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie. Math. Annalen Bd. 21, S. 155 ff.)

Wird im Innern des Polygones ein Punkt O angenommen, und werden die Entfernungen der Randpunkte vom Punkte O mit ϱ bezeichnet, so ist also auch die harmonische Function construirbar, welche am Rande die Werthe $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ besitzt. Diese Function soll die zum Punkte O gehörige Green'sche Function heissen. Ist m der kleinste Werth unter den positiven Grössen ϱ, und M der grösste, so sind $l\left(\frac{1}{M}\right)$ und $l\left(\frac{1}{m}\right)$ bezüglich die algebraisch kleinsten und grössten Werthe, welche die Green'sche Function des Punktes O überhaupt im Innern und am Rande des Polygones annimmt. Umgiebt man den Punkt O mit einem beliebig kleinen Kreise, so ist die Differenz zwischen der Green'schen Function g und der Function $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ ausserhalb des Kreises und im Innern des Polygones überall harmonisch. Da diese Differenz auf dem Rande des Polygones gleich Null, und auf der Peripherie des beliebig kleinen Kreises negativ beliebig gross wird, so ist $g - l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ im Innern des Polygones überall negativ, also $g < l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$.

2. Jede im Innern einer Fläche F harmonische Function u lässt sich in eine Fourier'sche Reihe entwickeln. (Math. Annal. Bd. 21, S. 305.) Wählt man den Punkt O zum Mittelpunkt von Kreisen, so gilt auf jedem Kreis um O, dessen Radius kleiner ist als m, der also im Innern der Fläche F liegt, solch eine Entwickelung, und es wird, wenn ϱ den Radius, ϑ den Centriwinkel bedeutet:

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U\,d\vartheta + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\varrho}{m}\right)^k\left[\sin k\vartheta \int_{-\pi}^{+\pi} U \sin k\vartheta\, d\vartheta + \cos k\vartheta \int_{-\pi}^{+\pi} U \cos k\vartheta\, d\vartheta\right].$$

U bedeutet die Werthe, welche die Function u auf dem Kreise mit dem Radius m besitzt. Ueber diesen Kreis hinaus lässt sich die Function u und zwar für das ganze Innere der Fläche F durch analoge Reihenentwickelungen fortsetzen.

Desgleichen besteht für jede harmonische Function eine Integraldarstellung von folgender Art. Sind die Werthe der Function u auf der Peripherie eines im Innern der Fläche gelegenen Kreises mit U bezeichnet, so ist

$$u = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos\varepsilon}{l}\varrho\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta.$$

Hier bedeutet $d\sigma = \varrho d\vartheta$ das Bogenelement des Kreises, l die positiv genommene Entfernung des Elementes $d\sigma$ von dem betrachteten, im Innern des Kreises gelegenen Punkt (x, y), für welchen der Werth u ermittelt werden soll, und ε den Winkel, welchen der nach innen gerichtete Radius des Elementes $d\sigma$ mit der Geraden l bildet (diese genommen in der Richtung von $d\sigma$ nach dem Punkt (x, y)). Für den Mittelpunkt des Kreises ist

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta.$$

3. Besitzt eine harmonische Function am Rande einer beliebigen Fläche F nur positive (oder nur negative) Werthe U, und ist der Werth der Function u in irgend einem innern Punkt gleich dem Product einer bestimmten endlichen Grösse δ mit einer endlichen Grösse E, so ist auch für jeden anderen Punkt im Innern der Fläche der Werth der Function u darstellbar durch das Product von δ mit einer endlichen Grösse E'. Diese Grösse E' hängt ausser von E im Wesentlichen (d. h. hinsichtlich der Grenzen, welche man ein für allemal für ihren Betrag angeben kann), nur von der Lage des betreffenden Punktes ab.

Macht man nämlich den Punkt, in welchem die Function den Werth $E\delta$ hat, zum Mittelpunkt eines Kreises, so ist für den Mittelpunkt desselben:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta = E\delta,$$

und für jeden anderen Punkt im Innern des Kreises:

$$u = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos\varepsilon}{l}\varrho\, d\vartheta - E\delta.$$

Da die Grösse U ihr Zeichen nicht wechseln soll, so wird nach dem ersten Mittelwerthsatz der Integralrechnung:

$$u = \frac{1}{\pi}\left[\varrho\frac{\cos\varepsilon}{l}\right]\int U d\vartheta - E\delta = E\left\{2\varrho\left[\frac{\cos\varepsilon}{l}\right] - 1\right\}\delta,$$

wenn man mit $\left[\frac{\cos\varepsilon}{l}\right]$ einen mittleren Werth von $\frac{\cos\varepsilon}{l}$ bei allen möglichen Werthen von ϑ bezeichnet. Dieser Werth ist immer positiv und endlich, so lange der Punkt im Innern des Kreises liegt. Also ist

$$u = E'\delta, \quad \text{wobei} \quad E' = E\left\{2\varrho\left[\frac{\cos\varepsilon}{l}\right] - 1\right\}.$$

Da nun auf Grund dieser Gleichung jeder Punkt im Innern des Kreises zum Mittelpunkt einer neuen Integraldarstellung gemacht werden kann, so gilt der Satz für alle Punkte im Innern der Fläche F.

Dieser einfache Satz ist für das Folgende deshalb von Bedeutung, weil er lehrt, dass die Function u, falls sie überall dasselbe Zeichen hat, gleichmässig für alle Punkte im Innern der Fläche nach Null convergirt, sobald sie in einem einzigen Punkte mit δ beliebig klein wird. Denn die Grenzen, innerhalb welcher E variiren kann, bleiben, unabhängig von δ, stets nur endlich.

Dasselbe gilt auch für alle Ableitungen der Function u. Denn im Innern des Kreises mit dem Radius r bestehen für jeden Punkt mit den Coordinaten ϱ, ϑ die Gleichungen:

$$\frac{\partial u(\varrho,\vartheta)}{\partial \varrho} = \frac{1}{\pi r}\sum_{k=1}^{k=\infty} k\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-1}\left[\sin k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U\sin k\vartheta\, d\vartheta + \cos k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U\cos k\vartheta\, d\vartheta\right],$$

$$\frac{\partial u(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty} k\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k}\left[\cos k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U\sin k\vartheta\, d\vartheta - \sin k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U\cos k\vartheta\, d\vartheta\right].$$

Da nun die Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U\sin k\vartheta\, d\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U\cos k\vartheta\, d\vartheta$$

ihrem Betrage nach nicht grösser sind als der Betrag von

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U d\vartheta = 2E\delta,$$

weil U überall nur positiv oder nur negativ sein sollte, so sind auch die Beträge von $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ an jeder Stelle im Kreise gleich dem Producte von δ mit endlichen Grössen. Sie convergiren folglich überall im Innern von F gleichmässig nach Null, wenn δ beliebig klein wird. Ebenso verhalten sich alle höheren Ableitungen.

4. Ist für eine beliebige, endliche Fläche F eine unbegrenzte Reihe von harmonischen Functionen

$$u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_n,\ \cdots$$

gegeben, deren Randwerthe mit

$$U_1,\ U_2,\ \cdots\ U_n,\ \cdots$$

bezeichnet werden sollen, und convergirt die Summe der Randwerthe $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ gleichmässig nach einer bestimmten Function U, so stellt die unendliche Reihe

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

eine Function dar, welche im Innern der Fläche F harmonisch ist.

Denn die Function u ist erstlich in der Fläche stetig, weil die unendliche Reihe gleichmässig convergirt. Da nämlich die Summe

$$R_{n,m} = U_n + U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+m}$$

zufolge der Voraussetzung für alle Randpunkte zugleich, lediglich durch Wahl von n und unabhängig von m, ihrem Betrage nach kleiner als eine beliebige Grösse δ gemacht werden kann, so wird auch die Summe

$$r_{n,m} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}$$

dem Betrage nach für alle Punkte im Innern von F kleiner als δ. Setzt man ferner

$$u = s_n + r_n, \quad s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1},$$

so ist für jeden Punkt im Innern eines innerhalb F gelegenen Kreises mit dem Radius r:

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int S_n \frac{\cos \varepsilon}{l}\, r\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int S_n\, d\vartheta,$$

wenn man mit S_n den Werth der Summe s_n in den Punkten der Peripherie des Kreises bezeichnet. Nennt man ferner U und R_n die Werthe von u und r_n auf der Peripherie des Kreises, so kann man diese Gleichung auch in der Form schreiben:

$$u - r_n = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos \varepsilon}{l}\, r\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int U\, d\vartheta$$
$$- \left[\frac{1}{\pi}\int R_n \frac{\cos \varepsilon}{l}\, r\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int R_n\, d\vartheta\right].$$

Da nun r_n und R_n durch Wahl von n gleichmässig beliebig klein werden, so ist

$$u = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos \varepsilon}{l}\, r\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int U\, d\vartheta,$$

d. h. u ist eine harmonische Function für das ganze Innere von F. Aus diesem und dem früheren Satz (Nr. 3) folgt:

Ist für eine beliebige endliche Fläche F eine unbegrenzte Reihe von harmonischen Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ gegeben, die alle innerhalb F einerlei Zeichen haben, und convergirt die Summe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

*an irgend einer Stelle im Innern der Fläche, so convergirt sie auch für alle inneren Punkte der Fläche, und ist in derselben eine harmonische Function.**)

Denn wenn die Reihe an einer Stelle convergirt, so lässt sich für diese Stelle ein Werth n angeben, sodass

*) Auch bei der Methode des arithmetischen Mittels, sowie bei den eingangs erwähnten Combinationsmethoden ist dieser Satz dienlich.

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+m}$$

bei jedem Werth von m kleiner bleibt als eine vorgeschriebene beliebig kleine Grösse δ. Dann aber ist diese Summe im Innern von F allenthalben gleich dem Product von δ mit einer endlich bleibenden Grösse.

§ 2.

Die Construction der Green'schen Function.

1. In der xy-Ebene sei eine einfach zusammenhängende, ganz im Endlichen liegende Fläche F ohne Windungspunkte gegeben. Ueber den Rand C derselben machen wir keine andere Voraussetzung, als dass er aus einer stetigen, sich selbst nicht durchschneidenden Curve bestehen soll. (Die Curve kann unendlich viele Ecken besitzen, ja überhaupt keine bestimmten Tangenten oder Bogenelemente haben.) Im Innern der Fläche werde ein Punkt O beliebig angenommen. Es soll die Existenz der Green'schen Function bewiesen werden, welche zum Punkt O gehört.

Man construire innerhalb der Curve C eine unendliche Reihe von Polygonen: $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n \cdots$ mit folgenden Eigenschaften. *Erstens:* Jedes Polygon liegt ganz innerhalb der Curve C, das heisst: sein Umfang hat keinen Punkt mit derselben gemein. *Zweitens:* Jedes Polygon liegt ganz ausserhalb des vorhergehenden. *Drittens:* Das Polygon P_n soll sich bei wachsenden Werthen von n der Curve C beliebig nähern. Dies wird der Fall sein, wenn jeder Punkt auf dem Polygon P_n so liegt, dass die untere Grenze seiner Entfernungen von den Punkten der Curve C unterhalb einer Grösse δ sich befindet, die mit wachsenden Werthen von n nach Null convergirt.

Zu jedem Polygon lässt sich die Green'sche Function, welche zum Punkt O gehört, construiren. Bezeichnet man die für P_n geltende Function mit g_n, so erhält man eine unendliche Folge von Functionen:

$$g_1, g_2, g_3, \cdots g_n, \cdots.$$

Von diesen Functionen soll bewiesen werden, dass sie nach einer ganz bestimmten harmonischen Function g convergiren, und dass diese Function g, welche durch die unendliche Summe

$$g = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + (g_n - g_{n-1}) \cdots$$

darstellbar ist, für die von der Curve C umschlossene Fläche F diejenige Green'sche Function ist, welche zum Punkt O gehört.*)

*) Mittels des Verfahrens der Einschliessung einer Fläche durch Polygone hat Herr Schwarz die Möglichkeit der conformen Abbildung einer ebenen Fläche, deren Begrenzung überall convex nach Aussen ist, auf einen Kreis bewiesen (Prgr. der eidgen. polytechn. Schule 1869/70) und dem Studium dieser Abhandlung verdanke ich die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung. Im

2. Man vergleiche zunächst zwei aufeinander folgende Functionen, z. B. g_1 und g_2 deren Randwerthe mit $l\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)$ und $l\left(\frac{1}{\varrho_2}\right)$ bezeichnet seien. Weil die Green'sche Function im Innern eines Polygones allenthalben kleiner ist als $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$, und weil das Polygon P_1 ganz im Innern des Polygones P_2 liegt, so sind die Werthe, welche g_2 auf dem Polygon P_1 besitzt, kleiner als $l\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)$, also kleiner als g_1. Mithin ist überall im Innern von P_1

$$g_2 < g_1,$$

d. h. die Reihe der Functionen $g_1, g_2, g_3, \cdots$ bildet eine Reihe von abnehmenden Grössen; es ist

$$g_1 > g_2 > g_3 > \cdots > g_n > g_{n+1} > \cdots.$$

Diese Ungleichungen gelten für jeden Punkt im Innern der Fläche F von einer bestimmten Stelle ab, weil jeder innere Punkt schliesslich innerhalb eines Polygones und aller darauf folgenden zu liegen kommt.

Da nun jede der Functionen g_n in jedem Punkt innerhalb F grösser bleibt als der Werth $l\left(\frac{1}{M}\right)$, wenn M das Maximum der Entfernung der Punkte des Randes C vom Punkte O bedeutet, so folgt, dass die Functionen g_n in jedem Punkt innerhalb F nach einer bestimmten Grenze convergiren.

Beachtet man nun weiter, dass die Differenzen

$$(g_2 - g_1), \quad (g_3 - g_2), \cdots (g_n - g_{n-1}), \cdots$$

alle einerlei Zeichen haben, nämlich negativ sind, so folgt nach dem am Schluss des § 1 erhaltenen Satz, dass die Function:

$$g = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + (g_n - g_{n-1}) + \cdots$$

eine im Innern von F harmonische Function ist.

3. Es muss nun gezeigt werden, dass diese Function g bei Annäherung an den Rand gleichmässig stetig in die Werthe $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ übergeht.

Zur Vereinfachung der Discussion führe ich an Stelle der Functionen g_n und g die Functionen s_n und s ein, welche durch die Gleichungen

$$s_1 = \varrho e^{g_1}, \quad s_2 = \varrho e^{g_2}, \cdots s_n = \varrho e^{g_n}, \cdots \text{ und } s = \varrho e^{g}$$

definirt sind. Jede der Functionen s_n besitzt am Rande des zugehörigen Polygones P_n den constanten Werth 1, und im Punkt O

Uebrigen unterscheiden sich die Formulirungen, welche Herr Schwarz angiebt, von den hier angewandten. Jene lassen sich nicht auf eine beliebig berandete ebene Figur und nicht für die Lösung des analogen Problemes im Raume übertragen.

den Werth Null. Ferner sind die Functionen $l(s_n)$ harmonische Functionen nach Ausschluss des Punktes O, in welchem sie negativ unendlich werden. Da die Reihe der Functionen g_n eine abnehmende ist, so ist auch die Reihe der Functionen s_n eine abnehmende, d. h. es ist für jeden Punkt innerhalb der Fläche

$$s_1 > s_2 > s_3 \cdots > s_n > \cdots > s.$$

Bezeichnet α einen bestimmten positiven Werth kleiner als 1, so bilden die Punkte, in denen s_n den constanten Werth α hat, eine einfach geschlossene Curve, welche den Punkt O umgiebt. Sucht man also die Curven auf, für welche

$$s_1 = \alpha, \quad s_2 = \alpha, \quad \cdots \quad s_n = \alpha, \quad \cdots$$

ist, so folgt aus den obigen Ungleichungen, dass jede dieser Curven ausserhalb der vorhergehenden liegt. Es wird also auch der Ort aller der Punkte, in denen $s = \alpha$ ist, ausserhalb aller vorhergehenden Curven sich befinden.

Man muss daher zuvörderst nachweisen, dass solche Punkte überhaupt im Innern von F vorhanden sind. Zu dem Zwecke denke man sich ein Polygon Q construirt, dessen Fläche die Fläche F ganz einschliesst, dessen Umfang aber *einen* oder mehrere Punkte mit der Curve C gemein hat. Construirt man für dieses Polygon Q die zum Punkte O gehörige Green'sche Function γ, so ist der Werth von γ im Innern der Fläche F kleiner als jede der Functionen g_n, also auch nicht grösser als die Function g. Bezeichnet man mit σ den Werth $\sigma = \varrho e^{\gamma}$, so ist in den Punkten der Fläche F

$$s \geqq \sigma.$$

Da nun die Curve $\sigma = \alpha$ jedenfalls in das Innere der Fläche F eintreten muss, weil sie die Punkte ausschliesst, welche das Polygon Q mit dem Rande C gemein hat, und in denen $\sigma = 1$ ist, so sind auch im Innern von F Punkte vorhanden, in denen s gleich oder grösser als α ist.

Der Ort aller der Punkte, in denen $s = \alpha$ ist, kann nicht eine geschlossene Curve sein, falls sie nicht den Punkt O einschliesst; denn sonst wäre s allenthalben in F constant, was zufolge der Gleichung $l(s) = g + l(\varrho)$ unmöglich ist.

Ebensowenig können die Punkte, in denen $s = \alpha$ ist, im Innern von F gelegene, nicht geschlossene Curven bilden; denn bei einer harmonischen Function ist dieses überhaupt unmöglich.

Sonach ist nur zu zeigen, dass der Ort der Punkte $s = \alpha$ beliebig nahe an den Rand C heranrückt, wenn α beliebig nahe an den Werth 1 rückt, dass aber die Punkte $s = \alpha$ den Rand C niemals erreichen, so lange α kleiner als 1 ist.

Construirt man das Polygon P_n im Innern der Curve C, welches derselben beliebig nahe gebracht wird dadurch, dass man n beliebig gross annimmt, so hat auf demselben die Function s_n den Werth 1, und jede der folgenden Functionen einen Werth, der kleiner ist als 1. Bestimmt man den grössten Werth, welchen die Function s auf diesem Polygon annimmt, und nennt man denselben α, so ist für alle Werthe im Innern dieses Polygones der Werth von s kleiner als α; alle Punkte, in denen $s > \alpha$ ist, liegen also zwischen dem Polygon P_n und der Curve C, d. h. sie kommen der letzteren beliebig nahe.

Die Curve $s = \alpha$ kann dabei den Rand niemals erreichen. Denn wird wie vorhin das Polygon Q construirt, welches mindestens einen Punkt mit der Curve C gemein hat, im Uebrigen aber ganz ausserhalb derselben liegt, so ist s jedenfalls nicht kleiner als σ. Demnach liegt die Curve $s = \alpha$ nicht ausserhalb der Curve $\sigma = \alpha$. Die Curve $\sigma = \alpha$ kann nun zwar den Rand C an mehreren Stellen durchschneiden, sie muss aber alle die Punkte des Randes, welche zugleich auf dem Polygon Q liegen, in bestimmter endlicher Entfernung ausschliessen; denn in diesen Punkten ist $\sigma = 1$. Mithin muss auch die Curve $\sigma = \alpha$ von diesen Randpunkten eine endliche Entfernung haben. Da nun jeder Punkt des Randes willkürlich zu einem Eckpunkt von Q gemacht werden kann, so hat die Curve $s = \alpha$ von allen Randpunkten eine endliche Entfernung, solange $\alpha < 1$ ist.

4. Mit der Existenz der zum Punkt O gehörigen Green'schen Function ist bekanntlich nun auch der folgende Satz bewiesen:

Jede endliche, einfach zusammenhängende, von einer beliebigen stetigen Randcurve begrenzte, ebene Fläche F kann derart conform auf das Innere eines Kreises abgebildet werden, dass einem beliebig zu wählenden Punkte O der Mittelpunkt des Kreises, und jedem anderen Punkt im Innern von F umkehrbar eindeutig ein Punkt im Innern des Kreises entspricht. Den Punkten, welche in beliebiger Nähe des Randes liegen, entsprechen Punkte, die an die Kreisperipherie rücken. Diese Abbildung ist bis auf eine Drehung des Kreises um seinen Mittelpunkt fixirt.

Ob nun auch den Punkten des Randes eindeutig bestimmte Punkte der Kreisperipherie entsprechen, hängt von den Werthen ab, welche die Ableitung der Green'schen Function, gebildet nach den inneren Normalen, in den Punkten des Randes besitzt. Diese Frage wird bei einer beliebigen Randcurve, die keine Tangenten und keine Normalen zu besitzen braucht, wohl kaum zu entscheiden sein. Nur bei einem Rand, der aus einer analytischen Curve, oder aus Stücken solcher Curven besteht, ist sie bisher und zwar in bejahendem Sinne beantwortet worden.

§ 3.

Die Haupteigenschaften der Green'schen Function.

Die Function g besitzt zwei wesentliche Eigenschaften, deren Beweis ich hier anführen möchte, um keinerlei Zweifel über die Allgemeingültigkeit derselben bestehen zu lassen; denn dieselben werden im folgenden Paragraphen benutzt.

1. Ist g_0 in Bezug auf eine beliebige ebene Fläche die zu einem Punkt o gehörige Green'sche Function, und ist $g_{0'}$, die zu einem andern Punkt o' gehörige Green'sche Function, so ist der Werth, welchen die erste Function im Punkte o' besitzt, gleich dem Werth, welchen die zweite Function im Punkt o hat; also in Formeln

$$g_o(o') = g_{o'}(o).$$

Der Beweis ist am einfachsten nach dem Verfahren, welches in den Vorlesungen von Riemann (Schwere, Electricität und Magnetismus, bearbeitet von Hattendorff) für dasselbe Problem im Raum mitgetheilt ist. Nur eine kleine Modification scheint mir dabei nothwendig zu sein.

Man umschliesse die innerhalb F gelegenen Punkte o und o' mit beliebig kleinen Kreisen, deren Mittelpunkte o und o' sind, und deren Radien ϱ und ϱ' heissen mögen. Nach Ausschluss dieser Kreise soll die Fläche F mit F' bezeichnet werden. Führt man die Functionen

$$u = g_o - l\left(\frac{1}{\varrho}\right), \quad u' = g_{o'} - l\left(\frac{1}{r'}\right)$$

ein, wobei r und r' die Entfernungen der Punkte von F' bezüglich von o und o' angeben, so sind u und u' im Innern von F' harmonische Functionen. Nach bekannten Sätzen bestehen die Gleichungen:

$$\int\left(u' \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u'}{\partial n}\right) d\sigma = 0, \quad \int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0, \quad \int \frac{\partial u'}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

wenn diese Integrale über sämmtliche Randcurven von F' erstreckt werden. Dabei sind die Ableitungen nach den inneren Normalen zu bilden. Um aber keine Voraussetzungen einzuführen über die Existenz und Integrirbarkeit der Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial n}$ und $\frac{\partial u'}{\partial n}$ am *Rande* von F, dessen Bogenelemente überdies nicht integrirbar zu sein brauchen, ersetze ich die Randcurve von F durch eine andere innere Curve mit integrirbarem Bogenelement, welche in beliebiger Nähe der eigentlichen Randcurve verläuft, und welche ebenfalls die um o und o' construirten Kreise einschliesst. Als solch eine Curve wähle ich diejenige, auf welcher u den constanten Werth α hat. Es ist dies eine analytische Curve, so dass eine Integration längs dieser Curve immer ausgeführt

werden kann.*) Wird das Bogenelement derselben mit $d\sigma'$ bezeichnet, so zerlegt sich das obige erste Integral in Integrale mit dem Element $d\sigma'$, und in zwei Integrale, welche sich auf die Kreise um o und o' beziehen. Es wird also

$$\int u' \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma' - \int u \frac{\partial u'}{\partial n}\, d\sigma'$$
$$+ \int \left(u' \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u'}{\partial n}\right) \varrho\, d\vartheta + \int \left(u' \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u'}{\partial n}\right) \varrho'\, d\vartheta = 0.$$

Das erste Integral ist, weil $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der neuen Randcurve überall negativ ist (höchstens gleich Null wird), nach dem ersten Mittelwerthsatz gleich

$$[u'] \int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma',$$

wenn $[u']$ einen mittleren Werth von u' bezeichnet; und zufolge der Gleichung

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

welche sich auf sämmtliche Randcurven bezieht, wird das vorhergehende Integral gleich

$$-[u'] \int \frac{\partial u}{\partial n}\, \varrho\, d\vartheta.$$

Ebenso ist

$$-\alpha \int \frac{\partial u'}{\partial n}\, d\sigma' = + \alpha \int \frac{\partial u'}{\partial n}\, \varrho'\, d\vartheta.$$

Da nun auf der Peripherie der Kreise ϱ und ϱ' die Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial g_0}{\partial n} + \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{\partial u'}{\partial n} = \frac{\partial g_0'}{\partial n} + \frac{1}{\varrho'},$$

so sind diese beiden Integrale bezüglich gleich $-2\pi[u']$ und $2\pi\alpha$, sie convergiren also nach Null, wenn α und folglich auch der Mittelwerth von u' beliebig klein gemacht werden, dadurch dass man die Curve σ' in beliebiger Nähe der Randcurve σ annimmt. Dass in der That bei diesem Processe auch der Mittelwerth von u' beliebig klein wird, folgt daraus, dass die Green'sche Function gleichmässig in ihre Randwerthe übergeht, wie im vorigen Paragraphen, wenigstens für einfach zusammenhängende Flächen, auf die es im Folgenden allein ankommt, bewiesen wurde. Ferner wird

---

*) Auf den Niveaulinien im Innern einer auch mehrfach zusammenhängenden Fläche können niemals Spitzen vorkommen, sondern nur vielfache Punkte (Gleichgewichtspunkte), in denen sich n Zweige unter Winkeln von der Grösse $\frac{\pi}{n}$ schneiden. Für eine einfach zusammenhängende Fläche besitzen die Curven $g - l\left(\frac{1}{r}\right) = \alpha$ auch keine vielfachen Punkte.

$$\lim_{\varrho=0}\int\left(u'\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial u'}{\partial n}\right)\varrho\,d\vartheta=\lim\int u'\left(\frac{\partial g_0}{\partial n}+\frac{1}{\varrho}\right)\varrho\,d\vartheta$$
$$-\lim\int\frac{\partial u'}{\partial n}\left(g_0-l\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)\varrho\,d\vartheta=\left(g_{o'}(o)+l(oo')\right)2\pi$$
$$\lim_{\varrho'=0}\int\left(u'\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial u'}{\partial n}\right)\varrho'\,d\vartheta=\lim\int\frac{\partial u}{\partial n}\left(g_{o'}-l\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right)\varrho'\,d\vartheta$$
$$-\lim\int u\left(\frac{\partial g_0'}{\partial n}+\frac{1}{\varrho'}\right)\varrho'\,d\vartheta=-\left(g_o(o')+l(oo')\right)2\pi.$$

Demnach ist, da die Summe dieser Integrale beliebig klein wird,

$$g_{o'}(o)=g_o(o').$$

2. Für das Problem in der Ebene kann man den Beweis auch mittels der conformen Abbildung durch den sehr einfachen Nachweis des Satzes erledigen: Wird ein Kreis conform auf sich selbst abgebildet, so dass irgend ein Punkt desselben, der den Abstand d vom Mittelpunkt hat, nunmehr Mittelpunkt wird, so entspricht bei dieser Abbildung dem Mittelpunkt ein Punkt, der wiederum im Abstande d von der Mitte sich befindet.

3. Auf Grund der angewandten einfachen Principien und des vorigen Satzes erhält man auch den Beweis für die zweite Eigenschaft der Green'schen Function: Rückt der Punkt o' auf den Rand der Fläche F in einen Punkt p, so geht die zum Punkte o' gehörige Green'sche Function in die Function $l\left(\frac{1}{r'}\right)$ über, wobei r' die Entfernungen der Punkte in der Fläche F vom Punkte p bedeutet. Dieser Uebergang erfolgt, nach Ausschluss des Punktes p durch ein beliebig kleines Gebiet, gleichmässig stetig.

Man betrachte gleichzeitig einen festen Punkt o und den variabeln Punkt o'. Um den Punkt o construire man die Curven, auf welchen die Green'sche Function g_0 gleich $l\left(\frac{1}{r}\right)+\alpha$ oder $g_0-l\left(\frac{1}{r}\right)$ constant gleich α ist, wobei α einen negativen Werth mit beliebig kleinem Betrag bedeutet. Rückt der Punkt o' auf diese Curve, so hat die zu o' gehörige Green'sche Function g_o' im Punkte o den Werth $l\left(\frac{1}{oo'}\right)+\alpha$. Umgiebt man den Randpunkt p, in welchen o' hineinrücken soll, mit einem beliebig kleinen in's Innere von F eindringenden Gebiet, welches den Punkt o' einschliesst, und nennt man F nach Ausschluss dieses Gebietes F', so ist $g_{o'}-l\left(\frac{1}{r'}\right)$ eine in F' überall harmonische Function; r' bezeichnet die variable Entfernung jedes Punktes im Innern oder am Rande der Fläche F' vom Punkte o'. Diese harmonische Function ist im Punkte o gleich α, am Rande von F' überall negativ oder Null, und folglich ist $g_{o'}-l\left(\frac{1}{r'}\right)$ überall im

Innern von F' gleich dem Product von a mit endlichen Grössen. (§ 1. Nr. 3.) Convergirt a nach Null, so geht g_o' innerhalb F' gleichmässig in den Werth $l\left(\frac{1}{r'}\right)$ über.

Man kann diesen Satz auch folgendermassen aussprechen: Wird irgend eine Curve betrachtet, die ganz im Innern der Fläche F liegt, so convergiren die Werthe, welche die Function $g_{o'}$ auf der Peripherie und im Innern dieser Curve besitzt, gleichmässig nach den Werthen $l\left(\frac{1}{r'}\right)$, wenn o' auf den Rand der Fläche F rückt. Ebenso convergiren auch die Ableitungen der Function g gleichmässig nach den Werthen der entsprechenden Ableitungen von $l\left(\frac{1}{r'}\right)$. (§ 1. Nr. 3.)

§ 4.

Nachweis der Existenz einer harmonischen Function mit beliebigen stetigen Randwerthen.

1. Von der Randcurve C, welche eine *einfach zusammenhängende* Fläche F begrenzt, wird im Folgenden vorausgesetzt, dass ihr Bogenelement $d\sigma$ integrirbar ist, und dass sie nicht unendlich viele Wendungen besitzt. Ueberdies werde der Einfachheit wegen angenommen, dass keine Eckpunkte oder Spitzen auf dem Rande vorhanden sind, sodass es also in jedem Randpunkte eine bestimmte, sich stetig ändernde Tangente giebt. Sind alsdann längs des Randes die Werthe einer eindeutigen und stetigen Function U gegeben, so soll für das Innere der Fläche F die harmonische Function u bestimmt werden, welche gleichmässig stetig in die Randwerthe U übergeht. Unter dem gleichmässig stetigen Uebergang in die Randwerthe verstehe ich folgende Eigenschaft: Bei jeder vorgeschriebenen, beliebig kleinen Grösse δ muss sich zu jedem Randpunkt s ein Gebiet von endlicher Ausdehnung angeben lassen, welches in das Innere von F eintritt, und zum Theil von einem Bogenstück der Randcurve, in welchem s liegt, begrenzt ist, sodass die Werthe der Function u, welche zu den Punkten dieses Gebietes und seiner Grenzlinien gehören, unter einander um weniger als δ differiren.

Es ist bekannt, dass diese Function u, wenn überhaupt, so jedenfalls eindeutig bestimmt ist.

Die von Green (Journ. f. Math. Bd. 44) angegebene Formel lautet:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial \log\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial g}{\partial n}\, d\sigma.$$

Dabei bedeutet ϱ die Entfernung des Punktes x, y von den Punkten des Randes, g die zum Punkt x, y gehörige Green'sche Function,

und $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung der betreffenden Function, gebildet in den Punkten des Randes nach der inneren Normalen. Die Grösse $\frac{\partial \log\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial n}$ ist gleich $\frac{\cos \varepsilon}{\varrho}$, wobei ε den Winkel bezeichnet, den die nach innen gerichtete Normale mit der Richtung ϱ (von $d\sigma$ nach dem Punkte x, y) einschliesst. Die Grösse $\frac{\cos \varepsilon}{\varrho} d\sigma$ giebt den Winkel an, unter welchem das Bogenelement $d\sigma$ vom Punkte x, y aus gesehen wird, wobei jedoch dieser Winkel positiv oder negativ ist, je nach dem Vorzeichen von $\cos \varepsilon$. Derselbe wird von Herrn C. Neumann mit $(d\sigma)_x$ bezeichnet, sodass die vorstehende Integralformel geschrieben werden kann:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial g}{\partial n}\, d\sigma.$$

Heine nennt in seiner Theorie der Kugelfunctionen (2. Aufl. Bd. 2, S. 93) diese Formel mit Recht nur eine heuristische: „indem manche Punkte in der Ableitung einen genauen Beweis vermissen lassen. Es ist z. B. noch nicht bewiesen, dass g sich continuirlich ändert, wenn der Pol bis in die Begrenzung fortrückt.“

Der Beweis dieser letzteren Eigenschaft ist in dem vorigen Paragraphen in voller Strenge erbracht, dagegen ist über die Ableitung der Function g nach der inneren Normalen nichts bekannt, also weder über ihre Stetigkeit bei Annäherung der Function (nicht ihres Poles) an den Rand, noch über ihre Integrirbarkeit längs des Randes. Ohne auf diese letzteren Fragen näher einzugehen, kann man indessen die Gültigkeit der obigen Formel, sobald man den eigentlichen Inhalt derselben genauer präcisirt, vollkommen beweisen.

2. Behandelt man die beiden Integrale gesondert, so ergeben sich zunächst für das erste die folgenden Eigenschaften, für deren Beweis ich mich auf frühere Arbeiten berufen kann*). Das Integral

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x$$

stellt eine im Innern von F harmonische Function dar, welche bei Annäherung an den Rand, d. h. wenn der Punkt x, y in einen Randpunkt s rückt, gleichmässig nach dem Werth

$$U_1 = \frac{1}{2}U_s + \frac{1}{2}P_s$$

*) Neumann, Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential (Leipzig 1877), sowie meine Mittheilung: „Zur Theorie des Cauchy'schen Integrales“ in diesen [d. i. den sächsischen] Berichten, Jahrgang 1885, [Die vorstehend, pag. 1 ff. abgedruckte Abhandlung].

convergirt, wobei U_s den Werth der Function U im Punkte s bedeutet, und die „zugeordnete" Function P_s in jedem Punkte s des Randes durch das Integral

$$P_s = \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma),$$

definirt ist.

3. Das zweite Integral bedarf einer neuen Definition. An Stelle der Randcurve C betrachte man eine andere innere Curve C', die in beliebiger Nähe des Randes verläuft. Auf dieser neuen Curve C' vertheile man in bestimmter Weise die Werthe der stetigen Function U.

Um eine bequeme Vorstellung und eine einfache analytische Formulirung vor Augen zu haben, nehme man C' als Parallelcurve zu C an. Die Parallelcurve C' besitzt, wenn sie in beliebiger Nähe von C verläuft, keine Doppelpunkte, Ecken oder Spitzen, wenn C keine derartigen singulären Punkte hat. Die Punkte von C' sind den Punkten von C eindeutig zugeordnet. Rückt die Parallelcurve durch Verkleinerung ihres Abstandes beliebig nahe an die Curve C, so rücken auch die zugeordneten Punkte einander beliebig nahe. Auf der Curve C' vertheile man die Function U derart, dass in den zugeordneten Punkten von C und C' die Werthe von U übereinstimmen. Das Bogenelement der Curve C' heisse $d\sigma'$.

Man bilde die harmonische Function u_2', welche in jedem Punkte O der Fläche durch das Integral

$$u_2' = \frac{1}{2\pi}\int U\,\frac{\partial g}{\partial n'}\,d\sigma'$$

definirt ist. Dabei soll g die zum Punkte O gehörige Green'sche Function für die von der Curve C umschlossene Fläche F sein; $\frac{\partial g}{\partial n'}$ aber die Ableitung dieser Function, *gebildet längs der Curve* C' nach der inneren Normalen. Ebenso erstreckt sich die Integration nicht über die Randcurve C, sondern über die Curve C'. Es ist $\frac{\partial g}{\partial n'}$ längs dieser inneren Curve eine durchaus reguläre Function.

Nun ist zu untersuchen, welche Grenzwerthe U_2' diese Function in den Punkten des Randes C besitzt. Lässt man den Punkt O in einen Randpunkt — er heisse s — rücken, so geht die Green'sche Function, sowie ihre Ableitung in den Punkten der inneren Curve C' gleichmässig stetig in den Werth $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ und $\frac{\partial}{\partial n'}\,l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ über, wobei ϱ die Entfernung des Punktes s von den Punkten der Curve C' bedeutet. (§ 3. Nr. 3.) Es ist also

$$\lim u_2' = U_2' = \frac{1}{2\pi}\int U\,\frac{\partial}{\partial n'}\,l\left(\frac{1}{\varrho}\right)d\sigma'$$

für die Punkte des Randes C.

4. Wenn die Parallelcurve C' immer näher an den Rand C construirt wird, so ändern sich die Werthe der harmonischen Function u_2', sowie ihre Randwerthe U_2'. Es soll der Grenzwerth bestimmt werden, den U_2' bei diesem Processe erhält.

Zu dem Zwecke fixire man auf der Randcurve C einen beliebig kleinen Bogen σ_1, in dessen Innern der Randpunkt s liegt. Auf diesem Bogen σ_1 sollen die Werthe der stetigen Function U um weniger als eine beliebig kleine Grösse δ von einander differiren. Errichtet man in den Endpunkten dieses Bogens die Normalen, so schneiden diese auf der Parallelcurve C' einen Bogen σ_1' aus, dessen Punkte den Punkten von σ_1 entsprechen. Die übrigen Theile von C und C' seien mit σ_2 und σ_2' bezeichnet.

Das Integral U_2' zerlegt sich in zwei Theile, von denen sich der eine auf σ_1', der andere auf σ_2' bezieht; es ist

$$U_2' = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'}\, l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_1' + \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'}\, l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_2'.$$

Wenn nun die Curve C' immer mehr an die Curve C heranrückt, so gehen im zweiten Integral die Werthe von ϱ gleichmässig stetig in die Werthe über, welche die Entfernungen des Punktes s von den Punkten des Bogens σ_2 ausdrücken; also ist

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'}\, l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_2' = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_2$$

oder mit Benutzung der oben definirten Bezeichnung

$$= \frac{1}{2\pi}\int U (d\sigma_2)_s.$$

Dieser Uebergang ist auch ein gleichmässiger in Bezug auf alle Randpunkte s.

Das andere Integral hat den Werth

$$\frac{1}{2\pi}\int U (d\sigma_1')_s.$$

Bezeichnet man mit U_s den Werth von U im Punkte s, und beachtet, dass die Werthe von U längs des Bogens σ_1, also auch σ_1', um weniger als δ von einander differiren, so ist dieses Integral gleich

$$\frac{1}{2\pi}\, U_s \int (d\sigma_1')_s \pm \left(< \delta\, \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{abs}\,(d\sigma_1')_s\right).$$

Es ist aber $\int (d\sigma_1')_s$ gleich dem negativen Winkel, unter welchem das Bogenelement σ_1' vom Punkte s aus erscheint. Dieser Winkel werde mit α' bezeichnet; also ist der vorstehende Werth gleich

$$-\frac{\alpha'}{2\pi}\, U^s \pm \left(< \delta\, \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{abs}\,(d\sigma_1')_s\right).$$

Lässt man die Curve C' an die Curve C beliebig heranrücken, so geht α' in den Winkel über, welchen die vom Punkte s an die Endpunkte des Bogens σ_1 gezogenen Linien mit einander bilden, und zwar in denjenigen Scheitelwinkel, der dem Innern der Fläche F zugekehrt ist. Bezeichnet man diesen Winkel mit α, so ist

$$\lim U_2' = -\frac{\alpha}{2\pi} U_s \pm \left(< \delta \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{abs} (d\sigma_1')_s\right) + \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma_2)_s.$$

Indem man nun den Bogen σ_1 beliebig klein werden lässt, geht α in den Werth π über; ferner convergirt δ nach null, während $\int \operatorname{abs} (d\sigma_1)_s$ ebenfalls null wird, weil unendlich viele Wendungen auf jedem Bogenstück ausgeschlossen waren; endlich wird

$$\frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma_2)_s = \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma)_s.$$

Sonach erkennt man, dass

$$U_2 = \lim U_2' = -\frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma)_s = -\frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2} P_s$$

ist. Der Uebergang von U_2' in diesen Grenzwerth U_2 ist für alle Randpunkte s ein gleichmässig stetiger; d. h. zu jeder vorgeschriebenen beliebig kleinen Zahl ε lässt sich eine Lage der Curve C' angeben, sodass die Werthe der Function U_2', welche von dieser Curve geliefert werden, sich allenthalben auf C um weniger als ε von U_2 unterscheiden. Man erkennt dieses, indem man den gleichmässig stetigen Uebergang der Winkel α' in α, und der Secantenwinkel α in den Tangentenwinkel π beachtet.

Hieraus folgt, dass die Function

$$u_2 = \lim_{\sigma' = \sigma} \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial g}{\partial n'} \, d\sigma'$$

eine harmonische Function ist, die gleichmässig stetig in die Randwerthe U_2 übergeht. Denn dass u_2 eine harmonische Function ist, folgt aus dem ersten Satz im § 1, Nr. 4; und dass der Uebergang von u_2 in seine Randwerthe ein gleichmässiger ist, erkennt man folgendermassen. Man construire eine Parallelcurve $C^{(n)}$, wobei n bereits so fixirt ist, dass die Randwerthe $U_2^{(n)}$ auf C, welche von dieser Curve geliefert werden, von jeder der folgenden Functionen $U_2^{(n+m)}$ und also auch von den Werthen U_2 weniger differiren, als die Grösse $\frac{\delta}{3}$ beträgt. Bestimmt man alsdann zu allen Randpunkten s die Bereiche, innerhalb deren die Werthe von $u_2^{(n)}$ um weniger differiren, als die Grösse $\frac{\delta}{3}$ beträgt, so differiren in diesen Bereichen auch die

Werthe einer jeden Function $u_2^{(n+m)}$, also auch die Werthe von u_2, um weniger als δ.

Für die Fläche F ist also erstlich eine harmonische Function u_1 construirt worden, mit den Randwerthen $\frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2} P_s$, sodann eine harmonische Function u_2 mit den Randwerthen $-\frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2} P_s$; also ist

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \lim_{\sigma'=\sigma} \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial g}{\partial n'}\, d\sigma'$$

eine harmonische Function für das ganze Innere von F, welche gleichmässig stetig in die vorgeschriebenen Randwerthe U übergeht.

5. Besteht die Begrenzung aus einer analytischen Curve, so lässt sich die Green'sche Function in der Umgebung jedes regulären Randpunktes über den Rand hinaus fortsetzen. Dann ist auch das zweite Integral unmittelbar auf der Randcurve definirbar. Auch für einen aus Stücken analytischer Curven zusammengesetzten Rand ist dieses noch leicht nachweisbar.

Man kann nun auch ohne Schwierigkeit erkennen, dass durch das Auftreten von Ecken oder Spitzen in beliebiger endlicher Anzahl die Betrachtungen nur wenig modificirt werden, sodass das Resultat bestehen bleibt. Auch lässt sich die Untersuchung für den Fall ausdehnen, dass in der Randfunction einzelne Sprünge vorkommen, oder dass dieselbe überhaupt nur eine endliche integrirbare Function ist.

Im Vorstehenden ist, wie ich glaube, zum erstenmal ein vollständiger Beweis für beliebig berandete, einfach zusammenhängende Flächen gegeben; die Beschaffenheit der Randcurve ist nur insofern eingeschränkt, als nicht unendlich viele Wendungen oder Spitzen zugelassen worden sind.

Durch die bisherigen Beweise wurden ausser den überall convexen Flächen, und den durch Combinirungen aus denselben entstandenen, nur diejenigen erledigt, welche von analytischen Curvenstücken begrenzt sind, und zwar mit Hülfe der Combinationsmethoden. Dieselben erfordern aber eine Zerstückelung der Fläche und die conforme Abbildung eines jeden Stückes auf Kreissegmente.

Diese Combinationsmethoden bleiben noch nothwendig, wenn man den Beweis für mehrfach zusammenhängende Flächen oder bei vorgeschriebenen Unstetigkeitsbedingungen führen will. Man erhält dann einen Existenzbeweis für diese Flächen, wobei nun ebenfalls die Randcurven nicht mehr analytisch zu sein brauchen und aus den obigen Entwickelungen folgt, dass die modificirte Green'sche Formel, welche die Function vermittelst ihrer Randwerthe darstellt, auch hier noch gilt.

II.

Die Probleme im Raume.

Die für die Ebene angewandten Methoden und Lehrsätze sind absichtlich so formulirt worden, dass sie sich insgesammt — selbstverständlich mit Ausnahme der auf die conforme Abbildung bezüglichen Bemerkungen — auf die analogen Probleme des Newton'schen Potentiales im Raume ausdehnen lassen. Ich darf daher eine explicite Ausführung, die nur einzelne Erläuterungen erfordern, im Uebrigen aber keinerlei Schwierigkeiten mehr bieten würde, hier unterlassen, und mich auf folgende Bemerkungen beschränken.

1. Für jedes von Ebenen begrenzte Polyeder kann man die Existenz einer harmonischen Function, welche also im Innern des Polyeders nebst ihren Ableitungen eindeutig und stetig ist, daselbst der Bedingung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

genügt, und an der Begrenzung vorgeschriebene Werthe U besitzt, als bewiesen voraussetzen. Die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels liefert einen Beweis für Polyeder, die überall längs ihren Kanten convex nach aussen sind, und durch die Combinationsmethoden lässt sich alsdann auch der Nachweis für Polyeder mit einspringenden Flächenwinkeln erbringen.

Demnach wird auch die Existenz der zu einem beliebigen Punkt O im Innern des Polyeders gehörigen Green'schen Function vorausgesetzt, d. h. derjenigen harmonischen Function, welche an der Begrenzungsfläche den Werth $\frac{1}{\varrho}$ hat, wobei ϱ die Entfernung der Begrenzungspunkte vom Punkte O bedeutet.

2. Eine im Innern des Raumes T harmonische Function kann nach Reihen entwickelt werden, deren Coefficienten Kugelfunctionen sind. Beschreibt man um irgend einen Punkt im Innern von T als Mittelpunkt ein System von concentrischen Kugeln mit den Radien ϱ, wobei ϱ alle Werthe von null bis zu dem Werthe R annehmen kann, den die kleinste Entfernung des gewählten Mittelpunktes von den Punkten der begrenzenden Fläche liefert, so gilt für jeden Punkt auf diesen Kugelflächen eine Gleichung von der Form:

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \varrho^n, \quad C_n = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{1}{R^{n+2}} \int U P^{(n)} (\cos \gamma)\, d\sigma.$$

U bedeutet die Werthe der Function auf der Kugel mit dem Radius R, $d\sigma$ das Flächenelement dieser Kugel, $P^{(n)}$ $(\cos \gamma)$ in üblicher Bezeichnung die Kugelfunction n^{ter} Ordnung.

Desgleichen gilt auch eine Integraldarstellung der Function u für jeden Punkt im Innern der Kugel R; es ist

$$u = \frac{R^2 - \varrho^2}{2\pi R} \int \frac{U\,d\sigma}{(R^2 - 2R\varrho\cos\gamma + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder in analoger Bezeichnung wie früher, so dass $(d\sigma)_x$ den Raumwinkel angiebt, unter welchem das Flächenelement $d\sigma$ vom Punkt x, y, z aus erscheint:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{4\pi}\int U\frac{d\sigma}{Rl}.$$

l ist die Entfernung des betrachteten inneren Punktes von dem Element $d\sigma$. Da der Werth der Function u im Mittelpunkte der Kugel

$$u_0 = \frac{1}{4\pi}\int U\frac{\partial\sigma}{R^2}$$

wird, so gelangt man auch hier zu Sätzen, die mit den früheren (§ 1, Nr. 3 und 4) wörtlich übereinstimmen.

3. Auch gelten unverändert die für die Green'sche Function und ihre Ableitungen im § 3 angegebenen Eigenschaften. Der Beweis der ersteren erfordert, wenn man ihn in der Weise formuliren will, wie es dort (§ 3, Nr. 1) geschehen ist, den Nachweis, dass man über jede Niveaufläche ein Flächenintegral erstrecken kann. Da die Niveaufläche im Innern des Gebietes eine analytische Fläche ist, d. h. in der Umgebung jedes ihrer Punkte durch eine nach Potenzen der drei Variabelen geordnete Reihe definirbar ist, so lässt sich dieser Nachweis in der That führen. Man kann indessen den Beweis auch ganz unabhängig davon machen, wenn man auf die Entstehung der betreffenden Green'schen Integralformel zurückgeht; denn diese basirt auf der Integration über ein räumliches Gebiet, und es lässt sich ohne Benutzung eines über eine Fläche ausgedehnten Integrales die Gleichung beweisen:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u'}{\partial z}\right)dT = -4\pi\left(g_0(o') - \frac{1}{oo'}\right)$$
$$= -4\pi\left(g_{o'}(o) - \frac{1}{oo'}\right).$$

Das auf der linken Seite stehende dreifache Integral ist dabei als der Grenzwerth eines dreifachen Integrales zu definiren, das zunächst über einen innerhalb T gelegenen Raum erstreckt ist, und dessen Integrationsgebiet sodann in den ganzen Raum T übergeht.

4. Sonach sind, wie früher, die Beweise für die folgenden Theoreme zu führen.

Erstens: Ist ein einfach zusammenhängender, von einer beliebigen Fläche F umschlossener, endlicher Raum T gegeben, und construirt

man im Innern dieses Raumes eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von Polyedern, von denen jedes ausserhalb des vorhergehenden sich befindet, und die sich der Fläche F beliebig nähern, so convergirt die Reihe der auf diese Polyeder bezüglichen Green'schen Functionen:

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \cdots,\ g_n,\ \cdots,$$

welche zu einem Punkte O im Innern des Raumes T gehören, nach einer bestimmten harmonischen Function g. Diese Function ist die zum Punkte O gehörige Green'sche Function in Bezug auf den von der Fläche F eingeschlossenen Raum T.

Zweitens: Das Integral

$$u_1 = \frac{1}{4\pi}\int U(d\sigma)_x,$$

gebildet über alle Elemente der Fläche F, die nun als Fläche mit integrirbaren Elementen ohne Kanten und Ecken angenommen wird (oder mit einzelnen Kanten und Ecken), stellt eine im Innern von T harmonische Function dar, die an der Begrenzungsfläche gleichmässig (bis auf die Kanten- und Eckpunkte) in den Werth

$$\frac{1}{2}\,U + \frac{1}{4\pi}\int U(d\sigma)_s$$

übergeht. Construirt man im Innern von T eine Parallelfläche F' zu F, deren Elemente mit $d\sigma'$ bezeichnet sind, und wird die zu jedem innern Punkt gehörige Green'sche Function g des Raumes T in den Punkten dieser Parallelfläche nach der inneren Normalen n' differentiirt, so stellt das Integral

$$u_2' = \frac{1}{4\pi}\int U\,\frac{\partial g}{\partial n'}\,d\sigma'$$

eine harmonische Function dar. Dieselbe convergirt, wenn F' mit F zusammenrückt, nach einer harmonischen Function u_2, deren Werthe bei Annäherung an die Fläche F gleichmässig in den Werth

$$-\frac{1}{2}\,U + \frac{1}{4\pi}\int U(d\sigma)_s$$

übergehen. Sonach ist

$$\frac{1}{4\pi}\int U(d\sigma)_x - \lim_{\sigma'=\sigma}\frac{1}{4\pi}\int U\,\frac{\partial g}{\partial n'}\,d\sigma'$$

die harmonische Function für den Raum T, welche an der Begrenzung F die vorgeschriebenen Werthe U besitzt.

5. Wenn es beim ersten Anblick unbefriedigend erscheint, dass die Potentialfunction nicht direct durch ein bestimmtes Integral, sondern als Grenzwerth eines solchen definirt ist, und erst bei weiteren Bedingungen, aus denen die Stetigkeit der Ableitung von g auch beim Uebergang in die Begrenzung hervorgeht, durch ein bestimmtes, auf die Grenzfläche bezügliches Integral darstellbar wird, so ist daran zu

erinnern, dass die Fundamentalsätze der Potentialtheorie fast insgesammt einen ähnlichen Charakter tragen.

So ist z. B. der Satz, dass die Dichtigkeit $\varkappa$ der Flächenbelegung in jedem Punkt der Fläche durch Differentiation der Potentialfunction nach der inneren und der äusseren Normalen n_1 und n_2 erhalten wird, und der Gleichung

$$-4\pi\varkappa = \frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2}$$

genügt, unter der Annahme, dass $\varkappa$ bloss eine integrirbare Function ist, selbst wenn sie stetig ist, nicht erwiesen, sondern durch die Integralgleichung zu ersetzen:

$$\lim_{\sigma_1=\sigma}\int d\sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \lim_{\sigma_2=\sigma}\int d\sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_2} = -4\pi M,$$

wobei σ_1 und σ_2 zwei Flächenstücke bezeichnen, die zusammen einen beliebigen Theil σ der belegten Fläche umschliessen. M bedeutet alsdann die zu diesem Theil gehörige Masse der Belegung, und die einschliessenden Flächen können der eingeschlossenen beliebig nahe gebracht werden.

Ebenso ist für eine Massenvertheilung in einem Raume die Gleichung

$$\Delta^2 u = -4\pi\varkappa$$

nicht bewiesen, wenn über $\varkappa$ nicht besondere Annahmen, sei es über die Differentiirbarkeit oder, wie Herr Hölder neuerdings bewiesen, allgemeiner über die Art der Stetigkeitsconvergenz gemacht werden. Auch hier tritt mit ganz allgemeiner Geltung die Integralgleichung ein, die den mittleren Werth der Dichtigkeit innerhalb jedes beliebig kleinen, aber endlichen Raumelementes zu bestimmen gestattet, und die man als eine Grenzrelation für zweite Differenzquotienten aussprechen kann; nämlich die Gauss'sche Gleichung:

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = M.$$

Letzteres hat schon Herr Kronecker in seiner Abhandlung: „Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln" (Monatsberichte der Berl. Acad. März 1869) hervorgehoben.

Im Anschluss an diese Abhandlung bemerke ich noch, dass man die vorstehenden Untersuchungen auf beliebig viele Variabele ausdehnen könnte.

Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function durch die Fourier-Bessel'schen Functionen*).

Von

Axel Harnack †.

Die Aufgabe, eine willkürliche reelle Function innerhalb eines endlichen Intervalles durch solche unendliche Reihen darzustellen, wie sie die Probleme der Potentialtheorie, der Wärmeleitung, der elastischen Schwingungen u. a. erfordern, ist von Heine auf Grund der Arbeiten von Cauchy, Sturm und Liouville in folgender Weise zusammengefasst worden:**)

Eine Function $f(x)$ ist darstellbar durch eine Reihe von der Form

$$(1) \qquad \sum_\lambda \Theta(\lambda, x) \frac{\int_0^X f(x)\,\Theta(\lambda, x)\, g(x)\, dx}{\int_0^X (\Theta(\lambda, x))^2\, g(x)\, dx},$$

wobei die Werthe λ die unendlich vielen Wurzeln einer transcendenten Gleichung $\varpi(\lambda) = 0$ durchlaufen, die nur reelle und keine vielfachen Wurzeln enthält, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Erstens: Es soll bei jedem reellen Werth von α das complexe Integral

$$\int \frac{\Theta(z, x)}{(z-\alpha)\,\varpi(z)}\, dz$$

nach z auf einem Kreise mit unendlichem Radius integrirt, null werden. In diesem Falle besteht die Entwickelung

$$\frac{\Theta(\alpha, x)}{\varpi(\alpha)} = \sum_\lambda \frac{\Theta(\lambda, x)}{(\alpha-\lambda)\,\varpi'(\lambda)}$$

*) A. d. Berichten der k. sächs. Ges. d. W. v. Jahre 1887.

**) „Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy", Journ. f. Math. Bd. 89, sowie Handbuch der Kugelfunctionen 2. Aufl. Bd. 2, pag. 216.

d. h. die Function $\Theta(\alpha, x)$ ist durch eine unendliche Reihe darstellbar, welche nach den $\Theta(\lambda, x)$ fortschreitet.

Zweitens: Diese Reihe soll in gleichem Grade convergiren.

Drittens: Es soll eine Function $g(x)$ angebbar sein, so dass

$$\int_0^X \Theta(\lambda, x)\,\Theta(\mu, x)\,g(x)\,dx$$

null ist, wenn λ und μ verschiedene Wurzeln der Gleichung $\varpi(\lambda) = 0$ sind; für $\lambda = \mu$ soll das Integral nicht null sein.

Viertens: Das Integral

$$\int_0^X \Theta(\alpha, x)\,g(x)\,\psi(x)\,dx$$

soll nicht für alle beliebigen reellen Werthe, welche man α ertheilen kann, null sein können, ohne dass die Function $\psi(x)$ Null ist, wenigstens im Allgemeinen, d. h. so dass ihr Mittelwerth in jedem beliebig kleinen Intervall null ist. Ist also $\psi(x)$ durchaus stetig, so muss der Werth constant null sein.

Fünftens: Die oben angegebene Reihe (1) soll in gleichem Grade convergiren. Statt dessen genügt es aber zu sagen: Diese Reihe soll im Allgemeinen in gleichem Grade convergiren, so dass ihr Integral durch gliedweise Integration gebildet werden kann, selbst wenn man die Reihe zuvor mit einer Function multiplicirt hat, die nicht unendlich wird, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt.

Sind nämlich diese Bedingungen erfüllt, so stellt die obige Reihe (1) eine Function $\varphi(x)$ dar, mit der Eigenschaft, dass (zufolge der fünften und dritten Bedingung)

$$\int_0^X \varphi(x)\,\Theta(\lambda, x)\,g(x)\,dx = \int_0^X f(x)\,\Theta(\lambda, x)\,g(x)\,dx$$

ist. Mithin ist auch (zufolge der zweiten und ersten Bedingung)

$$\int_0^X \varphi(x)\,\Theta(\alpha, x)\,g(x)\,dx = \int_0^X f(x)\,\Theta(\alpha, x)\,g(x)\,dx$$

und hieraus folgt (aus der vierten Bedingung), dass

$$f(x) = \varphi(x),$$

vorausgesetzt, dass beide Functionen stetig sind.

Diesen Satz benutzt Heine für die Entwickelung einer Function nach den trigonometrischen Functionen, sowie nach den Cylinder-

functionen erster Art, und zwar der zweiten und dritten Ordnung, die bei ihm durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\psi}{dx} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right)\psi = 0$$

definirt sind. Indessen ist er auf die Frage nicht näher eingegangen, ob die fünfte Bedingung erfüllt ist, eine Lücke, welche ich durch die folgenden Untersuchungen ergänzen möchte.

Die Function $\Theta(\lambda, x)$ bezeichne ich durch $U^{(n)}(\lambda, x)$ oder auch weiterhin kurz mit $U(\lambda x)$; sie soll ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \left(\lambda^2 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)U = 0 \tag{2}$$

sein, und zwar dasjenige, welches für $x = 0$ verschwindet. Ein solches particuläres Integral ist vorhanden, wenn n eine beliebige positive Zahl bezeichnet, und nur eines, wenn $n \geqq \frac{1}{2}$ ist. Dasselbe ist immer nur bis auf einen constanten Factor bestimmt, der für die Reihenentwickelung nicht in Betracht kommt, weil die Glieder derselben von der 0ten Dimension in Bezug auf U sind. Dies Integral werde (für $n \geq 0$, worauf wir uns für die folgenden Betrachtungen beschränken) durch die Gleichung definirt:

$$U^{(n)}(\lambda,x) = U^{(n)}(\lambda x) = \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{2k}.$$

Für $x = 0$ hat U den Werth Null, die Ableitung $\frac{dU}{dx}$ jedoch nur dann, wenn $n > \frac{1}{2}$ ist. Zu den von Heine definirten Functionen bestehen die Beziehungen

$$U^{(n)}(\lambda x) = \sqrt{\frac{\lambda x}{2}}\, J^{(n)}(\lambda x) = \frac{\lambda x}{2\sqrt{\pi}}\, \psi^{\left(n - \frac{1}{2}\right)}(\lambda x).$$

Für $n = \frac{1}{2}$ ist $U^n(\lambda x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\lambda x)$.*)

*) Diesen speciellen Fall habe ich behandelt in einer Arbeit „Zur Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern" (Zeitschrift für Math. 1887); daselbst ist gezeigt, dass bei der Integration der partiellen Differentialgleichung nicht die Darstellbarkeit der Function $f(x)$ gefordert wird, sondern die Convergenz einer Function $v(t, x)$ für $t = 0$ nach $f(x)$. Ist aber die Darstellung möglich, so vereinfacht sich dieser Nachweis. Ebenso verhält es sich bei den anderen Problemen, bei denen die Functionen U in Betracht kommen.

Die Werthe λ sollen die positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung sein:

$$\varpi(\lambda) = \frac{d U^{(n)}(\lambda x)}{dx} + h U^{(n)}(\lambda x) = 0 \quad \text{für} \quad x = X.$$

wobei h eine Constante ist, die auch null oder unendlich sein kann. Doch werde ich im Folgenden die besonderen Fälle, bei denen die Formeln einfacher werden, nicht besonders berücksichtigen.

Den Nachweis, dass die drei ersten Bedingungen erfüllt sind, und zwar die dritte unter der Annahme $g(x) = 1$, kann ich hier unterlassen. Desgleichen ist auch die vierte Bedingung erfüllt; weil sich nämlich $U(\alpha x)$ nach Potenzen des Argumentes αx entwickeln lässt, so folgt aus der Gleichung

$$\int_0^X \varphi(x)\, U(\alpha x)\, dx = 0, \quad \text{(bei beliebigen reellen Werthen von } \alpha)$$

dass

$$\int_0^X \varphi(x) x^n\, dx = 0$$

ist bei allen ganzzahligen positiven Exponenten n. Dies aber tritt nur ein, wenn alle Mittelwerthe von $\varphi(x)$ null sind.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass die Reihe

$$(3) \qquad \sum_{\lambda} U(\lambda x) \frac{\int_0^X U(\lambda x) f(x)\, dx}{\int_0^X (U(\lambda x))^2\, dx}$$

convergirt, und zwar so, dass ihre gliedweise Integration auch in dem Falle statthaft ist, dass man die Reihe zuvor mit einer Function multiplicirt hat, welche nicht unendlich wird, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt.

Der Weg, welchen ich einschlage, ist zunächst derselbe, den Liouville in zwei Abhandlungen angegeben hat*); aber die Liouville'schen Untersuchungen lassen die Aufgabe nicht unmittelbar und vollständig erledigen. Denn indem er von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + (\lambda^2 - k)\, U = 0$$

*) „Sur le développement des fonctions ou parties des fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable". Journ. de Mathématiques T. II, pag. 16 et pag. 418.

ausgeht, fordert er, dass k solch eine Function von x ist, dass sie für $x = 0$ nicht unendlich wird, während bei den darstellenden Functionen, die hier vorliegen und gerade die wichtigsten Fälle umfassen, $k = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$ ist, also von der zweiten Ordnung unendlich wird; seine Betrachtungen sind also hier direct nur für den Fall $n = \frac{1}{2}$, d. h. für die trigonometrischen Functionen brauchbar*).

I.

Bei einer jeden Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + (\lambda^2 - k) U = 0, \tag{4}$$

in welcher λ eine Constante, k eine beliebige Function von x ist, die im Intervall $x > 0$ bis $x = X$ nicht unendlich wird, gewinnt man für die Integralfunction folgende Relation. Multiplicirt man die Gleichung mit $\sin \lambda x$, so wird

$$\left(\sin \lambda x \frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda^2 \sin \lambda x U\right) dx = k U \sin \lambda x \, dx,$$

also

$$\frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \frac{dU}{dx} - \cos \lambda x U = C + \frac{1}{\lambda} \int_0^x k U \sin \lambda x \, dx \tag{5}$$

und es ist

$$C = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda c \left(\frac{dU}{dx}\right)_c - U_c \cos \lambda c,$$

---

*) Auch hat Liouville, wie ich der geschichtlichen Uebersicht halber erwähnen möchte, nicht die Nothwendigkeit der Bedingungen (1) und (2) erkannt, um daraus die Bedingung (4) herzuleiten; er ersetzte vielmehr diese Bedingung durch den Satz: Wenn das Integral

$$\int_0^X U(\lambda, x) \, \psi(x) \, dx$$

Null wird bei allen Werthen von λ, welche der Gleichung $\varpi(\lambda) = 0$ genügen, so muss $\psi(x)$ im Allgemeinen null sein. Dieser Schluss ist aber von ihm nur bewiesen, vorausgesetzt dass $\psi(x)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, worauf schon Ossian Bonnet in seiner preisgekrönten Arbeit „Sur la théorie générale des séries" (Académie de Belgique 1849) hinwies. Derselbe liess in Folge dessen die Liouville'sche Methode ganz fallen, und versuchte das von Poisson angegebene Verfahren zu einem vollgültigen Beweise auszugestalten, was indessen nicht in befriedigender Weise gelingen kann.

Nur in der kurzen Notiz von Sturm und Liouville (Journal T. II, p. 220) wird die in der obigen ersten Bedingung enthaltene Reihe ohne Beweis eingeführt, und die richtige Verwerthung später durch eine Bemerkung (p. 436) angedeutet.

wobei c einen Punkt im Innern des Intervalles von 0 bis X bedeuten soll. Ebenso wird nach Multiplication mit $\cos \lambda x$ die Gleichung erhalten:

$$(6)\qquad \frac{1}{\lambda}\cos\lambda x\,\frac{dU}{dx} + \sin\lambda x\, U = C' + \frac{1}{\lambda}\int_c^x k\,U\cos\lambda x\,dx,$$

wobei

$$C' = \frac{1}{\lambda}\cos\lambda c\left(\frac{dU}{dx}\right)_c + U_c\sin\lambda c.$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) folgt:

$$U = -C\cos\lambda x + C'\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\int_c^x k\,U\sin\lambda(x-x')\,dx',$$

$$\frac{dU}{dx} = \lambda\,(C\sin\lambda x + C'\cos\lambda x) + \int_c^x k\,U\cos\lambda(x-x')\,dx'.$$

Die Constanten C und C' sind von dem Parameter λ und der fest gewählten Grösse c abhängig. Setzt man

$$C = -A\cos\alpha,\qquad C' = A\sin\alpha,$$

so erhalten die vorstehenden Gleichungen die Form:

$$(7)\qquad U = A\cos(\lambda x-\alpha) + \frac{1}{\lambda}\int_c^x k\,U\sin\lambda\,(x-x')\,dx',$$

$$(8)\qquad \frac{dU}{dx} = -\lambda A\sin(\lambda x-\alpha) + \int_c^x k\,U\cos\lambda(x-x')\,dx',$$

wobei die von λ und c abhängigen Constanten A und α durch die Gleichungen bestimmt sind

$$U_c = A\cos(\lambda c-\alpha),\qquad \left(\frac{dU}{dx}\right)_c = -\lambda A\sin(\lambda c-\alpha).$$

Die Constante A ist nicht wesentlich; man kann dieselbe beliebig fixiren, da die Function U nur bis auf einen Factor bestimmt ist. Die Constante α ist willkürlich, wenn U ein allgemeines Integral der Differentialgleichung (4) ist, dagegen bestimmt, wenn U ein bestimmtes particuläres Integral sein soll. Aus der Gleichung (7) lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

Erstens: Bezeichnet man bei irgend einem bestimmten Werthe von λ den Maximalwerth des Betrages, welchen U im Intervall von c bis X annehmen kann, mit M, nennt man ferner K den grössten Betrag von k in demselben Intervall, wobei c zwar beliebig klein, aber von null verschieden fixirt sein muss, so ist

$$M \leqq [A] + \frac{1}{\lambda} KM(X - c) < [A] + \frac{1}{\lambda} KMX,$$

also

$$M < \frac{[A]}{1 - \frac{1}{\lambda} KX}.$$

Bei beliebig wachsenden Werthen von λ wird also der Maximalbetrag von U schliesslich nicht grösser als der Betrag von A; es bleibt daher in der Gleichung (7) das Integral auf der rechten Seite bei jedem Werthe von x, der grösser ist als null, endlich. *Demnach ist die Function U im Intervall von $c > 0$ bis X in der Form*

$$U = A \cos(\lambda x - \alpha) + \frac{1}{\lambda} \varphi_1(x, \lambda)$$

darstellbar, wobei $\varphi_1(x, \lambda)$ eine Function bedeutet, die bei allen Werthen von λ und bei allen Werthen von $x > 0$ endlich, d. h. kleiner bleibt als eine bestimmte endliche Grösse.

Betrachtet man *zweitens* das Integral

$$\int_c^X f(x)\, U dx =$$

$$= A \int_c^X f(x) \cos(\lambda x - \alpha) dx + \frac{1}{\lambda} \int_c^X f(x) dx \int_c^X k U \sin \lambda (x - x')\, dx',$$

so wird der letzte Theil auf der rechten Seite, indem man die Reihenfolge der Integrationen ändert,

$$\frac{1}{\lambda} \int_c^X k U dx' \int_{x'}^X f(x) \sin \lambda (x - x')\, dx.$$

Von der Function $f(x)$ setzen wir nun voraus, dass sie im Intervall von c bis X eine endliche und im allgemeinen stetige Function ist, die nur an einzelnen Stellen eine sprungweise Werthänderung erleidet, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, Voraussetzungen, welche man kurz die Dirichlet'schen Bedingungen zu nennen pflegt. Alsdann ist das Integral

$$\int_{x'}^X f(x) \sin \lambda (x - x')\, dx$$

eine Function von der Form $\frac{1}{\lambda} \psi$, wobei ψ bei allen Werthen von x' und noch so grossen Werthen von λ endlich bleibt. Folglich wird auch

$$\frac{1}{\lambda^2} \int_c^X k U \psi(x')\, dx'$$

von der Form $\frac{1}{\lambda^2}\varphi_2$, wobei φ_2 bei allen Werthen von λ endlich bleibt. *Mithin ist das Integral*

$$\int_0^X f(x)\, U dx$$

von der Form $A\int_c^X f(x)\cos(\lambda x - \alpha)\,dx + \frac{1}{\lambda^2}\varphi_2$, *wobei* φ_2 *bei allen Werthen von* λ *endlich bleibt, falls die Grösse c beliebig klein, jedoch von null verschieden gewählt ist.*

Drittens findet man aus der Differentialgleichung für zwei Functionen U und V, welche zu verschiedenen Parametern λ und μ gehören, die Relationen

$$\frac{d^2U}{dx^2} + (\lambda^2 - k)\, U = 0, \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + (\mu^2 - k)\, V = 0,$$

also

$$U\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2U}{dx^2} = (\lambda^2 - \mu^2)\, U V,$$

folglich:

$$(9) \qquad (\lambda^2 - \mu^2)\int_0^X U V dx = \left[U\frac{dV}{dx} - V\frac{dU}{dx}\right]_0^X.$$

Wenn also die rechte Seite für $x = 0$ verschwindet, und wenn für $x = X$ die Gleichungen erfüllt sind

$$\frac{dU}{dx} + h\, U = 0, \qquad \frac{dV}{dx} + h\, V = 0,$$

so ist $U\frac{dV}{dx} - V\frac{dU}{dx} = 0$ auch für $x = X$ und also

$$\int_0^X U V dx = 0.$$

Um dasselbe Integral zu berechnen, wenn $U = V$ ist, bilde man die Gleichungen

$$\frac{d^2U}{dx^2} + (\lambda^2 - k)\, U = 0, \qquad \frac{d^2\frac{dU}{d\lambda}}{dx^2} + (\lambda^2 - k)\frac{dU}{d\lambda} + 2\lambda\, U = 0.$$

Eliminirt man die Glieder, welche mit $\lambda^2 - k$ multiplicirt sind, so wird

$$U\frac{d^2\frac{dU}{d\lambda}}{dx^2} - \frac{dU}{d\lambda}\,\frac{d^2U}{dx^2} + 2\lambda\, U^2 = 0$$

oder

$$(10) \qquad 2\lambda\int_0^X U^2 dx = \left[\frac{dU}{d\lambda}\,\frac{dU}{dx} - U\frac{d^2U}{d\lambda\, dx}\right]_0^X.$$

Wenn nun die rechte Seite für $x = 0$ verschwindet (und diese Forderung ist hier bei den oben definirten speciellen Functionen erfüllt für $n \geqq 0$), so ist der Ausdruck für $x = X$ allein zu berechnen. Setzt man aber

$$U = A\cos(\lambda x - \alpha) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_c^x k\,U \sin\lambda(x - x')\,dx',$$

$$\frac{dU}{dx} = -\lambda A \sin(\lambda x - \alpha) + \int\limits_c^x k\,U\cos\lambda(x - u')\,dx',$$

$$\frac{dU}{d\lambda} = -xA\sin(\lambda x - \alpha) - \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_c^x k\,U\sin\lambda(x - x')\,dx'$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int\limits_c^x k\,\frac{dU}{d\lambda}\sin\lambda(x - x')\,dx' + \frac{1}{\lambda}\int\limits_c^x k\,U(x - x')\cos\lambda(x - x')\,dx',$$

$$\frac{d^2U}{d\lambda\,dx} = -A\sin(\lambda x - \alpha) - \lambda x A\cos(\lambda x - \alpha)$$

$$+\int\limits_c^x k\,\frac{dU}{d\lambda}\cos\lambda(x - x')\,dx' - \int\limits_0^x k\,U(x - x')\sin\lambda(x - x')\,dx',$$

so erkennt man: *Das Integral*

$$\int\limits_0^X U^2 dx = \frac{1}{2}A^2 X + \frac{1}{\lambda}\varphi_3,$$

wobei φ_3 bei allen Werthen von λ endlich bleibt.

Mithin bekommt jedes Glied der Reihe (3), wenn man dem Integrale im Zähler daselbst die untere Grenze c statt 0 giebt, die Form

$$\frac{\left(A\cos(\lambda x - \alpha) + \frac{1}{\lambda}\varphi_1\right)\left(A\int\limits_c^X f(x')\cos(\lambda x' - \alpha)\,dx' - \frac{1}{\lambda^2}\varphi_2\right)}{\left(\frac{1}{2}A^2X + \frac{1}{\lambda}\varphi_3\right)},$$

wobei φ_1, φ_2, φ_3 Functionen sind, welche bei allen Werthen von x im Intervall von c bis X bei allen Werthen von λ endlich bleiben. Sondert man das Glied

$$\frac{2}{X}\cos(\lambda x - \alpha)\int\limits_c^X f(x')\cos(\lambda x' - \alpha)\,dx'$$

ab, so sind die nachbleibenden Glieder im Zähler von der Form

$$\frac{1}{\lambda^2} A\varphi_2 \cos(\lambda x - \alpha) + \frac{1}{\lambda^2}\varphi_1\varphi_2$$

$$+\frac{1}{\lambda}\Big(A\varphi_1 - \frac{2}{X}\varphi_3\Big)\int_c^X f(x')\cos(\lambda x' - \alpha)\,dx'$$

und da dieses letzte Integral selbst von der Form ist $\frac{1}{\lambda}\psi$, so haben alle diese Glieder zum mindesten den Factor $\frac{1}{\lambda^2}$. Sie liefern daher, zufolge der Beschaffenheit der Wurzeln λ, die gleich näher erwähnt werden soll, unendliche Reihen, welche unbedingt und gleichmässig convergiren. Denn eine Reihe von der Form

$$\frac{a_1}{\lambda_1^2} + \frac{a_2}{\lambda_2^2} + \frac{a_3}{\lambda_3^2} + \cdots + \frac{a_k}{\lambda_k^2} + \cdots$$

convergirt unbedingt, wenn die Zähler a_k durchaus endlich bleiben, und die Reihe der Zahlen λ derart zunimmt, dass die Differenz $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ bei noch so grossen Werthen von k nicht null wird, sondern grösser bleibt als eine bestimmte endliche Zahl e, so dass

$$\lambda_{k+m} > \lambda_k + me$$

wird.

II.

Es ist noch zu zeigen, dass auch die unendliche Reihe

$$(11)\qquad \frac{2}{X}\sum_{\lambda}\cos(\lambda x - \alpha)\int_c^X f(x')\cos(\lambda x' - \alpha)\,dx'$$

im Allgemeinen gleichmässig convergirt. Dazu ist es nothwendig, die Abhängigkeit festzustellen, in welcher α von λ steht, sobald U ein bestimmtes particuläres Integral der Differentialgleichung ist, sowie die Beschaffenheit der Wurzeln λ zu untersuchen. Dabei berücksichtige ich nur die besondere Differentialgleichung (2), in welcher k den Werth $\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^2}$ hat.

Aus der Theorie der Bessel'schen Functionen $J^{(n)}_{(x)}$, insbesondere aus der semiconvergenten Entwickelung derselben*) ist bekannt, dass die Function

*) In allgemeinster Form sind dieselben bewiesen worden von Hankel, Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Math. Annal. Bd. 1; Hansen, Schlömilch und Lipschitz haben die Entwickelung bei reellen Werthen des Argumentes behandelt.

(12) $$U^{(n)}_{(\lambda x)} = \sqrt{\frac{\lambda x}{2}}\, J^n(\lambda x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\lambda x - \frac{1}{2}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \sum (-1)^p \frac{(n, 2p)}{(2\lambda x)^{2p}}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\lambda x - \frac{1}{2}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \sum (-1)^p \frac{(n, 2p+1)}{(2\lambda x)^{2p+1}}$$

wird, so dass für alle Werthe von $x > 0$ der asymptotische Werth von $U^{(n)}_{(\lambda x)}$ gleich ist

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\lambda x - \frac{1}{2}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]$$

und dass überhaupt bei jedem Werthe von $x > 0$ und jedem Werthe von λ

(13) $$U^{(n)}_{(\lambda x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\lambda x - \frac{1}{2}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{\lambda}\psi(\lambda, x),$$

wobei wiederum ψ eine Function bedeutet, die stets endlich ist. Zugleich erkennt man aus dieser Gleichung, dass die Function $U^{(n)}$ bei allen positiven reellen Werthen des Argumentes endlich bleibt; denn setzt man $\lambda x = z$, so ist die Function bei allen endlichen Werthen von z von null an endlich, und für $z = \infty$ nicht grösser als $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Vergleicht man diesen Werth mit dem in der Gleichung (7) enthaltenen, so wird, $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ unterscheiden sich von $\cos\frac{1}{2}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$ und $\sin\frac{1}{2}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$ nur um Grössen, welche wiederum den Werth λ im Nenner enthalten, während der Zähler endlich bleibt. Bezeichnet man die Constante $\frac{1}{2}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$ der Kürze wegen mit β, so kann an Stelle der Reihe (11) die einfachere treten:

(14) $$\frac{2}{X} \sum_\lambda \cos(\lambda x - \beta) \int_0^X f(x') \cos(\lambda x' - \beta)\, dx',$$

denn die Differenz zwischen den Reihen (11) und (14) ist eine Reihe, von der ohne weiteres deutlich ist, dass sie unbedingt und gleichmässig convergirt.

Die Gleichung $\left(\frac{dU}{dx}\right) + hU = 0$ für $x = X$, welche zur Berechnung der Wurzeln λ dient, erhält die Form:

$$-\lambda \sin(\lambda X - \beta) + h \cos(\lambda X - \beta) + P = 0$$

wobei P eine Grösse bezeichnet, die bei allen Werthen von λ endlich bleibt. Mithin ist

$$\operatorname{tang}(\lambda X - \beta) = \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} Q,$$

wobei auch Q durchaus endlich bleibt; und folglich ist in erster Annäherung

$$\lambda X - \beta = k\pi, \quad \text{d. h.} \quad \lambda = \frac{k\pi}{X} + \frac{\beta}{X}$$

oder genauer ausgedrückt:

$$\lambda = \frac{k\pi}{X} + \frac{\beta}{X} + \frac{R}{\lambda},$$

wobei R eine Grösse ist, die durchaus endlich bleibt. Folglich wird

$$\cos(\lambda x - \beta) =$$
$$= \cos\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x-X)}{X}\right)\cos\frac{Rx}{\lambda} - \sin\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x-X)}{X}\right)\sin\frac{Rx}{\lambda}$$

und dieser Ausdruck ist von der Form

$$\cos\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x-X)}{X}\right) + \frac{1}{\lambda}\psi,$$

wobei ψ durchaus endlich bleibt. Mithin genügt es an Stelle der Reihe (14) die Reihe zu betrachten:

$$(15) \qquad \frac{2}{X}\sum \cos\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x-X)}{X}\right)\int_c^X f(x')\cos(\lambda x' - \beta)\,dx',$$

weil die ausgeschiedenen Theile wiederum den Factor λ^2 im Nenner enthalten. Ersetzt man noch schliesslich

$$\cos(\lambda x' - \beta) =$$
$$= \cos\left(\frac{k\pi x'}{X} + \frac{\beta(x'-X)}{X}\right) - \sin\left(\frac{k\pi x'}{X} + \frac{\beta(x'-X)}{X}\right)\frac{Rx'}{\lambda} + \frac{X}{\lambda^2},$$

so sieht man, dass man auch unter dem Integral nur das erste dieser Glieder einzusetzen braucht, weil das mit $\frac{Rx'}{\lambda}$ multiplicirte Integral

$$\int_c^X f(x')\sin\left(\frac{k\pi x'}{X} + \frac{\beta(x'-X)}{X}\right)dx'$$

einen Werth hat, der im Zähler endlich bleibt und im Nenner k enthält. Sonach tritt an Stelle der Reihe (15) die Reihe

$$(16) \quad \frac{2}{X}\sum_{k=0}^{k=\infty}\cos\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x-X)}{X}\right)\int_c^X f(x')\cos\left(\frac{k\pi x'}{X} + \frac{\beta(x'-X)}{X}\right)dx',$$

in welcher k alle ganzen Zahlen durchläuft.

Setzt man, um die Nenner zu beseitigen,

$$\frac{\pi x}{X} = z, \quad \frac{\pi x'}{X} = z', \quad \frac{\pi c}{X} = c', \quad \frac{\beta}{\pi} = \beta' = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$f(x') = f\left(\frac{X}{\pi}z'\right) = \varphi(z'),$$

so hat man die einfachere Form:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{k=\infty}\Big(\cos kz+\beta'(z-\pi)\Big)\int_{c'}^{\pi}\varphi(z')\cos\Big(kz'+\beta'(z'-\pi)\Big)\,dz'.$$

Auch diese Reihe unterscheidet sich noch von der gewöhnlichen Fourier'schen Reihe, von welcher bekannt ist, dass sie gleichmässig convergirt, solange $\varphi(z')$ eine stetige Function ist, und dass sie gliedweise integrirt werden darf, auch wenn $\varphi(z')$ an einzelnen Stellen eine sprungweise Werthänderung erleidet. Aber die Reihe hat doch schon die Eigenschaft mit der Fourier'schen gemein, dass sie die ganzzahligen Vielfachen der Variabelen enthält; sie lässt sich überdies in einfache Bestandtheile der gewünschten Art zerlegen. Denn sie ist gleich

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\varphi(z')\cos\Big(k(z+z')+\beta'(z+z'-2\pi)\Big)\,dz'$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\varphi(z')\cos\Big(k(z-z')+\beta'(z-z')\Big)\,dz'=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\cos\beta'(z+z'-2\pi)\,\varphi(z')\,dz'\sum^{k}\cos k(z+z')$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\sin\beta'(z+z'-2\pi)\,\varphi(z')\,dz'\sum^{k}\sin k(z+z')$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\cos\beta'(z-z')\,\varphi(z')\,dz'\sum^{k}\cos k(z-z')$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\sin\beta'(z-z')\,\varphi(z')\,dz'\sum^{k}\sin k(z-z').$$

Summirt man in bekannter Weise die Sinus- und Cosinus-Summen, so folgt

$$\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\cos\beta'(z+z'-2\pi)\,\varphi(z')\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(z+z')}{2\sin\frac{z+z'}{2}}\right\}dz'$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\sin\beta'(z+z'-2\pi)\,\varphi(z')\left\{\frac{\cos\frac{z+z'}{2}}{2\sin\frac{z+z'}{2}}-\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)(z+z')}{2\sin\frac{z+z'}{2}}\right\}dz'$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\cos\beta'(z-z')\varphi(z')\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(z-z')}{2\sin\frac{z-z'}{2}}\right\}dz'$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\sin\beta'(z-z')\,\varphi(z')\left\{\frac{\cos\frac{z-z'}{2}}{2\sin\frac{z-z'}{2}}-\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)(z-z')}{2\sin\frac{z-z'}{2}}\right\}dz'.$$

Nur die Integrale, welche von dem variabelen Parameter k abhängig sind, kommen für den geforderten Nachweis in Betracht. Unter diesen sind diejenigen, welche im Nenner die Function $\sin\frac{z+z'}{2}$ enthalten, so geartet, dass dieser Nenner nicht null wird, solange z grösser als 0 und kleiner als π ist. Der Werth dieser Integrale ist demnach (wie aus dem zweiten Mittelwerthsatze zu erkennen ist) gleich $\frac{1}{k}$ multiplicirt mit einer bei allen Werthen von z endlich bleibenden Grösse*) und convergirt also gleichmässig (unabhängig vom Werthe z) nach null, wenn k unendlich wird.

Das dritte Integral, nämlich

$$\frac{1}{\pi}\int_{c'}^{\pi}\cos\beta'(z-z')\,\varphi(z')\,\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(z-z')}{2\sin\frac{z-z'}{2}}\,dz$$

ist das gewöhnliche Dirichlet'sche, welches für $0<z<\pi$ gleichmässig nach dem Werthe

$$\varphi(z)=f(x)$$

convergirt, so lange die Function $f(x)$ stetig ist, welches also zu einer gleichmässig convergenten Fourier'schen Reihe führt, nach Ausschluss aller der Stellen, an denen $f(x)$ eine sprungweise Aenderung erfährt. Diese Fourier'sche Reihe kann aber auch mit Einschluss dieser Stellen gliedweise integrirt werden, selbst dann noch, wenn sie zuvor mit einer Function multiplicirt ist, welche nicht unendlich wird, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Denn die durch

---

*) Ein Integral von der Form

$$\int f(z,z')\sin kz'\,dz' \quad \text{oder} \quad \int f(z,z')\cos kz'\,dz',$$

in welchem f eine Function der beiden Grössen z und z' bedeutet, die innerhalb des Integrationsintervalles durchaus endlich, kleiner als G bleibt und die immer nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima besitzt, während z' das Integrationsintervall durchläuft, ist durch eine endliche Anzahl von Integralen darstellbar, von denen jedes kleiner ist als $\frac{2}{k}G$.

gliedweise Integration bis in beliebige Nähe einer Unstetigkeitsstelle gewonnene Reihe bleibt unbedingt convergent, auch wenn die Integration bis in die Unstetigkeitsstelle ausgeführt wird.

Im vierten Integral

$$\int_{\delta}^{\pi} \sin \beta' (z - z')\, \varphi(z')\, \frac{\cos\left(k + \frac{1}{2}\right)(z - z')}{2 \sin \frac{z - z'}{2}}\, dz'$$

wird der mit dem Cosinus multiplicirte Ausdruck für keinen Werth von z' unendlich, so dass das Integral ebenso wie die ersten beiden mit $\frac{1}{k}$ null wird. Sonach ist bewiesen:

Bedeutet x einen Werth, der zwischen 0 und X liegt, so convergirt die Reihe

$$\sum_{\lambda} U(\lambda x) \frac{\int_c^X U(\lambda x') f(x')\, dx'}{\int_0^X (U(\lambda x'))^2 dx'} = \sum \alpha_\lambda U(\lambda x)$$

im allgemeinen gleichmässig, so dass ihr Integral in diesem Intervall durch gliedweise Integration erhalten wird, auch wenn man die Reihe zuvor mit einer Function multiplicirt hat, die nicht unendlich wird, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt.

Nennt man den Werth der Reihe $\varphi(x)$, so ist, wenn δ und ε beliebig kleine Grössen und μ irgend einen Werth unter den Wurzeln λ bezeichnet,

$$\int_{\delta}^{X-\varepsilon} \varphi(x)\, U(\mu x)\, dx = \sum_{\lambda} a_\lambda \int_{\delta}^{X-\varepsilon} U(\lambda x)\, U(\mu x)\, dx.$$

Nach Gleichung (9) ist diese Reihe gleich

$$a_\mu \int_{\delta}^{X-\varepsilon} (U(\mu x))^2\, dx + \sum_{\lambda} \frac{a_\lambda}{\lambda^2 - \mu^2} \left[U(\lambda x) \frac{dU(\mu x)}{dx} - U(\mu x) \frac{dU(\lambda x)}{dx} \right]_{\delta}^{X-\varepsilon},$$

wobei in der Reihe das eine Glied, für welches $\lambda = \mu$ ist, ausfällt. Diese Reihe ist aber gleichmässig convergent, weil α_λ von der Form $\frac{1}{\lambda}$ multiplicirt mit einer endlich bleibenden Grösse ist, und weil $U(\lambda x)$ durchaus endlich bleibt, $\frac{dU(\lambda x)}{dx}$ aber gleich dem Product von λ mit einer durchaus endlich bleibenden Grösse ist. Demnach kann man ε und δ nach Null convergiren lassen, und diesen Grenzprocess gliedweise ausführen; alsdann bekommt die Klammer in allen Gliedern den Werth null, und folglich ist

$$\int_0^X \varphi(x)\, U(\mu x)\, dx = a_\mu \int_0^X \big(U(\mu x)\big)^2 dx = \int_c^X U(\mu x)\, f(x)\, dx.$$

Nach den in der Einleitung besprochenen Sätzen folgt hieraus, dass die Function $\varphi(x)$ im Innern des Intervalles von c bis X im Allgemeinen gleich $f(x)$ ist, solange nämlich als $f(x)$ stetig bleibt, dagegen im Innern des Intervalles von 0 bis c überall gleich null.

Auch kann man weiter beweisen, dass die Function $\varphi(x)$ an den Sprungstellen von $f(x)$ im Innern des Intervalles von c bis X den Werth $\frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big)$ hat; denn sie verhält sich, wie gezeigt, bis auf Reihen, die gleichmässig convergiren und daher stetig sind, wie eine gewöhnliche Fourier'sche Reihe.

III.

Das anfänglich gestellte Problem ist durch diese Betrachtungen noch nicht vollständig erledigt; denn in der nunmehr bewiesenen Formel

$$f(x) = \sum U(\lambda x) \frac{\int_c^X f(x)\, U(\lambda x)\, dx}{\int_0^X (U(\lambda x))^2 dx} \quad \text{für} \quad c < x < X$$

ist vorausgesetzt, dass c von null verschieden ist; es muss gezeigt werden, dass man für c auch den Werth null einsetzen kann, so dass für alle Werthe $0 < x < X$ die Darstellung von $f(x)$ möglich wird. Zu dem Zwecke genügt es nachzuweisen, dass

$$\sum U(\lambda x) \frac{\int_0^\delta f(x')\, U(\lambda x')\, dx'}{\int_0^X (U(\lambda x))^2 dx} = \lim_{\lambda_m = \infty} \int_0^\delta f(x')\, dx' \sum^{\lambda_m} \frac{U(\lambda x)\, U(\lambda x')}{\int_0^X (U(\lambda x))^2 dx}$$

convergent ist, und mit δ beliebig klein gemacht werden kann, dass also die Summe

$$\sum^{\lambda} \frac{U(\lambda x)\, U(\lambda x')}{\int_0^X (U(\lambda x))^2 dx}$$

bei noch so grosser Anzahl der Glieder endlich bleibt, wenn x' ein Intervall von null an durchläuft, das den Werth x nicht enthält. Von der Function $f(x)$ nehmen wir dabei an, dass sie, auch wenn sie für

$x = 0$ unendlich wird, doch absolut integrirbar bleibt. Hierbei aber wird es nothwendig, den Residuensatz von Cauchy anzuwenden*).

Dem Werth

$$\frac{\dfrac{U(\lambda x)\, U(\lambda x')}{x}}{\int\limits_0^x (U(\lambda x))^2\, dx}$$

lässt sich folgende Form geben. Da in der Function $U(\lambda x)$ die Variabeln λ und x vertauscht werden können, so ist

$$\frac{d^2 U(\lambda x)}{d\lambda^2} + \left(x^2 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^2}\right) U(\lambda x) = 0,$$

$$\frac{d^2 U(\lambda x')}{d\lambda^2} + \left(x'^2 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^2}\right) U(\lambda x') = 0,$$

---

*) Einzig und allein auf Grund dieses Satzes, also in möglichst directer Weise, die aber auch eine lange Reihe von Untersuchungen erfordert, ist der Beweis von der Gültigkeit der Entwickelung nach Cylinderfunctionen von Herrn Dini erbracht worden (Serie di Fourier e altre rappresentazione analytiche delle funzioni di una variabile reale. Pisa 1880, pag. 231—269) und dieser Beweis dürfte wohl der erste vollständige sein, der überhaupt durchgeführt worden ist. Denn die aus dem Nachlasse von Hankel (Math. Annalen Bd. 8) veröffentlichten Untersuchungen, die sich im wesentlichen gleichfalls auf den Residuensatz stützen, sind noch nicht in allen Punkten klar gelegt und beziehen sich nur auf den Fall $h = \infty$. Der Dini'sche Beweis, den schon früher Herr Schläfli in einer kurzen Note (Math. Ann. Bd. 10) für den Fall $h = \infty$ angedeutet hatte, ist auch von Herrn C. Jordan in etwas anderer Form reproducirt worden (Cours d'Analyse; t. 3, Paris 1887, pag. 445—463).

Cauchy selbst hat mittelst seines Residuensatzes die Entwickelung nach Cylinderfunctionen meines Wissens nicht behandelt; wohl aber hat er einen gültigen Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe, die bei ihm als ein specieller Fall allgemeinerer Reihen erscheint, erbracht und zwar in der Abhandlung: „Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies" (Exercices de mathématiques, T. II, 1827). Nicht nur Dirichlet in seiner grundlegenden Arbeit über die Fourier'sche Reihe, sondern viel später noch Bonnet und Riemann, sowie andere geschichtliche Darstellungen erwähnen immer nur den verfehlten Beweis, welchen Cauchy in seiner Abhandlung der Pariser Akademie (Tome VI) im Jahre 1826 vorlegte, während die andere Abhandlung (zwei Jahre älter als die Dirichlet'sche) einen Beweis enthält, der vollständig und genau ist, sobald man nur die Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Function $f(x)$ betont, unter welchen gewisse Umformungen bestimmter Integrale, die bei Cauchy vorkommen, allein und überdies in etwas anderer Form, als es dort geschehen ist, zulässig werden. Diese Voraussetzungen sind aber die bekannten, von Dirichlet angegebenen, dessen Verdienst um die Theorie der Fourier'schen Reihe durch diese historische Thatsache nicht geschmälert wird, da erst durch seine Untersuchungen die Theorie in Zusammenhang gebracht wurde mit allgemeinen ganz neuen Bedingungen für die Convergenz bestimmter Integrale und unendlicher Reihen.

also

$$U(\lambda x')\frac{d^2U(\lambda x)}{d\lambda^2} - U(\lambda x)\frac{d^2U(\lambda x')}{d\lambda^2} = (x'^2 - x^2)\,U(\lambda x)\,U(\lambda x')$$

oder

(17) $$U(\lambda x)\,U(\lambda x') = \frac{1}{x'^2 - x^2}\,\varphi'(\lambda),$$

wenn $\varphi(\lambda) = U(\lambda x')\frac{dU(\lambda x)}{d\lambda} - U(\lambda x)\frac{dU(\lambda x')}{d\lambda}$ gesetzt wird. Sodann ist (Gleich. 10)

$$2\lambda\int\limits_0^X U^2 dx = \left[\frac{dU}{d\lambda}\frac{dU}{dx} - U\frac{d^2U}{d\lambda\,dx}\right]_0^X = -U\left[h\frac{dU}{d\lambda} + \frac{d^2U}{d\lambda\,dx}\right]_0^X.$$

Setzt man

$$\frac{dU}{dx} + hU = \varpi(\lambda, x), \quad \text{wobei} \quad \varpi(\lambda, X) = 0,$$

so ist der obige Ausdruck gleich $-U\varpi'(\lambda)$ für $x = X$. Aber auch die Grösse $U(\lambda x)$ kann durch $\varpi'(\lambda)$ ausgedrückt werden: denn es ist

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\lambda}{x}\frac{dU}{d\lambda} \quad \text{also} \quad \varpi(\lambda) = \frac{\lambda}{x}\frac{dU}{d\lambda} + hU,$$

(18) $$\varpi'(\lambda) = \frac{1}{x}\frac{dU}{d\lambda} + \frac{\lambda}{x}\frac{d^2U}{d\lambda^2} + h\frac{dU}{d\lambda} = \left(\frac{1}{x} + h\right)\frac{dU}{d\lambda} - \left(\lambda x - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\lambda x}\right)U$$

und für $x = X$ ist dieses gleich

$$\varpi'(\lambda) = -U\left[\frac{h}{\lambda}X\left(\frac{1}{X} + h\right) + \lambda X - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\lambda X}\right],$$

also

(19) $$\int\limits_0^X U^2 dx = \frac{(\varpi'(\lambda))^2}{2\left[hX\left(\frac{1}{X} + h\right) + \lambda^2 X - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{X}\right]} = \frac{\varpi'^2 X}{2\psi(\lambda)}$$

wobei

(20) $$\psi(\lambda) = hX(1 + hX) + \lambda^2 X^2 - \left(n^2 - \tfrac{1}{4}\right).$$

Folglich wird

$$\sum_\lambda \frac{U(\lambda x)\,U(\lambda x')}{\int\limits_0^X (U(\lambda x))^2 dx} = \frac{2}{(x'^2 - x^2)X}\sum_\lambda \frac{\psi(\lambda)\,\varphi'(\lambda)}{(\varpi'(\lambda))^2}.$$

Der unter der Summe stehende Ausdruck ist das Residuum von

$$\frac{\psi(z)\,\varphi(z)}{(\varpi(z))^2},$$

denn das Residuum eines Quotienten $\frac{f(z)}{(\varpi(z))^2}$, in welchem der Zähler durchaus endlich bleibt, hat für die verschiedenen Wurzeln $z = \lambda$, für welche $\varpi(z) = 0$ ist, den Werth

$$\frac{f'(\lambda)}{(\varpi'(\lambda))^2} - \frac{f(\lambda)\,\varpi''(\lambda)}{(\varpi'(\lambda))^3}.$$

Nun ist $f'(\lambda) = \psi(\lambda)\,\varphi'(\lambda) + \psi'(\lambda)\,\varphi(\lambda)$, aber es wird hier

$$\psi'(\lambda)\,\varpi'(\lambda) - \psi(\lambda)\,\varpi''(\lambda) = 0.$$

Denn es ist (Gleich. 18) für jeden Werth von x:

$$\varpi'(\lambda) = \left(\frac{1}{x} + h\right)\frac{dU}{d\lambda} - \left(\lambda x - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\lambda x}\right)U = -\psi(\lambda)\,U\frac{1}{x\lambda} + \frac{x}{\lambda}\left(\frac{1}{x} + h\right)\varpi(\lambda),$$

also für $x = X$, wobei $\varpi(\lambda) = 0$ wird,

$$\varpi''(\lambda) = -\psi(\lambda)\frac{dU}{d\lambda}\frac{1}{X\lambda} - \psi'(\lambda)\,U\frac{1}{X\lambda} + \psi(\lambda)\,U\frac{1}{X\lambda^2} + \frac{X}{\lambda}\left(\frac{1}{X} + h\right)\varpi'(\lambda)$$

und folglich

$$\frac{\varpi''(\lambda)}{\varpi'(\lambda)} = -\frac{1}{U}\frac{dU}{d\lambda} + \frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} + \frac{X}{\lambda}\left(\frac{1}{X} + h\right) = \frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)},$$

weil

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{d\lambda} + \frac{X}{\lambda}h = 0.$$

Demnach ist die Reihe

$$\sum_{\lambda} \frac{U(\lambda x)\,U(\lambda x')}{\int\limits_0^X (U(\lambda x))^2 dx}$$

gleich dem Werthe, nach welchem das complexe Integral

$$\frac{2}{(x'^2 - x^2)X}\int \frac{\psi(z)\,\varphi(z)}{(\varpi(z))^2}\,dz$$

convergirt, wobei

$$\varphi(z) = U(zx')\frac{dU(zx)}{dx} - U(zx)\frac{dU(zx')}{dx},$$

$$\psi(z) = hX(1 + hX) + z^2X^2 - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right),$$

wenn dasselbe über den Rand eines Rechteckes erstreckt wird, welches die reelle positive Axe in seinem Innern enthält, also etwa die Eckpunkte $x = 0$, $y = \pm ik$; $x = l$, $y = \pm ik$ *besitzt, und wenn man dieses*

Rechteck schliesslich in die Halbebene übergehen lässt, indem h und k unendlich werden).*

Es ist also zu zeigen, dass der Betrag dieses Integrales endlich bleibt, wie gross auch immer die Werthe von h und k angenommen werden. Da in dem Integrale der Zähler eine ungerade Function wird, so kommt der Integrationsweg auf der Ordinatenaxe nicht in Betracht.

Nun ist (Gleich. 12)

$$U^n(zx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(zx-\beta)(1+A) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(zx-\beta)B,$$

wobei die Grössen A und B bezüglich von der zweiten und von der ersten Ordnung Null werden für $z=\infty$. Hieraus folgt:

$$\frac{dU^n(zx)}{dx} = -\frac{z}{\sqrt{\pi}}\sin(zx-\beta)(1+C) + \frac{z}{\sqrt{\pi}}\cos(zx-\beta)D,$$

wobei C und D von der zweiten und ersten Ordnung null werden für $z=\infty$. Demnach wird

$$\omega(z) = \frac{dU}{dx} + hU = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(zX-\beta)(h+hA+zD)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(zX-\beta)(hB-z-zC).$$

Betrachtet man nun das Integral auf den zur Abscissenaxe parallelen Seiten, für welche $z=\xi\pm ik$, so ist der Modul von $\omega(z)$ gleich dem Werthe

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{kX}\,\text{mod.}\,z\cdot g,$$

wobei g eine endliche Grösse bezeichnet, die auch bei beliebig grossen Werthen von z weder null noch unendlich wird. Dagegen ist im Zähler des Integrales der Modul von

$$\varphi(z) = U(zx')\frac{dU(zx)}{dx} - U(zx)\frac{dU(zx')}{dx}$$

gleich $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{k(x+x')}\,\text{mod.}\,(z)\cdot g_2$, wobei g_2 durchaus endlich bleibt. Ferner ist der Modul von $\psi(z)$ proportional dem Modul von z^2. Hieraus folgt, dass der Modul des unter dem Integrale stehenden Quotienten pro-

*) Von einem Integrale dieser Form geht auch Herr Dini bei seinen Untersuchungen aus (a. a. O. pag. 250), nur dass dort die Function $P^n(\lambda x)$ zu Grunde gelegt ist, welche mit U durch die Gleichung zusammenhängt

$$P^n(\lambda x) = \frac{2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)}{(\lambda x)^{n+\frac{1}{2}}}U^n(\lambda x).$$

portional $e^{-k(2X-(x+x'))}$ ist. Lässt man also k unendlich werden, während l endlich bleibt, so wird dieser Ausdruck null.

Für die zur Ordinatenaxe parallele Seite $z = l + i\eta$ (und analog für $z = l - i\eta$) wähle man den Werth l so, dass $lX - \beta$ stets gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ wird, also

$$\sin(zX - \beta) = \pm \cos i\eta X, \qquad \cos(zX - \beta) = \pm \sin i\eta X.$$

Alsdann wird der Modul von $\omega(z)$ bei allen positiven Werthen von η gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\eta X} \operatorname{mod.}(z) \cdot g,$$

wobei die Grösse g endlich bleibt und nicht null wird, auch für $\eta = \infty$. Die Grösse g bleibt endlich, auch wenn l unendlich wird, sie convergirt nach dem Werthe $\frac{1}{2}$. Da nun wiederum der Modul von $\varphi(z)$ gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\eta(x-x')} \operatorname{mod.}(z) \cdot g_2$$

und der Modul von $\psi(z)$ proportional dem Modul von z^2 ist, so ist der Modul des Integrales zwischen den Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = +i\infty$ eine durchaus endliche Grösse; dasselbe gilt auch von dem Integrale zwischen den Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = -i\infty$, und bleibt in beiden Fällen bestehen, auch wenn l unendlich wird.

Damit ist die Reihendarstellung in vollem Umfange bewiesen.

Bezeichnet $f(x)$ eine Function, die bis auf einzelne Sprungstellen im Intervall von 0 bis X durchaus stetig ist, die, wenn sie an der Grenze null unendlich wird, doch absolut integrirbar bleibt, und welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so ist für $n \geq 0$

$$f(x) = \sum_\lambda U^{(n)}(\lambda x) \frac{\int_0^X f(x) U^{(n)}(\lambda x)\, dx}{\int_0^X (U^n(\lambda x))^2\, dx},$$

also auch

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \sum_\lambda J^n(\lambda x) \frac{\int_0^X \sqrt{x} f(x) J^n(\lambda x)\, dx}{\int_0^X (J^n(\lambda x))^2 x\, dx}.$$

Setzt man $f(x) = \sqrt{x}\, F(x)$, so ist auch

$$F(x) = \sum_{\lambda} J^n(\lambda x) \frac{\int_0^X x F(x) J^n(\lambda x)\, dx}{\int_0^X (J^n(\lambda x))^2 x\, dx}.$$

An Stelle der Dirichlet'schen Bedingung für die Function $f(x)$ können auch andere treten, so z. B. dass die Function $f(x)$ einen überall endlichen integrirbaren Differentialquotienten besitzt. Auch kann man in analoger Weise die Entwickelung nach Functionen mit negativem Index n in Betracht ziehen.

Die irreducibeln Syzyganten einer binären Form 6. Ordnung, die in den Coefficienten höher als vom 9. Grade sind.

Von

Frhr. v. Gall in Darmstadt.

§ 1.
Einleitung.

Im 7. Bande des American Journals hat Hammond die irreducibeln oder Grundsyzyganten der binären Form a_x^6 bis zum 9. Grade in den Coefficienten einschliesslich veröffentlicht. Dagegen gab Stephanos im 96. Bande der Comptes Rendus an, wie man mit Hülfe allgemein bekannter Sätze über formes gauches eine unbegrenzte Anzahl relativ einfacher Syzyganten erhalten kann, sobald man nur einmal die 1. und 2. Ueberschiebungen ihrer geraden Formen durch die Grundformen ausgedrückt hat. Er fügte in einer Fortsetzung seiner Arbeit eine vollständige Liste dieser allerdings schon grösstentheils bekannten Zerlegungen bei und zeigte an 15 Beispielen, wie man mittelst jener einfachen Sätze (Vergl. Gordan's Vorlesungen § 4) auch schwierigere Grundsyzyganten — freilich neben zahlreichen zusammengesetzten — erhalten kann. Durch kleine Erweiterungen seiner Methoden, directen Fortschritt von niederen zu höheren Relationen, namentlich aber durch Benützung des *Aronhold'schen Processes*

$$\delta f = p \quad \text{(Vergl. Gordan's Vorl. § 5)}$$

gelang es mir aus der grossen Zahl der auftretenden Beziehungen die irreducibeln herauszuschälen. Meiner Aufstellung füge ich in der Regel nur dann eine Andeutung über das zum Ziele führende Verfahren bei, wenn es wesentlich von den Stephanos'schen Principien abweicht. Auch lasse ich die Angabe der mittelst des Aronhold'schen Processes durchgeführten Controllrechnungen aus. Das Resultat meiner Rechnung ergab, dass die von Sylvester im 4. Bande des American Journ. durch tamisage erhaltende Tabelle mehrfach kleiner Correcturen bedarf, wie schon Hammond gegen Sylvester die Existenz einer (9, 6) gezeigt hatte.

Ich schliesse mich der von Stephanos getroffenen Wahl und Bezeichnung der Grundformen an. Für die Functionaldeterminanten, die derselbe nicht näher benannt hat, wähle ich die hergebrachte Bezeichnung. Das System der Grundformen ist alsdann:

$$f = a_x^6,$$

$$\begin{array}{llll}
A = (ab)^6, & i_x^4 = (ab)^4, & \mathsf{H}_x^8 = (ab)^2, & \\
l_x^2 = (fi)^4, & p_x^6 = (fi)^2, & \Theta_x^8 = (fi)^1, & T_x^{12} = (f\mathsf{H})^1, \\
B = (ii)^4, & \Delta_x^4 = (ii)^2, & r_x^6 = (fl)^1, & \Sigma_x^{10} = (fp)^1, \\
m_x^2 = (il)^2, & h_x^4 = (il)^1, & \omega_x^8 = (f\Delta)^1, & \\
C = (i\Delta)^4, & s_x^6 = (fm)^1, & t_x^6 = (i\Delta)^1, & \\
n_x^2 = (im)^2, & j_x^4 = (im)^1, & k_x^4 = (in)^1, & \\
D = (ln)^2, & R = (n\nu)^2 = (lm)\,(ln)\,(mn), & & \\
\nu_x^2 = (lm), & \mu_x^2 = (ln), & \lambda_x^2 = (mn), &
\end{array}$$

Der oben erwähnte Aronhold'sche Process ist zur Entwickelung von Relationen, Ueberschiebungen, Syzyganten und zur *Controlle* von fundamentalster Bedeutung. Ich füge daher das Resultat seiner Anwendung auf die Grundformen nachfolgend bei:

$$\begin{array}{ll}
\delta A = 2B, & \delta l = \frac{4}{15} Al + \frac{1}{6} m, \\
\delta B = \frac{8}{15} AB - \frac{3}{5} C, & \delta m = \frac{8}{15} Am + \frac{2}{15} Bl - \frac{1}{5} n, \\
\delta C = \frac{4}{5} AC - \frac{1}{5} B^2, & \delta n = \frac{4}{5} An - \frac{1}{30} Bm - \frac{1}{5} Cl, \\
\delta D = \frac{16}{15} AD - \frac{4}{15} C^2, & \delta \nu = \frac{4}{5} A\nu - \frac{1}{5} \mu, \\
\delta R = \frac{8}{5} AR, & \delta \mu = \frac{16}{15} A\mu - \frac{1}{30} B\nu + \frac{1}{5} \lambda, \\
 & \delta \lambda = \frac{4}{3} A\lambda + \frac{2}{15} B\mu + \frac{1}{5} C\nu.
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\delta i &= \frac{4}{15} Ai - \frac{2}{5} \Delta, \\
\delta \Delta &= \frac{8}{15} A\Delta - \frac{2}{15} Bi, \\
\delta h &= \frac{8}{15} Ah + \frac{3}{5} j, \\
\delta j &= \frac{4}{5} Aj + \frac{1}{5} k + \frac{2}{15} Bh, \\
\delta k &= \frac{16}{15} Ak + \frac{1}{6} Bj - \frac{1}{15} Ch.
\end{aligned}$$

$$\delta f = p, \qquad \delta H = \tfrac{2}{15} fl + \tfrac{1}{3} i^2,$$

$$\delta p = \tfrac{4}{15} Ap + \tfrac{7}{30} f - \tfrac{3}{10} il, \qquad \delta \Theta = \tfrac{4}{15} A\Theta - \tfrac{7}{5}\omega,$$

$$\delta r = \tfrac{4}{15} Ar - \tfrac{3}{10} s - t, \qquad \delta\omega = \tfrac{8}{15} A\omega - \tfrac{3}{10} B\Theta - \tfrac{1}{6} hi,$$

$$\delta s = \tfrac{8}{15} As - \tfrac{2}{5} At - \tfrac{1}{3} Br + \tfrac{1}{3} hl, \qquad \delta\Sigma = \tfrac{4}{15} A\Sigma - \tfrac{3}{10} l\Theta - \tfrac{1}{10} hf,$$

$$\delta t = \tfrac{4}{5} At. \qquad \delta T = \tfrac{1}{2} i\Theta + \tfrac{1}{5} fr.$$

Schliesslich bemerke ich noch, dass ich zum ersten Gliede jeder Syzygante ihre Charakteristik gewählt habe, und dass jeder Gruppe (i, k) die accessorischen Producte A beigefügt wurden. Jede der 15 Syzyganten von Stephanos nenne ich eine St. und ergänze, dass nur seine (13, 6) einer kleinen Correctur bedarf. Ich brauche endlich wohl kaum zu erwähnen, dass A_{ll}, A_{lm} etc. die Invarianten $(ll)^2$, $(lm)^2$ etc. bedeuten. (Vergl. Gordan's Vorles. über bin. Formen pag. 290).

§ 2.

Aufstellung der Grundsyzyganten.

1. Syzyganten (10, 4): m^2.

$(A : ln,\ C\Delta)$.

Aus der Entwickelung der doppelten Functionaldeterminante

$[(im)l]$

erhält man die St.

$$-m^2 + A_{lm} i + A_{ll}\Delta + \tfrac{1}{2} Bl^2 - 2ln = 0.$$

2. Syzyganten (10, 6): iv, Bs.

$(A : hm,\ jl,\ Cr,\ Bt)$.

$\sum (il)m = 0$ und $\delta(pm)$ oder $\delta(fn)$ geben

$$iv + hm - jl = 0,$$

$$Bs + 2Bt - 2Cr + hm - 3jl = 0.$$

3. Syzyganten (10, 8): np, h^2.

Die Entwickelungen von h^2 und $[(l\Delta)p]$ liefern:

$$2h^2 + l^2\Delta + A_{ll} i^2 - 2ilm = 0,$$

$$6np + Bfm - 2ilm + 2Ci^2 - 4Bi\Delta - 2A\Delta^2 + l^2\Delta - 2Blp = 0.$$

Die entsprechende St. ist

$$\frac{1}{2}(10, 8)_2 + l \cdot (7, 6),$$

$$(7, 6) = Cf + Bp - \frac{1}{2}im - 2l\Delta = 0.$$

Diese folgt ohne weiteres aus

$$\delta\left[(f\Delta)_2 = -\frac{1}{6}Bf + \frac{1}{2}il\right].$$

4. Syzyganten (10, 10): $n\Theta$, $\mathsf{H}\nu$, jp, $s\Delta$, $t\Delta$, $C\Sigma$.

(A: fk, $m\omega$).

Leicht findet man:

$$n\Theta + fk - \frac{1}{6}i(4Br + 2At - 5hl) = 0, \qquad \text{(I)}$$

$$6\mathsf{H}\nu + l(2B\Theta + 2A\omega + 3lr) - m(2A\Theta + 12\omega), \qquad (2)$$

$$jp - m\omega + \frac{1}{6}i(2Br + 2At - hl) = 0, \qquad \text{(III)}$$

$$s\Delta - m\omega + fk = 0, \qquad \text{(IV)}$$

$$\Delta(s + 2t) - 2jp - \frac{1}{3}l(B\Theta + hi) = 0, \qquad (5)$$

Die Ueberschiebung von (7, 6) über p giebt:

$$2C\Sigma - m\omega - \frac{2}{3}l(B\Theta + hi) - jp = 0. \qquad (6)$$

Von diesen ersetzen wir (2), (5) und (6) durch die linearen Combinationen

$$\mathsf{H}\nu - 2m\omega + \frac{1}{6}l(2B\Theta + 2A\omega + 3lr) - \frac{1}{3}Am\Theta = 0, \qquad \text{(II)}$$

$$2\Delta t - m\omega - fk - \frac{1}{3}(Bl\Theta - 2Bir - 2Ait + 2hil) = 0, \qquad \text{(V)}$$

$$C\Sigma - m\omega - \frac{1}{12}(4Bl\Theta - 2Bir - 2Ait + 5hil) = 0, \qquad \text{(VI)},$$

worin für

$$V = (5) - (4) + 2 \,.\, (3),$$

$$2\,VI = (6) + (3)$$

zu setzen ist

Durch Ueberschiebung von

$$(8, 8) = fn + C\mathsf{H} - \frac{3}{4}il^2 - \frac{1}{2}Ai\Delta - 2\Delta^2 = 0$$

über i, ergiebt sich eine neue

$$(10, 10) = I - VI + V.$$

Stephanos hat noch eine andere (8, 8), die sich als eine Folgerung der Entwickelung von $[(\Delta l)f]$ darstellt:

$$-fn - mp + \frac{1}{3}Bfl + \frac{1}{3}Bi^2 + \frac{2}{3}Ai\Delta + 2\Delta^2 = 0.$$

Die erstere folgt nach einigen Reductionen aus

$$\delta\left[(pp)_2 = \frac{1}{6} fm - \frac{1}{5} lp - \frac{1}{6} i\Delta\right].$$

Man sieht, dass fk und $m\omega$ accessorische Producte sind.

5. Syzyganten (10, 12): $j\Theta$, rs, rt, $h\omega$.

$$2j\Theta + imp + fin - fm\Delta - \frac{1}{6} i^2(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0,$$

$$2rs + A_{lm}f^2 + lm\mathsf{H} - \frac{1}{6} fl(2Bi + 2A\Delta + 3l^2)$$
$$- \frac{1}{3} fm(Ai + 6\Delta) = 0,$$

$$2rt + f(in - m\Delta) + lp\Delta - \frac{1}{6} il(Bf + 3il) = 0,$$

$$2h\omega + fin + lp\Delta - \frac{1}{3} Bfil - 3i\Delta(Ai + 6\Delta) = 0.$$

6. Syzyganten (10, 14): $T.n$.

$$Tn + \frac{1}{6} f(2C\Theta - 2B\omega - 3mr - 3ls) - \frac{1}{6}\mathsf{H}(4Br + 2At - 5lt) = 0.$$

7. Syzyganten (10, 16): jT, $s\Sigma$, $t\Sigma$, ω^2.

$$2jT + fi\left[\frac{1}{3}\left(Bp - Cf - \frac{1}{3} ABf + Ail\right) + l\Delta - \frac{1}{6} im\right] + mp\mathsf{H} - \frac{1}{6} f^2lm$$
$$- \frac{1}{6} i\mathsf{H}(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0,$$

$$2s\Sigma + \frac{1}{3} f^2(lm - Ci + B\Delta) + mp\mathsf{H} - \frac{1}{6} fp(2Bi + 2A\Delta + 3l^2)$$
$$- \frac{1}{6} fi^2m = 0.$$

$$2t\Sigma + \frac{1}{6} fi(im + l\Delta - 2Bp) + p^2\Delta + \frac{1}{2} i^2lp - \frac{1}{6} Bf^2\Delta = 0.$$

$$2\omega^2 + \frac{1}{6} f^2(2Ci + B\Delta) + \Delta^2\mathsf{H} - fil\Delta = 0.$$

8. Syzyganten (11, 6): Δn.

(A: Df).

$\delta(7, 6)$ erzeugt die St. (9, 6):

$$2Cp + \frac{1}{3} B^2f - Bil + in - 2m\Delta = 0,$$

die später zur Reduction und Entwickelung höherer Syzyganten vielfach Anwendung findet. Schieben wir aber $(lp) = \frac{1}{2} s + t$ über m, so erhalten wir nach Abzug von $\frac{1}{3} B$ (7. 6) die St.:

$$n\Delta - \frac{1}{2}Df + \frac{1}{2}Am\Delta + \frac{3}{4}l^2m - \frac{2}{3}ACp - \frac{2}{3}Cil - Bl\Delta$$
$$+ \frac{2}{3}BCf = 0.$$

9. Syzyganten (11, 8): $f\mu$, ik, pv, $j\Delta$, rn, $C\omega$.

(A: ms, mt).

Man erhält durch

$$\sum(\Delta m)i = 0, \qquad \sum(lm)p = 0, \qquad \sum(fl)n = 0$$

und

$[(7, 6), \Delta]$, $[10, 4), f]$, $[(9, 6)\, i]$ und $[\{(8, 8) = C\mathsf{H}\}, l]$ die sieben unrein charakterisirten Syzyganten:

(1) $$ik + j\Delta - mt = 0,$$

(2) $$2p \cdot v - ms - 2mt - l\left(\frac{1}{6}lh - \frac{1}{3}Br - \frac{1}{3}At\right) = 0,$$

(3) $$f\mu + nr - l\left(\frac{2}{3}Br + \frac{1}{3}At - \frac{5}{6}lh\right) = 0,$$

(4) $$-j\Delta - mt + 2C\omega - \frac{1}{3}B^2\Theta - \frac{1}{3}Bhi = 0,$$

(5) $$f\mu + 2nr + ms - 2C\omega - \frac{2}{3}AC\Theta - \frac{2}{3}B^2\Theta - \frac{1}{3}AB\omega$$
$$- \frac{1}{3}Blr = 0,$$

(6) $$-ik + 2mt - 2C\omega + \frac{1}{3}B^2\Theta + \frac{1}{3}Bhi = 0,$$

(7) $$2j\Delta + nr - 2C\omega - \frac{1}{3}AC\Theta - \frac{1}{6}hl^2 - \frac{1}{3}Alt - \frac{1}{6}Blr$$
$$+ \frac{1}{2}Aij = 0.$$

Diese ersetzen wir durch die linearen Combinationen:

(I) $$2f\mu - ms + 2mt - \frac{3}{2}Blr - \frac{2}{3}Alt + \frac{8}{3}l^2h + \frac{4}{3}B^2\Theta + AC\Theta$$
$$+ \frac{1}{3}AB\omega - \frac{1}{2}Aij + \frac{2}{3}Bhi = 0.$$

(II) $$2ik + ms - 2mt + \frac{1}{2}Blr + \frac{2}{3}Alt - \frac{2}{3}l^2h - \frac{2}{3}B^2\Theta$$
$$- \frac{1}{3}AC\Theta - \frac{1}{3}AB\omega - \frac{1}{2}Aij = 0.$$

(III) $$2pv - ms - 2mt - \frac{1}{6}l(hl - 2Br - 2At) = 0,$$

(IV) $$2j\Delta - ms - \frac{1}{2}Blr - \frac{2}{3}Alt + \frac{2}{3}l^2h + \frac{2}{3}B^2\Theta + \frac{1}{3}AC\Theta$$
$$+ \frac{1}{2}Aij + \frac{1}{3}AB\omega = 0,$$

(V) $2nr + ms - 2mt - \frac{4}{3} B^2\Theta + \frac{1}{6} Blr - l^2h - AC\Theta - \frac{1}{3} AB\omega$

$$+ \frac{2}{2} Aij - \frac{1}{3} Bhi = 0,$$

(VI) $4C\omega - ms - 2mt - \frac{1}{2} Blr - \frac{2}{3} Alt + \frac{2}{3} l^2h$

$$+ \frac{1}{3} AC\Theta + \frac{1}{3} AB\omega + \frac{1}{2} Aij - \frac{2}{3} Bhi = 0.$$

Es hängen mit diesen die vorhergehenden durch die Gleichungen zusammen:

$(1) = \frac{II + IV}{2}$, $(4) = \frac{VI - IV}{2}$,

$(2) = III$, $(5) = \frac{I + 2 \cdot V - VI}{2}$, $(7) = \frac{2 \cdot IV + V - VI}{2}$.

$(3) = \frac{I + V}{2}$, $(6) = \frac{-II - VI}{2}$,

10. Syzyganten (11, 10): Θv, jr, hs, ht.

$$2\Theta v + fln + im\left(\tfrac{1}{3} Ai + 2\Delta\right) - fm^2 - \tfrac{1}{6} il(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0,$$

$$2jr + A_{lm}fi + lmp - fm^2 - \tfrac{1}{6} il(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0,$$

$$2hs + A_{lm}fi + lmp - im\left(\tfrac{1}{3} Ai + 2\Delta\right) - fln = 0,$$

$$2ht + i^2n + l\Delta^2 - im\Delta - \tfrac{1}{2} Bi^2l = 0.$$

11. Syzyganten (11, 12): $k\mathrm{H}$, Σn.

$$k\mathrm{H} - \Sigma n - \tfrac{1}{6} i[2C\Theta - 2B\omega - 3mr - 3ls] = 0,$$

$$\Sigma n - \tfrac{1}{12} f[2Cr + 3Bs + 2Bt + 3hm + 3jl)$$
$$- \tfrac{1}{6} p[4Br + 2At - 5hl] = 0.$$

12. Syzyganten (11, 14): Tv, Σj, $s\omega$, $t\omega$.

$$2Tv + fl\left[\tfrac{1}{3}\left(Bp + Ail - \tfrac{1}{3} ABf - Cf\right) - im + l\Delta\right]$$
$$+ m\mathrm{H}\left(\tfrac{1}{3} Ai + 2\Delta\right) - \tfrac{1}{3} fm(Ap - Bf)$$
$$- \tfrac{1}{6} \mathrm{H}l(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0,$$

$$2\Sigma j + \tfrac{1}{6} fi(3lm - 2Ci + 2B\Delta) + mp^2 - \tfrac{1}{6} Bf^2m$$
$$- \tfrac{1}{6} ip(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0,$$

$$2s\omega + \frac{1}{3}f^2(Cl + Bm) + m\mathsf{H}\Delta - \frac{1}{2}film$$
$$-\frac{1}{6}f\Delta(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0,$$
$$2t\omega + \frac{1}{6}fi(2Ci - B\Delta) + p\Delta^2 - \frac{1}{3}Bfi\Delta + \frac{1}{2}i^2l\Delta = 0.$$

13. Syzyganten (12, 4): Di.

(A: mn).

Schieben wir $(\Delta m) + k = 0$ über l oder $(l\Delta) - j = 0$ über m, so entsteht die St:

$$Di - \frac{1}{3}Cl^2 - 2mn + A_{lm}\Delta = 0.$$

14. Syzyganten (12, 6): hn, $\Delta\nu$, Cs, Ct.

(A: $i\mu$, kl, jm).

$$hn + i\mu - kl = 0,$$
$$\Delta\nu - jm + kl = 0.$$

Zwei weitere folgen aus $[(7, 6)\, m]$ und $[(10, 4)\, i]$:

$$Cs + \frac{1}{6}B(hl - 2Br - 2At) + 2kl - jm = 0,$$
$$A_{ll}t - 2kl + i\mu - jm + \frac{1}{2}Bhl = 0.$$

A_{ll} vertritt wegen

$$A_{ll} = \frac{1}{3}AB + 2C$$

die Invariante C.

15. Syzyganten (12, 8): $D\mathsf{H}$, $r\nu$, hj.

$[(Hl)n]$ giebt:

$$-3D\mathsf{H} - Bfn + 4Anp + 4iln - 2A_{ll}i\Delta - \Delta^2(A^2 + 6B)$$
$$+\frac{1}{2}l\Delta(Al + 8m) + \frac{3}{4}l^4 = 0.$$

Zwei weitere lauten:

$$2r\nu + A_{lm}\cdot fl - A_{ll}\cdot fm + lm\left(\frac{1}{3}Ai + \Delta\right) - \frac{1}{6}l^2(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0,$$
$$2hj + A_{lm}\cdot i^2 + lm\Delta - im^2 - iln = 0.$$

16. Syzyganten (12, 10): $\mathsf{H}\mu$, kp, $n\omega$.

$$n\omega - \frac{1}{6}f(2Ch + 3Bj) - \frac{1}{6}\Delta(4Br + 2At - 5hl) = 0,$$
$$kp - n\omega + \frac{1}{12}i(2Cr + 3Bs + 2Bt + 3hm + 3jl) = 0,$$
$$\mathsf{H}\mu - 2n\omega - \frac{1}{3}An\Theta - \frac{1}{6}l(2C\Theta - 2B\omega - 3mr - 3ls) = 0.$$

17. Syzyganten (12, 12): $k\Theta$, $\Sigma\nu$, $j\omega$, s^2, st, t^2.

$$2k\Theta+\frac{1}{6}fi(2Cl+3Bm)+inp-fn\Delta-\frac{1}{3}i^2(B\Delta-Ci+lm)=0,$$

$$2\Sigma\nu+\frac{1}{6}fl(2B\Delta-2Ci+3lm)+\frac{1}{3}mp(Ai+6\Delta)-\frac{1}{3}fm(Bi+A\Delta)$$
$$-\frac{1}{6}lp(2Bi+2A\Delta+3l^2)=0,$$

$$2j\omega+\frac{1}{3}Cfil+mp\Delta-\frac{1}{6}i\Delta(2Bi+2A\Delta+3l^2)=0.$$

$$2s^2+Df^2+\mathsf{H}m^2-\frac{1}{3}fm(2Bi+2A\Delta+3l^2)=0,$$

$$2st+\frac{1}{3}fi(Cl+Bm)+mp\Delta-fn\Delta-\frac{1}{2}i^2lm=0,$$

$$2t^2+\frac{1}{6}i^2(2Ci-3B\Delta)+\Delta^3=0.$$

18. Syzyganten (12, 16): Tk.

$$2Tk+fi\left[\frac{1}{3}Bil-\frac{2}{9}ACf-\frac{5}{18}B^2f-\frac{1}{3}Cp+\frac{1}{6}Aim-\frac{1}{6}in\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}A\Delta l+m\Delta+\frac{1}{4}l^3\right]$$
$$+\mathsf{H}np-\frac{1}{6}f^2ln-\frac{1}{3}i\mathsf{H}(B\Delta-Ci+3lm)=0.$$

19. Syzyganten (13, 4): Cj.
(A: $l\mu$, Bk, $m\nu$).

$[(10, 4)l]$ giebt:

$$-A_{ll}j+A_{lm}h+l\mu+m\nu=0.$$

20. Syzyganten (13, 6): Dp, $h\nu$.

$$6Dp+3A_{mn}f-Bin-2An\Delta-3l^2n+il\left(\frac{4}{3}AC+B^2\right)-6lm^2$$
$$+3Cim-3Bm\Delta=0,$$
$$2h\nu+A_{lm}\cdot il-A_{ll}im+lm^2-l^2n=0,$$

von denen die erste aus $[(lp)n]$ folgt.

Die entsprechende St. enthält einen anderen Coefficienten, nämlich denjenigen von f, der in $\frac{1}{3}B\cdot A_{lm}$ umzuändern ist. Es ist alsdann

$$\text{St.}=\frac{1}{6}\cdot(13,6)_1-\frac{1}{3}C\cdot(7,6)+\frac{1}{6}B(9,6).$$

21. Syzyganten (13, 8): $p\mu$, $D\Theta$, $k\Delta$, $f\lambda$, nt.
(A: sn),

$$D\Theta + A_{lm}\omega - 2ns - f\lambda - \tfrac{1}{3}\,Clr = 0,$$

$$p\mu - \tfrac{1}{2}\,ns - nt + \tfrac{1}{12}\,l(2Cr + 3Bs + 3Bt + 3hm + 3jl) = 0,$$

$$k\Delta - nt + \tfrac{1}{6}\,i(2Ch + 3Bj) = 0,$$

$$f\lambda + ns - \tfrac{1}{6}\,m(4Br + 2At - 5hl) = 0,$$

$$\begin{aligned} - nt + \Theta\left(\tfrac{2}{3}\,BC - \tfrac{1}{2}\,D\right) + \tfrac{2}{3}\,AC\omega + \tfrac{2}{9}\,Chi + B\left(lt - \tfrac{1}{3}\,ij\right) \\ - \tfrac{1}{2}\,A\left(mt - \tfrac{1}{3}\,ik\right) \\ + \tfrac{1}{18}\,(2Ch + 3Bj) - \tfrac{3}{4}\left(hlm + \tfrac{1}{3}\,il\nu\right) = 0, \end{aligned}$$

von denen die erste aus [(12, 4) f] und die letzte aus [(11, 6) i] ohne weiteres folgt.

22. Syzyganten (13, 10): $\Theta\mu$, kr, $\omega\nu$, js, jt.

$$\begin{aligned} 2\Theta\mu + \tfrac{1}{6}\,fl(2Cl + 3Bm) + \tfrac{1}{3}\,in(Ai + 6\Delta) + \tfrac{1}{3}\,il(Ci - B\Delta - 3lm) \\ - fmn = 0, \end{aligned}$$

$$2kr + Dfi + lnp + fmn + \tfrac{1}{3}\,il\,(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$\begin{aligned} 2\omega\nu + \tfrac{1}{6}\,fl(2Cl + 3Bm) + \tfrac{4}{3}\,m\Delta(Ai + 6\Delta) - fmn \\ - \tfrac{1}{6}\,l\Delta(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0, \end{aligned}$$

$$2js + Dfi + m^2p - fmn - \tfrac{1}{6}\,im(2Bi + 2A\Delta + 3l^2),$$

$$2jt + \tfrac{1}{3}\,Ci^2l + \Delta^2m + in\Delta = 0.$$

23. Syzyganten (13, 12): DT.

$$\begin{aligned} DT - \tfrac{4}{3}\,BCT + \tfrac{1}{9}\,(2ACi + 3Bl^2 - 6Alm + 3ln) \\ - \tfrac{1}{3}\,ir(2n - 2Bl + Am) \\ - \tfrac{1}{6}\,\mathsf{H}(4C\mathsf{H} - 2Bj + 2Ak - 3l\nu) - 3lm\omega \\ + \tfrac{4}{3}\,Cl\Sigma + \tfrac{2}{9}\,Acfr = 0, \end{aligned}$$

Diese folgt aus [(11, 6) H].

24. Syzyganten (13, 14): $T\mu$, Σk.

$$2T\mu + \frac{1}{36}fl[12Bil - 8Acf - 10B^2f - 12Cp + 6Aim - 36in + 6Al\Delta + 36m\Delta + 9l^3]$$
$$+ \mathsf{H}n\left(\frac{1}{3}Ai + 2\Delta\right) + \frac{1}{3}fn(Bf - Ap)$$
$$+ \frac{1}{3}\mathsf{H}l(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$2\Sigma k + \frac{1}{90}fi[36ln - 20ACi - 15B^2i - 30C\Delta + 45m^2] + np^2$$
$$+ \frac{1}{30}fn(5Bf - 3il) + \frac{1}{3}ip\,(B\Delta - Ci + 3lm) = 0.$$

25. Syzyganten (14, 4): $D\Delta$.
(A: n^2).

Aus $[(12, 4)\,i]^2$ folgern wir:

$$D\Delta + A_{mn}i - n^2 - \frac{2}{3}\,Clm - \frac{1}{2}\,Bm^2 = 0.$$

Stephanos hat dafür

$$(14, 4) - \frac{1}{2}\,B(10, 4).$$

26. Syzyganten (14, 6): $i\lambda$, $\Delta\mu$, Dr, mk.
(A: jn).

$$i\lambda - km + jn = 0,$$

$$\mu\Delta - jn + \frac{1}{6}\,l(2Ch + 3Bj) = 0.$$

$$3Dr + 6\mu\Delta - 4BCr - 4AC\left(\frac{s}{2} + t\right) + 4Chl - 2Bjl$$
$$+ \frac{3}{2}\,\nu(2A\Delta + l^2) + 2Akl = 0,$$

$$km + jn + \frac{10}{3}\,A(2kl + hn + \Delta\nu) + \frac{1}{3}\,Chl - \frac{5}{3}\,ABhl - A_{lm}t$$
$$- \frac{10}{3}\,A_{ll}At = 0.$$

Die beiden letzten entwickelt man leicht aus:

$$[(11, 6)\,l] \quad \text{und} \quad \delta(12, 6)_4,$$

wenn man zu diesem noch

$$-\frac{1}{30}\,B(10, 6) + \frac{4}{3}\,A[(12, 6)_1 + (12, 6)_2] + \frac{1}{5}\,[(14, 6)_1 - (14, 6)_2]$$

hinzufügt.

27. Syzyganten (14, 8): $r\mu$, hk, sv, tv, j^2.

$$2hk + Di^2 + ln\Delta - imn - \tfrac{1}{6}\,il(2Cl + 3Bm) = 0,$$

$$2j^2 + Di^2 + m^2\Delta - 2imn = 0,$$

$$2r\mu + Dfl - A_{ll}\cdot fn + ln\left(\tfrac{1}{3}Ai + 2\Delta\right) + \tfrac{1}{3}l^2(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$2sv + Dfl + m^2\left(\tfrac{1}{3}Ai + 2\Delta\right) - A_{lm}fm - \tfrac{1}{6}\,lm(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) = 0,$$

$$2tv + \Delta m^2 - ln\Delta + \tfrac{1}{6}\,il(2Cl + 3Bm) - imn = 0.$$

28. Syzyganten (14, 10): $D\Sigma$, $\mathrm{H}\lambda$.

$$\mathrm{H}\lambda - \tfrac{1}{6}\,m(2C\Theta - 2B\omega - 3mr - 3ls) - \tfrac{1}{6}\,n(2B\Theta + 2A\omega + 3lr) = 0,$$

$$D\Sigma + \mathrm{H}\lambda + \tfrac{1}{6}\,A_{lm}(l\Theta + 2ir) - \tfrac{1}{3}\,Cl\left(\tfrac{1}{3}A\Theta - 2\omega\right)$$
$$- \tfrac{1}{3}\,n(2B\Theta + 2A\omega + 3lr) = 0,$$

di ese entsteht aus: $[(12, 4)\,\mathrm{H}]$.

29. Syzyganten (14, 12): $k\omega$, $\Sigma\mu$.

$$2k\omega + np\Delta + \tfrac{1}{3}\,Cfim + \tfrac{1}{3}\,i\Delta(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$2\Sigma\mu - \tfrac{1}{18}\,fl(4ACi + 3B^2i + 6C\Delta - 9ln - 9m^2) + pn\left(\tfrac{1}{3}Ai + 2\Delta\right)$$
$$- \tfrac{1}{3}\,fn(Bi + A\Delta) + \tfrac{1}{3}\,lp(Ci - B\Delta - 3lm) = 0.$$

30. Syzyganten (15, 4): $l\lambda$, Dh, Ck.
(A: $m\mu$, nv).

$$l\lambda - m\mu + nv = 0,$$

$$A_{ll}\cdot k - A_{lm}\cdot j - \tfrac{1}{2}\,Blv + 2nv - m\mu = 0,$$

$$Dh - A_{lm}\cdot j + 2nv + l\lambda = 0.$$

Die beiden letzten ergeben sich aus:

$[(10, 4)\,m]$ und $[(12, 4)\,l]$.

31. Syzyganten (15, 6): $h\mu$, jv.

$$2h\mu + Dil + lmn - A_{ll}\cdot in - \tfrac{1}{6}\,l^2(2Cl + 3Bm) = 0,$$

$$2jv + Dil + m^3 - A_{lm}\,im - lmn = 0,$$

32. Syzyganten (15, 8): $D\omega$, $p\lambda$.

$$p\lambda + \tfrac{1}{12} m[2Cr + 3Bs + 2Bt + 3hm + 4jl] + \tfrac{1}{6} n[2Br + 2At - hl] = 0,$$

$$Dw - A_{ll}\left(\tfrac{1}{2} B\omega - \tfrac{1}{3} C\Theta\right) - \tfrac{1}{4} B^2 lr - \tfrac{2}{3} C\left(mr + \tfrac{1}{2} fv\right) + B\left(nr + \tfrac{1}{2} f\mu\right) + \tfrac{1}{6} n(4Br + 2At - 5hl) = 0,$$

Dw ergiebt sich aus

$[(11, 6)\,\Delta]$ oder $[(14, 4)\,f]$.

33. Syzyganten (15, 10): $\mu\omega$, sk. tk, $\Theta\lambda$.

$$2\Theta\lambda + \tfrac{1}{6} fm(2Cl + 3Bm) + \tfrac{1}{6} in(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) - fn^2 + \tfrac{1}{3} im(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$2\mu\omega + \tfrac{1}{6} fl(2Cm + Bn) + \tfrac{1}{3} n\Delta(Ai + 6\Delta) - \tfrac{1}{3} fn(3n - Bl) + \tfrac{1}{3} l\Delta(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$2sk + A_{mn}\cdot fi + mnp - fn^2 + \tfrac{1}{3} im(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$2tk + \tfrac{1}{6} i^2(2Cm + Bn) + n\Delta^2 - \tfrac{1}{6} Bi^2 n - \tfrac{1}{6} i\Delta(2Cl + 3Bm) = 0.$$

34. Syzyganten (15, 14): $T\lambda$.

$$2T\lambda + fm\left[-\tfrac{2}{9} ACf - \tfrac{5}{18} B^2 f - \tfrac{1}{3} Cp + \tfrac{1}{3} Bil + \tfrac{1}{6} Aim - \tfrac{2}{7} in + \tfrac{1}{6} Al\Delta + m\Delta + \tfrac{1}{4} l^3\right] + \tfrac{1}{6} \mathsf{H} n(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) - fn\left[\tfrac{1}{3}\left(Bp + Ail - \tfrac{1}{3} ABf - Cf\right) - \tfrac{2}{7} im + l\Delta\right] + \tfrac{1}{3} \mathsf{H} m(Ci - B\Delta - 3lm) = 0.$$

35. Syzyganten (16, 4): v^2.

$$2v^2 + Dl^2 + A_{ll} m^2 - 2A_{lm}\cdot lm = 0.$$

36. Syzyganten (16, 6): Rf, nk, Ds, Dt.

(A: $\lambda\Delta$).

$$nk - \lambda\Delta - \tfrac{1}{6} m(2Ch + 3Bj) = 0,$$

$$Rf - \lambda\left(2\Delta + \frac{1}{3}Ai\right) + \frac{1}{6}\mu(2Bi + 2A\Delta + 3l^2)$$
$$+ \frac{1}{3}\nu(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$Ds - \frac{4}{3}BCs - \frac{2}{9}AC(2Br + 2At - hl) + \frac{4}{3}Cjl + 2B\Delta\nu$$
$$+ \frac{2}{3}Akm + 2\lambda\Delta - \frac{8}{9}Bjm - lm\nu = 0,$$

$$Dt - \frac{1}{3}Cjl - 2kn + \lambda\Delta = 0.$$

Ds und Dt sind eine Folge von:

$$[(11, 6)\, m] \quad \text{und} \quad [(12, 4)\, \Delta].$$

37. Syzyganten (16, 8): $r\lambda$, jk, $s\mu$, $t\mu$.

$$2r\lambda + A_{ln}fm + \frac{1}{6}ln(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) - A_{lm}fn$$
$$+ \frac{1}{3}lm(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$2jk + A_{mn}i^2 + mn\Delta - in^2 - \frac{1}{6}im(2Cl + 3Bm) = 0,$$

$$2s\mu + A_{mn}fl + mn\left(2\Delta + \frac{1}{3}Ai\right) - A_{lm}\cdot fn$$
$$+ \frac{1}{3}lm(Ci - B\Delta - 3lm) = 0,$$

$$2t\mu + \frac{1}{6}il(2Cm + Bn) + mn\Delta - in\left(n - \frac{1}{3}Bl\right)$$
$$- \frac{1}{6}l\Delta(2Cl + 3Bm) = 0.$$

38. Syzyganten (16, 12): $\Sigma\lambda$.

$$2\Sigma\lambda + fm\left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{2}{9}ACi - \frac{1}{6}B^2i - \frac{1}{3}C\Delta\right)$$
$$+ \frac{1}{6}np(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) - fn\left(\frac{1}{3}B\Delta - \frac{1}{3}Ci\right)$$
$$+ \frac{1}{3}mp(Ci - B\Delta - 3lm) = 0.$$

39. Syzyganten (17, 4): Ri, $m\lambda$, $n\mu$.
(A: Dj.)

$$Ri - m\lambda + n\mu - \frac{1}{6}\nu(2Cl + 3Bm) = 0,$$
$$m\lambda + Dj - A_{lm}k - \frac{1}{3}Cl\nu = 0,$$
$$n\mu - Dj + A_{mn}h + \frac{1}{3}Cl\nu + \frac{1}{3}Bm\nu = 0.$$

$m\lambda$ und $n\mu$ ergeben sich bezüglich aus:

$$[(12, 4)\, m] \quad \text{und} \quad [(14, 4)\, l].$$

40. Syzyganten (17, 6): $h\lambda$, $j\mu$, $k\nu$.

$$2h\lambda + Dim + ln^2 - A_{lm}in - \frac{1}{6}lm(2Cl + 3Bm) = 0,$$

$$2j\mu + A_{mn}il + m^2n - A_{lm}in - \frac{1}{6}lm(2Cl + 3Bm) = 0,$$

$$2k\nu + A_{mn}il + m^2n - Dim - ln^2 = 0.$$

41. Syzyganten (17, 8): $R\mathsf{H}$.

$$\begin{aligned} R\mathsf{H} &- \lambda\left[\frac{1}{3}Ap - \frac{1}{3}Bf + \frac{5}{7}il\right] \\ &+ \mu\left[\frac{1}{3}\left(Bp + Ail - \frac{1}{3}ABf - Cf\right) - \frac{2}{7}im + l\Delta\right] \\ &- \nu\Big[-\frac{2}{9}ACf - \frac{5}{18}B^2f - \frac{1}{3}Cp + \frac{1}{3}Bil + \frac{1}{6}Aim - \frac{2}{7}in \\ &\qquad + \frac{1}{6}Al\Delta + m\Delta + \frac{1}{4}l^3\Big] = 0. \end{aligned}$$

42. Syzyganten (17, 10): $\omega\lambda$.

$$\begin{aligned} 2\lambda\omega &+ \frac{1}{3}Cfm^2 + \frac{1}{6}n\Delta(2Bi + 2A\Delta + 3l^2) - \frac{1}{3}Cfln \\ &+ \frac{1}{3}m\Delta(Ci - B\Delta - 3lm) = 0. \end{aligned}$$

43. Syzyganten (18, 2): Rl.

(A: $C\lambda$, $D\nu$).

$$Rl - A_{ll}\lambda + A_{lm}\mu - D\nu = 0.$$

44. Syzyganten (18, 4): $\mu\nu$.

$$2\mu\nu + A_{mn}\cdot l^2 + A_{ll}mn - A_{lm}ln - Dlm = 0.$$

45. Syzyganten (18, 6): Rp.

$$\begin{aligned} Rp &- \frac{1}{30}\lambda(10Bi + 10A\Delta - 3l^2) + \frac{1}{15}\mu(5B\Delta - 5Ci + 6lm) \\ &- \frac{1}{90}\nu[36ln + 45m^2 - 10ACi - 15B^2i - 30C\Delta] = 0. \end{aligned}$$

46. Syzyganten (18, 8): $R\Theta$, λs, λt, k^2.

$$2R\Theta - \frac{1}{6}\begin{vmatrix} (12\Delta + 2Ai) & (2Bi + 2A\Delta + 3l^2) & (2B\Delta - 2Ci + 6lm) \\ m & n & \frac{1}{6}(2Cl + 3Bm) \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

$$2s\lambda + A_{mn}fm + \frac{1}{6}mn(2Bi + 2A\Delta + 3l^2)$$
$$+ \frac{1}{3}m^2(Ci - B\Delta - 3lm) - Dfn = 0,$$
$$2t\lambda + \frac{1}{3}Cim^2 + n^2\Delta - \frac{1}{6}m\Delta(2Cl + 3Bm) - \frac{1}{3}Ciln = 0,$$
$$2k^2 + A_{nn}\cdot i^2 + n^2\Delta - \frac{1}{3}in(2Cl + 3Bm) = 0.$$

47. Syzyganten (18, 12): $R\mathsf{T}$.

$$2R\mathsf{T} - \frac{1}{6}\begin{vmatrix} (12\Delta+2Ai) & (2Bi+2A\Delta+3l^2) & (2B\Delta-2Ci+6lm) \\ \left(-\frac{1}{3}Bf+\frac{1}{3}Ap+\frac{5}{7}il\right) & X & Y \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

worin für X und Y resp. zu setzen ist:

$$X = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}ABf - Cf + Bp + Ail\right] - \frac{2}{7}im + \Delta l,$$
$$Y = -\frac{2}{9}ACf - \frac{5}{18}B^2f - \frac{1}{3}Cp + \frac{1}{3}Bil + \frac{1}{6}Aim - \frac{2}{7}in$$
$$+ \frac{1}{6}A\Delta l + \Delta m + \frac{1}{4}l^3.$$

48. Syzyganten (19, 4): Dk, $R\Delta$.
(A: $n\lambda$).

$$Dk - \frac{1}{6}A_{lm}(2Ch + 3Bj) - \frac{1}{3}Cl\mu - n\lambda = 0,$$
$$R\Delta - \lambda\left(n - \frac{1}{3}Bl\right) + \frac{1}{6}\mu(2Cl + Bm) - \frac{1}{6}\nu(2Cm + Bn) = 0.$$

Die erste folgern wir aus

$[(12, 4)\ n]$.

49. Syzyganten (19, 6): Rr, $j\lambda$, $k\mu$.

$$2j\lambda + A_{mn}im + mn^2 - Din - \frac{1}{6}m^2(2Cl + 3Bm) = 0,$$
$$2k\mu + A_{nn}il + mn^2 - Din - \frac{1}{6}ln(2Cl + 3Bm) = 0,$$
$$2Rr - \frac{1}{6}\begin{vmatrix} (12\Delta+2Ai) & (2Bi+2A\Delta+3l^2) & (2B\Delta-2Ci+6lm) \\ A_{ll} & A_{lm} & D \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

50. Syzyganten (19, 10): $R\Sigma$.

$$0 = 12R\Sigma - \begin{vmatrix} l & (12\Delta + 2Ai) & \left(\frac{1}{3}Bi + \frac{1}{3}A\Delta - \frac{1}{10}l^2\right) \\ m & (2Bi + 2A\Delta + 3l^2) & \left(-\frac{1}{3}Ci + \frac{1}{3}B\Delta + \frac{2}{5}lm\right) \\ n & (2B\Delta - 2Ci + 6lm) & \begin{bmatrix} -\frac{2}{9}ACi - \frac{1}{6}B^2 i \\ -\frac{1}{3}C\Delta + \frac{2}{5}ln + \frac{1}{2}m^2 \end{bmatrix} \end{vmatrix}.$$

51. Syzyganten (20, 2): Rm.

$(A\colon\ D\mu)$.

$$Rm - A_{lm}\lambda + D\mu - A_{mn}\nu = 0.$$

52. Syzyganten (20, 4): $Rh,\ \nu\lambda,\ \mu^2$.

$$2Rh - \begin{vmatrix} m & n & \left(\frac{1}{3}Cl + \frac{1}{2}Bm\right) \\ A_{ll} & A_{lm} & D \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

$$2\lambda\nu + A_{mn}\cdot lm + A_{lm}\cdot mn - Dln - Dm^2 = 0,$$

$$2\mu^2 + A_{nn}\cdot l^2 + A_{ll}\cdot n^2 - 2Dln = 0.$$

53. Syzyganten (20, 8): $R\omega$.

$$2R\omega - \frac{1}{6}\begin{vmatrix} (2Ai + 12\Delta) & (2Bi + 2A\Delta + 3l^2) & (2B\Delta - 2Ci + 6lm) \\ \left(n - \frac{1}{3}Bl\right) & \left(\frac{1}{3}Cl + \frac{1}{6}Bm\right) & \left(\frac{1}{3}Cm + \frac{1}{6}Bn\right) \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

54. Syzyganten (21, 6): $Rs,\ Rt,\ k\lambda$.

$$2k\lambda + A_{nn}im + n^3 - A_{mn}in - \frac{1}{6}mn(2Cl + 3Bm) = 0,$$

$$2Rs - \frac{1}{6}\begin{vmatrix} (2Ai + 12\Delta) & (2Bi + 2A\Delta + 3l^2) & (2B\Delta - 2Ci + 6lm) \\ A_{lm} & D & A_{mn} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

$$2Rt - \frac{1}{6}\begin{vmatrix} m & n & \frac{1}{6}(2Cl + 3Bm) \\ (6n - 2Bl) & (2Cl + Bm) & (2Cm + Bn) \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

55. Syzyganten (22, 2): Rn.

$(A: D\lambda)$.

$$Rn - D\lambda + A_{mn}\mu - A_{nn}\nu = 0.$$

56. Syzyganten (22, 4): Rj, $\lambda\mu$.

$$2\lambda\mu + A_{nn}\cdot lm + A_{lm}\cdot n^2 - A_{mn}\cdot ln - Dmn = 0,$$

$$2Rj - \begin{vmatrix} m & n & \frac{1}{6}(2Cl + 3Bm) \\ A_{lm} & D & A_{mn} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

57. Syzyganten (23, 2): $R\nu$.

$$2R\nu - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & D \\ A_{lm} & D & A_{mn} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

58. Syzyganten (24, 4): Rk, λ^2.

$$2\lambda^2 + A_{nn}\cdot m^2 + D\cdot n^2 - 2A_{mn}mn = 0,$$

$$2Rk = \begin{vmatrix} m & n & \frac{1}{6}\left(2Cl + 3Bm\right) \\ D & A_{mn} & A_{nn} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

59. Syzyganten (25, 2): $R\mu$.

$$2R\mu - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & D \\ D & A_{mn} & A_{nn} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

60. Syzyganten (27, 2): $R\lambda$.

$$2R\lambda - \begin{vmatrix} A_{lm} & D & A_{mn} \\ D & A_{mn} & A_{nn} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

61. Syzyganten (30, 0): R^2.

$$2R^2 - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & D \\ A_{lm} & D & A_{mn} \\ D & A_{mn} & A_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3.

Tabelle der Syzyganten.

Ordnung in den x:

Grad in den Coefficienten.	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	Sylvester hat:
10			1	2	2	6	4	1	4					$(10,12)^5$, $(10,14)^2$.
11				1	6	4	2	4						$(11,6)^0$, $(11,10)^5$.
12			1	4	3	3	6		1					$(12,12)^7$, $(12,14)^1$.
13			1	2	5	5	1	2						$(13,14)^3$.
14			1	4	5	2	2							$(14,8)^6$, $(14,12)^3$.
15			3	2	2	4		1						$(15,6)^3$, $(15,12)^1$, $(15,14)^2$.
16			1	4	4		1							$(16,10)^1$, $(16,12)^2$.
17			3	3	1	1								$(17,10)^2$, $(17,14)^1$.
18		1	1	1	4		1							
19			2	3		1								
20		1	3		1									$(20,16)^1$.
21				3										
22		1	2											
23		1												
24			2											
25		1												
26														
27		1												
28														
29														
30	1													

Viele Producte sind indifferent, d. h. es entsprechen ihnen keine Syzyganten und sie kommen auch in keiner als accessorische Bestandtheile vor; solche sind z. B. f^2, i^2, l^2, H^2, il, ip, lm, $f\Delta$, fr, Dl, Cn, Bk, $A\lambda$, $B\mu$, Cv, Dm, Dn, BC, BD u. s. f.

Oppenheim, 15. März 1889.

Algebraische Untersuchungen über Flächen mit gemeinschaftlicher Curve.*)

Von

WILHELM END in München.

In seinem Werke „théorie des équations algébriques“ gab Bézout ein Verfahren an, vermöge dessen sich aus einer beliebigen Anzahl Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten die letzteren bis auf eine eliminiren lassen, indem er zeigte, wie man die Resultante zu bilden hat. Dies lässt sich mit Hilfe gewisser Multiplicatoren (polynomes multiplicateurs) ausführen, mit welchen die linken Seiten der gegebenen Gleichungen multiplicirt und in linearer Form zur Resultante zusammengefügt werden.

Ausgehend von dieser Darstellung hat Jacobi**) für zwei und drei und nach ihm Clebsch***) für beliebig viele Variable einen nach ersterem genannten Satz bewiesen, welcher eine Beziehung zwischen den Schnittpunkten einer Anzahl algebraischer Gebilde ausdrückt und in der Theorie der Abel'schen Functionen eine Rolle spielt, indem sich aus ihm das Abel'sche Theorem ableiten lässt.

Angeregt durch Herrn Prof. Brill versucht nun der Verfasser eine Ausdehnung dieser Sätze auf Functionen von drei Variabeln, welche ausser für eine endliche Anzahl von Werthsystemen der Variabeln noch für ein einfach unendliches Werthsystem verschwinden, geometrisch ausgedrückt, auf den Fall von drei Flächen, welche eine Curve gemeinschaftlich haben.

Die vorliegende Untersuchung zerfällt demgemäss in zwei Haupttheile. Im ersten Theil wird auf Grund der Bedingungen, welche eine Function zu erfüllen hat, damit sie sich durch drei gegebene Functionen, welche für die Coordinaten der Punkte einer Curve und einer Anzahl weiterer Punkte verschwinden, linear darstellen lässt,

*) Vorliegende Abhandlung ist ein Auszug aus der Inauguraldissertation des Verfassers (Tübingen 1887).

**) Crelle J. Bd. 14 und 15.

***) Crelle J. Bd. 63.

gezeigt, dass auch in dem betrachteten Falle eine Resultante hinsichtlich jeder der Variabeln existirt, die mit einer Function, welche für die Punkte der Curve verschwindet, multiplicirt, sich in ähnlicheer Weise darstellen lässt, wie die Resultante in dem von Bézout behandelten Fall.

Der zweite Theil giebt auf Grund der Darstellung der Resultante den Beweis des Jacobi'schen Satzes für den Fall einer gemeinschaftlichen Curve.

I. Theil.

§ 1.

Ueber die Darstellung einer Fläche, welche durch die gemeinschaftliche Curve und die Schnittpunkte dreier anderer Flächen hindurchgeht.

Wir gehen aus von drei Functionen f_1, f_2, f_3 vom Grad μ_1, μ_2, μ_3, welche für die Coordinaten der Punkte irgend einer allgemeinen Curve m. Ordnung vom Geschlechte p verschwinden. Eine allgemeine Curve soll diejenige heissen, welche keine vielfachen Punkte besitzt. Solche Curven werden im Folgenden nach Herrn Nöther mit R_m^p bezeichnet.

Drei Flächen

$$f_1 = 0; \quad f_2 = 0; \quad f_3 = 0,$$

welche eine R_m^p gemeinsam haben, schneiden sich noch in einer Anzahl μ weiterer Punkte. Diese Zahl μ ist:

$$\mu = \mu_1 \mu_2 \mu_3 - m(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 2) + r$$

wo r den Rang der R_m^p bezeichnet. Wir nehmen an, dass die gegebene Curve keine Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt, dass also

$$r = 2m + 2p - 2$$

ist.

Bildet man nun folgenden Ausdruck:

$$F \equiv M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3,$$

wo die M ganz beliebige Multiplicatoren sind, deren Grade die der f auf den Grad n ergänzen, dann sind die Coefficienten dieser M nicht alle verwendbar zur Erfüllung von Bedingungen, welche der Function F auferlegt werden, sondern man kann mit Hilfe des identisch verschwindenden Ausdrucks

$$Af_1 \equiv Bf_2 + Cf_3,$$

welcher noch umgeformt werden kann in:

$$Af_1 \equiv (B + B_1 f_3) f_2 + (C - B_1 f_2) f_3$$

so viele derselben wegschaffen, dass die Zahl der übrig bleibenden mit der Anzahl Bedingungsgleichungen übereinstimmt, welche man durch Vergleichen gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten der Identität

$$F \equiv M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3$$

erhält.

Zu diesem Beweise ist aber erforderlich, dass die Relation

$$A f_1 \equiv B f_2 + C f_3$$

aufgestellt werden kann, d. h. dass eine Fläche $A = 0$ existirt, welche den Theil der Schnittcurve von $f_2 = 0$; $f_3 = 0$ enthält, durch welchen $f_1 = 0$ nicht hindurchgeht. Wir wollen diesen Theil der Schnittcurve mit $R_{m'}^{p'}$ bezeichnen. Ferner ist noch nöthig, dass mit Hilfe von f_3 in B Coefficienten weggeschafft werden können.

Wendet man die von Herrn Nöther*) gegebenen Bedingungen auf den ersten Punkt unserer Forderung an, indem man gleichzeitig den zweiten Punkt derselben berücksichtigt, so erhält man den Satz:

Die Coefficienten jeder Function vom Grade

$$n \geqq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 4,$$

welche sich linear durch die Functionen f_1, f_2, f_3 darstellen lässt, haben $m \cdot n - p + 1 + \mu$ Bedingungen zu erfüllen.

Bezeichnen wir nun durch ν und ν_1 die niedrigsten Grade derjenigen Flächen, welche durch die Curve $R_{m'}^{p'}$ hindurchgehen und sich noch in einer weiteren irreductibeln Curve schneiden, so lässt sich dieser Satz noch auf folgende Weise verallgemeinern:

Eine Function F vom Grade

$$n \geqq \mu_1 + \nu + \nu_1 - 4 \quad \text{und} \quad n \geqq \mu_2 + \mu_3 - 3,$$

welche im Ganzen $m \cdot n - p + 1 + \mu$ unabhängige Bedingungen erfüllt, damit sie für die Coordinaten der Punkte der irreductibeln Curve R_m^p und die weiteren μ Schnittpunkte verschwinde, lässt sich immer in die Form bringen:

$$F \equiv M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3.$$

Erniedrigt sich dagegen der Grad n des Ausdrucks

$$M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3$$

so, dass man keine Fläche vom Grad $n - \mu_1$ durch die Restcurve $R_{m'}^{p'}$ von R_m^p in Bezug auf f_2 und f_3 legen kann, *so stimmt die Zahl der Bedingungen, welchen die Coefficienten desselben genügen müssen, genau überein mit der Zahl der Bedingungen, welche die Coefficienten der Function*

$$M_1' f_1' + M_2' f_2' + M_3' f_3'$$

ebenfalls vom Grade n zu erfüllen haben, wenn f_1', f_2', f_3' drei beliebige Functionen (d. h. solche, welche nicht für die Coordinaten der Punkte einer Curve verschwinden) von denselben Graden, wie f_1, f_2, f_3 bezeichnen.

---

*) Zur Grundlegung der Theorie der algebr. Raumcurven (Abhandlungen der Berl. Academie der Wissenschaften 1882) pag. 47.

§ 2.

Darstellung der Resultante der Schnittpunkte.

Die Sätze, welche im Vorausgehenden abgeleitet wurden, können nun auf die Darstellung der Resultante angewendet werden und es wird sich dabei ergeben, dass es auch für den Fall einer gemeinschaftlichen Curve eine ähnliche Darstellung giebt, wie die im allgemeinen von Bézout aufgestellte.

Bezeichnet man als Resultanten diejenigen Functionen r_x, r_y, r_z je von einer der drei Variabeln, welche gleich 0 gesetzt, die den Functionen f_1, f_2, f_3 gemeinsamen Coordinatenwerthe liefern, sei ferner Φ eine beliebige Function, vom Grade φ, welche für die Coordinaten der Punkte der gemeinsamen Curve verschwinde, dann verschwindet das Product $r_x \Phi$ sowohl für die gemeinsame R_m^p als auch die μ Schnittpunkte.

Um nun die Bedingungen, welche als nothwendig und hinreichend gefunden wurden, damit sich eine Function durch die gegebenen Functionen f_1, f_2, f_3 darstellen lässt, auch für diesen Fall zu erhalten, nehmen wir zunächst an, dass

$$\mu + \varphi \geqq \mu_2 + \mu_3 - 3$$

ist. Dann kann man nachweisen, dass auch die zweite Bedingung bei der Resultante von selbst erfüllt sein muss und es kann daher der Satz ausgesprochen werden:

Sind drei Flächen $f_1 = 0$; $f_2 = 0$; $f_3 = 0$ gegeben, welche eine Curve und eine Anzahl Punkte gemeinsam haben, so lässt sich das Product der Resultante mit einer beliebigen für die Coordinaten der Punkte der Curve verschwindenden Function, deren Grad der Bedingung

$$\mu + \varphi \geqq \mu_2 + \mu_3 - 3$$

genügt, immer durch die Functionen f_1, f_2, f_3 linear darstellen.

§ 3.

Ueber die Darstellung einer Fläche, welche durch eine Raumcurve R_m^p hindurchgeht.

Drei Flächen $f_1 = 0$; $f_2 = 0$; $f_3 = 0$, welche eine allgemeine R_m^p gemeinsam haben, schneiden sich in μ weiteren Punkten. Nimmt man aber eine vierte Fläche $f_4 = 0$ dazu, welche ebenfalls durch die Curve hindurchgeht, so werden diese vier Flächen im allgemeinen keinen Punkt weiter gemeinsam haben. Bildet man nun die bis zum n^{ten} Grade ansteigende Function:

$$F \equiv M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3 + M_4 f_4$$

so kann man, wie im vorausgehenden Falle, nachweisen, dass unter gewissen Bedingungen die Anzahl der wesentlichen Coefficienten mit der Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche man durch Vergleich der gleich hohen Potenzen auf beiden Seiten der Identität erhält, übereinstimmt.

Stellt man auf Grund der früheren Betrachtungen diese Bedingungen auf, so lässt sich der Satz aussprechen:

Sind vier Functionen f_1, f_2, f_3, f_4 gegeben, welche für die Coordinaten der Punkte einer irreductibeln Curve R_m^p, aber für kein weiteres Werthsystem verschwinden, so kann man jede Function F, welche ebenfalls für die Coordinaten der Punkte von R_m^p verschwindet, und deren Grad n den Bedingungen

$$N(n-\mu_1) > \mu, \qquad n \geqq \mu_3 + \mu_4 - 3$$

genügt, in die Form bringen:

$$F \equiv M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3 + M_4 f_4.$$

II. Theil.

§ 1.

Beweis des Jacobi'schen Satzes für Flächen mit gemeinschaftlicher Curve.

Jacobi ging bei dem Beweis des nach ihm benannten Satzes aus von der durch Bézout gegebenen Darstellung der Resultante R_x dreier Flächen, welche keine Schnittcurve gemeinsam haben:

$$R_x \equiv M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3.$$

Bildet man analoge Ausdrücke für die Resultante in y und z, so lässt sich auf Grund dieser Darstellung nachweisen, dass für irgend eine ganze Function U von x, y, z vom $(\mu_1+\mu_2+\mu_3-4)$. Grade, wenn die Functionaldeterminante der f mit R bezeichnet wird:

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{U_i}{R_i} = 0$$

ist, sobald diese Summe über die μ Schnittpunkte der drei Flächen ausgedehnt wird.

Man kann nun auch für den Fall einer gemeinschaftlichen Curve eine ähnliche Relation aufstellen:

Gehen wir aus von der Darstellung:

$$\begin{aligned} M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3 &\equiv r_x \Phi, \\ N_2 f_1 + N_2 f_2 + N_3 f_3 &\equiv r_y \Psi, \\ P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3 &\equiv r_z \mathrm{X} \end{aligned}$$

und bezeichnen die Determinante der Coefficienten M, N, P mit V, so ist zunächst ersichtlich, dass für nicht zusammengehörige Coordinaten der Schnittpunkte x_i, y_k, z_l, wo i, k, l verschieden sind, V verschwinden muss, also:

$$V_{ikl} = 0$$

Für zusammengehörige Coordinaten $x_i y_i z_i$ ergiebt sich ein Werth für V, wenn man die drei Gleichungen nach x, y, z differenzirt und nach der Differenziation entsprechende Wurzeln einsetzt. Bestimmt man daraus den Werth von V, so ist dieser:

$$V_i = \frac{r'_{x_i} r'_{y_i} r'_{z_i} \Phi_i \Psi_i \mathrm{X}_i}{R_i}.$$

Eine weitere Eigenschaft von V erhält man, wenn $\Phi = \Psi = \mathrm{X}$ ist. In diesem Falle wird die Function Φ ein Factor der Determinante V. Diese Eigenschaft lässt sich aber noch verallgemeinern, denn unter der Voraussetzung, dass sich zwei der beliebigen Functionen Φ, Ψ, X z. B. Ψ, X durch f_1, f_2, f_3 und die übrige Function Φ linear darstellen lassen, also von der Form sind:

$$\Psi \equiv \varkappa\, f_1 + \lambda\, f_2 + \mu\, f_3 + \nu\, \Phi,$$
$$\mathrm{X} \equiv \varkappa_1 f_1 + \lambda_1 f_2 + \mu_1 f_3 + \nu_1 \Phi,$$

nehmen die oben aufgestellten Gleichungen folgende Gestalt an:

$$M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3 \equiv r_x \Phi,$$
$$(N_1 - r_y \varkappa\,) f_1 + (N_2 - r_y \lambda\,) f_2 + (N_3 - r_y \mu\,) f_3 \equiv r_y \Phi \nu,$$
$$(P_1 - r_z \varkappa_1) f_1 + (P_2 - r_z \lambda_1) f_2 + (P_3 - r_z \mu_1) f_3 \equiv r_z \Phi \nu_1.$$

Ferner setzen wir voraus, dass der Grad der Function $\Psi \mathrm{X}$ nicht höher sei als $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 4$. Bildet man nun die Determinante V_1 der Coefficienten obiger drei Gleichungen, dann ist dieselbe theilbar durch Φ und lässt sich ausserdem mit Hilfe der Resultanten r_y, r_z in die Determinante V der M, N, P, überführen. V ist also von der Form:

$$V \equiv V_1 + A r_y + B r_z.$$

Daher ergiebt sich:

Stellt man die Resultanten mit Hilfe irgend dreier Functionen Φ, Ψ, X *her, welche den obigen Bedingungen genügen, und bildet die Determinante* V *der Coefficienten, so lässt sich dieselbe mittelst der Resultanten* r_y, r_z *in eine andere Function* V_1 *überführen, welche durch* Φ *theilbar ist.*

Man kann nun mit der Function:

$$\frac{V_1}{r_x r_y r_z \Phi}$$

ganz analog, wie Jacobi im allgemeinen Fall verfahren und findet,

dass die Entwicklung dieses Ausdrucks für alle Terme, welche die negativen Potenzen sämmtlicher Variabeln enthalten, übereinstimmt mit der Entwicklung der Summe:

$$\sum_1^\mu \frac{(V_1)_i}{r'_{x_i} r'_{y_i} r'_{z_i} \Phi_i} \cdot \frac{1}{(x-x_i)(y-y_i)(z-z_i)}.$$

Speciell muss wieder der Coefficient von $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$, welcher bei der Entwicklung der Summe auftritt, verschwinden, weil der Grad von V_1, $3\mu + \varphi - 4$, um 4 niedriger ist, als der von $r_x r_y r_z \Phi$.

Wir erhalten also:

$$\sum_1^\mu \frac{(V_1)_i}{r'_{x_i} r'_{y_i} r'_{z_i} \Phi_i} = 0.$$

Aber weil:

$$(V_1)_i = V_i = \frac{r'_{x_i} r'_{y_i} r'_{z_i} \Phi_i \Psi_i \mathrm{X}_i}{R_i},$$

so folgt:

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{\Psi_i \mathrm{X}_i}{R_i} = 0.$$

wo also $\Psi \cdot \mathrm{X}$ eine Function, höchstens vom $(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 4)^{\text{ten}}$ Grade darstellt, welche doppelt durch die R_m^p hindurchgeht.

Bezeichnet Φ eine Function von möglichst niederem Grade, welche für die Coordinaten der Punkte der Curve, aber nicht die der gemeinsamen Schnittpunkte verschwindet; und lässt sich eine doppelt für die Coordinaten der Punkte der Curve R_m^p verschwindende Function U vom Grade $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 4$ in eine Summe von Producten der folgenden Art zerlegen:

$$\begin{aligned} U \equiv &(A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 \Phi) \cdot (B_1 f_1 + B_2 f_2 + B_3 f_3 + B_4 \Phi) \\ &+ (C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 \Phi) \cdot (D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3 + D_4 \Phi) \\ &+ \cdots, \end{aligned}$$

worin $A_1 A_2 \cdots B_1 B_2 \cdots$ Functionen von x, y, z bedeuten, welche auch theilweise gleich 0 sein können, so kann man auf jedes der Producte den von uns gefundenen Satz anwenden und erhält:

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{U_i}{R_i} = 0.$$

Es ergiebt sich daraus:

Sind $f_1 = 0$; $f_2 = 0$; $f_3 = 0$ *drei durch eine Curve* R_m^p *hindurchgehende Flächen, welche sich in* μ *weiteren Punkten schneiden,* $\Phi = 0$ *eine beliebige andere Fläche, welche ebenfalls durch die gemeinsame*

Curve hindurchgeht, so gilt für jede doppelt durch die R_m^p hindurchgehende Fläche $U=0$ vom $(\mu_1+\mu_2+\mu_3-4)^{\text{ten}}$ Grade, welche sich in obige Form bringen lässt, der Satz:

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \frac{U_i}{R_i} = 0,$$

*wenn man die Summe über alle Schnittpunkte der drei Flächen $f_1=0$; $f_2=0$; $f_3=0$ ausdehnt.**)

§ 2.

Die gemeinsame Curve R_m^p sei der vollständige Schnitt zweier Flächen $\varphi=0$ und $\psi=0$.

In diesem Fall lässt sich der zuletzt hergeleitete Satz auch ohne die früher entwickelten Hilfssätze beweisen.

Die drei Flächen $f_1=0$; $f_2=0$; $f_3=0$ stellen sich in der Form dar:

$$f_1 \equiv m_1\varphi + n_1\psi;\quad f_2 \equiv m_2\varphi + n_2\psi;\quad f_3 \equiv m_3\varphi + n_3\psi.$$

Die μ Schnittpunkte dieser drei Flächen sind aber auch enthalten in dem Schnittpunktsystem der folgenden Flächen:

$$f_1 \equiv m_1\varphi + n_1\psi;\quad f_2 \equiv m_2\varphi + n_2\psi;\quad f_4 \equiv m_3 n_2 - m_2 n_3$$

Dieses System zerfällt in drei Gruppen:

1. Das Schnittpunktsystem von f_1, f_2, f_3.
2. Das von φ, ψ, f_4.
3. Das von f_1, m_2, n_2.

Bezeichnet man die Functionaldeterminante von $f_1 f_2 f_4$ mit R_{124} und ist U eine beliebige Function vom $(\mu_1+\mu_2+\mu_4-4)^{\text{ten}}$ Grade, so gilt der von Jacobi aufgestellte Satz:

---

*) Der soeben ausgesprochene Satz lässt sich auch, wie aus den nachfolgenden Betrachtungen hervorgeht, die ich Herrn Nöther verdanke, *ohne die hier angewendete Constantenabzählung nachweisen, wenn man die Resultate der Abhandlung von Nöther: „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde"* (diese Annalen Bd. 8) *dabei verwendet.*

Zunächst kann man das Abel'sche Theorem für Raumcurven gänzlich unabhängig von der Darstellung von F durch drei oder vier Functionen beweisen. Man braucht dazu 1) den Begriff von eindeutiger Transformation einer ebenen Curve in den Raum; 2) die Erhaltung der endlichen Integrale dabei; 3) die Ueberführung der adjungirten Curven φ aus der Ebene in Flächen φ im Raume (nach § 8 der eben erwähnten Abhandlung).

Beachtet man nun, dass sich aus dem von uns abgeleiteten Satz das Abel'sche Theorem für Raumcurven ableiten lässt und dass auch *umgekehrt* aus diesem unser Satz unmittelbar hervorgeht, so ergiebt diese Schlussreihe einen ohne alle Constantenzählung durchgeführten Beweis unseres Satzes.

$$\sum \frac{U}{R_{124}} = 0$$

wenn die Summe über alle Schnittpunkte von f_1, f_2, f_4 ausgedehnt wird.

Geht aber U durch die Schnittcurven hindurch, welche den Flächen φ, ψ und m_2, n_2 gemeinsam sind, ist also U von der Form:

$$U \equiv U_1 m_2 \varphi + U_2 m_2 \psi + U_3 n_2 \varphi + U_4 n_2 \psi,$$

so verschwindet jedes Glied der Summe für die Punkte der 2. und 3. Gruppe und wir erhalten:

$$\sum_1^{\mu} \frac{U}{R_{124}} = 0$$

ausgedehnt nur noch über die Punkte erster Gruppe.

Da sich aber leicht nachweisen lässt, dass für die Coordinaten dieser Punkte:

$$R_{124} = \frac{n_2}{\varphi} R_{123},$$

so kann der erwähnte Satz direct aus der obigen Relation abgeleitet werden.

München, im April 1889.

Eine charakteristische Eigenschaft der Flächen, deren Linienelement ds durch
$ds^2 = \big(\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)\big)\,(dq_1{}^2 + dq_2{}^2)$
gegeben wird.

Von

PAUL STÄCKEL in Berlin.

1.

Die Flächen, deren Linienelement ds durch

(1) $$ds^2 = \big(\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)\big)\,(dq_1{}^2 + dq_2{}^2)$$

gegeben wird, zeichnen sich aus durch eine von Liouville (Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point peuvent s'intégrer. Liouville's Journal t. XI. S. 345, t. XII. S. 410, 1846) entdeckte Eigenschaft, dass nämlich ihre geodätischen Linien durch Quadraturen bestimmt werden können. Auf diese Eigenschaft wurde Liouville geführt durch Untersuchungen aus der Dynamik. Er fand, dass die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer solchen Fläche — die kurz eine *Liouville'sche Fläche* genannt werden möge — durch Quadraturen ermittelt werden kann, wenn für die betrachtete Bewegung eine Kräftefunction Π der Form:

(2) $$\Pi = \frac{\mu(q_1) + \nu(q_2)}{\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)}$$

existirt. Der Beweis hierfür lässt sich folgendermassen führen (vergl. a. a. O. t. XII. S. 442): Handelt es sich allgemein um die Bewegung eines materiellen Punktes der Masse 1 auf einer Fläche, deren Linienelement ds durch:

(3) $$ds^2 = \mathfrak{E}\,dq_1{}^2 + 2\mathfrak{F}\,dq_1\,dq_2 + \mathfrak{G}\,dq_2{}^2$$

gegeben wird, und existirt für diese Bewegung eine Kräftefunction $\Pi(q_1, q_2)$, so kommt nach den Untersuchungen von Hamilton und Jacobi die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurück auf die Ermittelung einer vollständigen Lösung der „zugehörigen“

(vergl. Lipschitz, Journal für Mathematik. Bd. 74. S. 146) Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung:

$$(4)\qquad H = E W_1^2 + 2 F W_1 W_2 + G W_2^2 - 2(\Pi + \alpha) = 0,$$

in welcher

$$(5)\qquad E = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2},\quad F = \frac{-\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2},\quad G = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}$$

ist, α eine willkürliche Constante bedeutet und die Indices 1, 2, wie stets im Folgenden, die Differentiation nach q_1, q_2 bezeichnen. Ist W eine vollständige Lösung von $H = 0$, d. h. eine solche, welche ausser der mit W additiv verbundenen Constanten noch eine weitere Constante β enthält, so stellen

$$(6)\qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t,\quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \gamma$$

die Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung dar; γ und τ sind neue Constanten, t bedeutet die Zeit. In dem Liouville'schen Falle wird aber die Hamilton'sche Gleichung:

$$H = \frac{W_1^2 - 2\mu(q_1) - 2\alpha\varkappa(q_1) + W_2^2 - 2\nu(q_2) - 2\alpha\lambda(q_2)}{\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)} = 0$$

identisch erfüllt durch:

$$W = \int\sqrt{2\beta + 2\mu(q_1) + 2\alpha\varkappa(q_1)}\, dq_1$$
$$+ \int\sqrt{-2\beta + 2\nu(q_2) + 2\alpha\lambda(q_2)}\, dq_2,$$

sodass die Gleichungen (6) übergehen in:

$$\int\frac{\varkappa(q_1)\,dq_1}{\sqrt{2\beta + 2\mu(q_1) + 2\alpha\varkappa(q_1)}} + \int\frac{\lambda(q_2)\,dq_2}{\sqrt{-2\beta + 2\nu(q_2) + 2\alpha\lambda(q_2)}} = \tau - t,$$
$$\int\frac{dq_1}{\sqrt{2\beta + 2\mu(q_1) + 2\alpha\varkappa(q_1)}} - \int\frac{dq_2}{\sqrt{-2\beta + 2\nu(q_2) + 2\alpha\lambda(q_2)}} = \gamma.$$

Um die Gleichung der geodätischen Linien zu erhalten, hat man $\Pi = 0$, also $\mu(q_1) = 0$, $\nu(q_2) = 0$ zu setzen. Führt man ein

$$C = \frac{\beta}{\alpha},\quad C' = \sqrt{2\alpha}\cdot\gamma,$$

so wird ihre Gleichung:

$$\int\frac{dq_1}{\sqrt{\varkappa(q_1) + C}} + \int\frac{dq_2}{\sqrt{\lambda(q_2) - C}} = C'.$$

Die geodätischen Linien sind also durch Quadraturen bestimmt.

Die Ermittelung einer vollständigen Lösung W der Gleichung $H = 0$ ist Jacobi in mehreren wichtigen Fällen gelungen vermöge der *Methode der Separation der Variablen.* Separation der Variablen

findet statt, wenn es gelingt, solche Variablen q_1, q_2 einzuführen, dass $H=0$ identisch erfüllt wird durch:

$$(7)\qquad W_1 = W_1(q_1;\ \alpha,\beta),\quad W_2 = W_2(q_2;\ \alpha,\beta).$$

Dann hat man sofort die vollständige Lösung:

$$(8)\qquad W = \int W_1 dq_1 + \int W_2 dq_2.$$

Es dürfte daher die Frage berechtigt sein, wieweit die Tragweite dieser Methode reicht, oder mit anderen Worten die Frage: *Welche Hamilton'schen Gleichungen $H=0$ gestatten Separation der Variablen?* Die Antwort auf diese Frage soll im Folgenden gegeben werden.

Es ist klar, dass, wenn eine Gleichung $H=0$ Separation der Variablen gestattet, dasselbe auch gilt von jeder Gleichung $H'=0$, die aus ihr hervorgeht durch eine Transformation:

$$(\mathrm{A})\qquad p_1 = \Phi(q_1),\quad p_2 = \Omega(q_2).$$

Hamilton'sche Gleichungen, welche durch eine solche Transformation in einander übergehen, sind, wenn es sich um Separation der Variablen handelt, nicht als wesentlich verschieden anzusehen, und es genügt, wenn man *eine* dieser Gleichungen kennt.

Dies dürfte begründen, warum ich die Antwort auf jene Frage in der Form ausspreche, dass *alle* Hamilton'schen Gleichungen $H=0$, welche Separation der Variablen gestatten, *gegeben werden* durch die drei *wesentlich* verschiedenen Gleichungen:

$$\mathrm{I.}\qquad \frac{W_1^2+W_2^2}{\varkappa(q_1)+\lambda(q_2)} - 2\left(\frac{\mu(q_1)+\nu(q_2)}{\varkappa(q_1)+\lambda(q_2)}+\alpha\right) = 0;$$

$$\mathrm{II.}\quad \mathrm{a)}\ E(q_1)W_1^2 + 2F(q_1)W_1W_2 + G(q_1)W_2^2 - 2\big(\Pi(q_1)+\alpha\big) = 0,$$

$$\mathrm{b)}\ E(q_2)W_1^2 + 2F(q_2)W_1W_2 + G(q_2)W_2^2 - 2\big(\Pi(q_2)+\alpha\big) = 0;$$

$$\mathrm{III.}\qquad \frac{W_1^2 + 2\cos\big(\sigma(q_1)+\tau(q_2)\big)W_1W_2 + W_2^2}{\big[\sin\big(\sigma(q_1)+\tau(q_2)\big)\big]^2} - 2\alpha = 0.$$

Dass diese Gleichungen die verlangte Eigenschaft wirklich besitzen, ist leicht zu erkennen. Man genügt ihnen nämlich beziehungsweise durch:

$$\mathrm{I'.}\qquad W = \int\sqrt{2\beta + 2\mu(q_1) + 2\alpha\varkappa(q_1)}\,dq_1 + \int\sqrt{-2\beta + 2\nu(q_2) + 2\alpha\lambda(q_2)}\,dq_2;$$

$$\mathrm{II'.}\quad \mathrm{a)}\ W = \beta\left\{q_2 + \int\frac{F+\sqrt{2E\beta^{-2}(\Pi+\alpha)-(EG-F^2)}}{E}\,dq_1\right\},$$

$$\mathrm{b)}\ W = \beta\left\{q_1 + \int\frac{F+\sqrt{2G\beta^{-2}(\Pi+\alpha)-(EG-F^2)}}{G}\,dq_2\right\};$$

$$\mathrm{III'.}\qquad W = \sqrt{2\alpha}\left(\int\cos\big(\sigma(q_1)+\beta\big)dq_1 + \int\cos\big(\tau(q_2)-\beta\big)dq_2\right).$$

Die Gleichungen I—III gehören zu Flächen, deren Linienelemente beziehungsweise gegeben werden durch:

$$\text{I}''. \quad ds^2 = \big(\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)\big)\,(dq_1^2 + dq_2^2);$$

$$\text{II}''. \quad \text{a)}\ ds^2 = \mathfrak{E}(q_1)\,dq_1^2 + 2\mathfrak{F}(q_1)\,dq_1 dq_2 + \mathfrak{G}(q_1)\,dq_2^2,$$

$$\text{b)}\ ds^2 = \mathfrak{E}(q_2)\,dq_2^2 + 2\mathfrak{F}(q_2)\,dq_1 dq_2 + \mathfrak{G}(q_2)\,dq_2^2.$$

$$\text{III}''. \quad ds^2 = dq_1^2 - 2\cos\big(\sigma(q_1) + \tau(q_2)\big)\,dq_1 dq_2 + dq_2^2.$$

Man sieht unmittelbar, dass die Flächen I″ gerade die Liouville'schen Flächen sind. Dasselbe gilt aber auch von den Flächen II″ und III″. Denn die Substitutionen:

$$\text{II}^* \quad \text{a)}\ p_1 = \int \mathfrak{G}^{-1}(q_1)\sqrt{\mathfrak{E}(q_1)\,\mathfrak{G}(q_1) - \mathfrak{F}^2(q_1)}\,dq_1,$$

$$p_2 = \int \mathfrak{F}(q_1)\,\mathfrak{G}^{-1}(q_1)\,dq_1 + q_2,$$

$$\text{b)}\ p_1 = q_1 + \int \mathfrak{F}(q_2)\,\mathfrak{G}^{-1}(q_2)\,dq_2,$$

$$p_2 = \int \mathfrak{G}^{-1}(q_2)\sqrt{\mathfrak{E}(q_2)\,\mathfrak{G}(q_2) - \mathfrak{F}^2(q_2)}\,dq_2;$$

$$\text{III}^* \quad p_1 = \int \cos\sigma(q_1)\,dq_1 - \int \cos\tau(q_2)\,dq_2,$$

$$p_2 = \int \sin\sigma(q_1)\,dq_1 + \int \sin\tau(q_2)\,dq_2$$

führen die betrachteten Quadrate der Linienelemente beziehungsweise über in solche der Form:

$$\varkappa(p_1)\,(dp_1^2 + dp_2^2), \quad \lambda(p_2)\,(dp_1^2 + dp_2^2), \quad dp_1^2 + dp_2^2.$$

Die Flächen II″ sind daher die auf Rotationsflächen abwickelbaren Liouville'schen Flächen, die Flächen III″ die Flächen vom Krümmungsmasse Null.

Hieraus ergiebt sich das Theorem:

Die Liouville'schen Flächen haben die charakteristische Eigenschaft, dass die zu ihrem Linienelemente gehörige Hamilton'sche Gleichung (bei geeigneter Wahl der Kräftefunction) Separation der Variablen gestatten kann.

Man erkennt ferner, dass bei Anwendung der Transformationen II* und III* die bezüglichen Hamilton'schen Gleichungen, wenn man nachträglich p_1, p_2 mit q_1, q_2 vertauscht, übergehen in Gleichungen der Form:

$$\text{II}_{\prime}. \quad \text{a)} \quad \frac{W_1^2 + W_2^2}{\varkappa(q_1)} - 2\left(\frac{\mu(q_1)}{\varkappa(q_1)} + \alpha\right) = 0,$$

$$\text{b)} \quad \frac{W_1^2 + W_2^2}{\lambda(q_2)} - 2\left(\frac{\nu(q_2)}{\lambda(q_2)} + \alpha\right) = 0;$$

$$\text{III}_{\prime}. \quad W_1^2 + W_2^2 - 2\alpha = 0.$$

Hieraus aber ergiebt sich der Satz:

Wenn eine Hamilton'sche Gleichung $H = 0$ Separation der Variablen gestattet, so giebt es stets Transformationen der Form:

$$\text{(B)} \qquad p_1 = \Phi(q_1) + \Psi(q_2), \quad p_2 = \mathrm{X}(q_1) + \Omega(q_2),$$

welche diese Gleichung überführen in eine der Gestalt:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial p_2}\right)^2 - \big(\mu(p_1) + 2\alpha\varkappa(p_1) + \nu(p_2) + 2\alpha\lambda(p_2)\big) = 0,$$

die dem Quadrate des Linienelementes einer Liouville'schen Fläche:

$$ds^2 = \big(\varkappa(p_1) + \lambda(p_2)\big)\,(dp_1^2 + dp_2^2)$$

entstammt.

Um Missverständnissen vorzubeugen, bemerke ich ausdrücklich, dass sehr wohl auch andere Transformationen als solche der Gestalt (B) die verlangte Ueberführung leisten können. Solche anderen Transformationen erhält man, wenn man nach den Substitutionen

$$\mathfrak{p}_1 = f_1(p_1, p_2), \quad \mathfrak{p}_2 = f_2(p_1, p_2)$$

fragt, welche die quadratische Differentialform:

$$\big(\varkappa(p_1) + \lambda(p_2)\big)\,(dp_1^2 + dp_2^2)$$

in eine quadratische Differentialform derselben Gestalt:

$$\big(k(\mathfrak{p}_1) + l(\mathfrak{p}_2)\big)\,(d\mathfrak{p}_1^2 + d\mathfrak{p}_2^2)$$

überführen. Liouville hat diese Frage für die Form $dp_1^2 + dp_2^2$ a. a. O. vollständig beantwortet; vergl. auch Darboux, Leçons sur les surfaces, Livre IV, Chapitre IX.

Was die Discussion der Integralgleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t, \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \gamma$$

anlangt, die aus den Gleichungen I'., II'. und III'. entspringen, so sei bezüglich derselben auf die Abhandlungen von Herrn Weierstrass (Monatsberichte der Berliner Akademie. 1866), Herrn Staude (diese Annalen, Bd. XXIX, S. 469. 1887), sowie auf meine Inauguraldissertation: *Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche* (Berlin, 1885) verwiesen.

Bevor ich zu der Herleitung der angegebenen Resultate übergehe, habe ich noch zu erwähnen, dass, wie mir nachträglich bekannt geworden ist, die Frage, wann eine Hamilton'sche Gleichung Separation

der Variablen gestattet, bereits von Herrn Morera (Atti della R. Accademia di Torino. Vol. XVI. 1880) behandelt worden ist. Die von Herrn Morera angewandte Beweismethode liefert jedoch nur die Gleichungen I., II., *nicht die Gleichung* III. Später hat Herr Morera (Giornale della società di Lettere e Conversazioni scientifiche di Genova. 1887) die Frage untersucht, wann eine Differentialgleichung der allgemeineren Form:

$$\mathfrak{H}(W_1, W_2; q_1, q_2) = 0$$

Separation der Variablen gestattet. Er findet als nothwendige und hinreichende Bedingung das Bestehen einer Functionalgleichung der Form:

$$\varphi\big(\psi(\mathfrak{H}, W_1, q_1), \chi(\mathfrak{H}, W_2, q_2)\big) = 0.$$

Dieses elegante Theorem gestattet, Beispiele von partiellen Differentialgleichungen, die Separation der Variablen zulassen, mit Leichtigkeit herzustellen; allein es scheint mir keinen Nutzen zu gewähren, wenn es sich darum handelt zu entscheiden, ob eine bestimmte vorgelegte Gleichung Separation zulässt oder nicht zulässt.

2.

Es handelt sich um die Gleichung:

(4) $$H = E W_1^2 + 2 F W_1 W_2 + G W_2^2 - 2(\Pi + \alpha) = 0.$$

Hierin ist α eine willkürliche Constante. Die E, F, G, Π sind Functionen der Variablen q_1, q_2, und zwar sind E, G, $EG - F^2$ im Allgemeinen positiv und können nur für besondere Werthsysteme q_1, q_2 verschwinden. Es soll ermittelt werden, wie beschaffen diese Functionen sein müssen, damit die Gleichung $H = 0$ identisch erfüllt wird durch:

(7) $$W_1 = W_1(q_1; \alpha, \beta), \quad W_2 = W_2(q_2; \alpha, \beta).$$

Dabei ist klar, dass, wenn *eine* der Grössen W_1, W_2 von β abhängt, dieses nothwendig auch von der anderen gilt. Also hängen *beide* von β ab.

Setzt man $W_2 = W_2(q_2; \alpha, \beta)$ in (4) ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für W_1, von der eine Wurzel $W_1 = W_1(q_1; \alpha, \beta)$ sein soll. Diese Wurzel genügt mithin auch der Gleichung $H_2 = 0$, folglich verschwindet die Resultante R von H und H_2 nach W_1. Nun ist allgemein die Resultante der beiden quadratischen Gleichungen:

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0, \quad A'x^2 + 2B'x + C' = 0$$

gegeben durch:

$$(AC' - A'C)^2 - 4(AB' - A'B)(BC' - B'C).$$

Hieraus erhält man:

(9) $$R = (aW_2^2 + b) W_{22}^2 + (cW_2^2 + d) W_2 W_{22} + eW_2^4 + fW_2^2 + g = 0,$$

und zwar ist:

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad a &= 4EG(EG - F^2),\\
b &= -8EF^2(\Pi + \alpha),\\
c &= 4(EG_2 - GE_2)(EG - F^2),\\
d &= 8[-E(EG-F^2)\Pi_2 + (EGE_2 - 2EFF_2 + F^2E_2)(\Pi+\alpha)],\\
e &= (EG_2 - GE_2)^2 + 4(EF_2 - FE_2)(GF_2 - FG_2),\\
f &= 4[2(EF_2 - FE_2)(F\Pi_2 - (\Pi+\alpha)F_2)\\
&\qquad - (EG_2 - GE_2)(E\Pi_2 - (\Pi+\alpha)E_2)],\\
g &= 4\big(E\Pi_2 - (\Pi+\alpha)E_2\big)^2.
\end{aligned}
$$

Setzt man $W_2^2 = U$, so lässt sich die Gleichung $R = 0$ ansehen als quadratische Gleichung für U_2:

$$(11)\qquad (aU + b)\,U_2^2 + 2U(cU + d)\,U_2 + 4U(eU^2 + fU + g) = 0.$$

Jetzt kann $b = 0$ sein. Dieser Fall ist besonders zu betrachten und möge als *Fall* 1. bezeichnet werden. Sonst darf man durch b dividiren. Dann ergebe sich:

$$(12)\qquad \mathfrak{R} = (\mathfrak{a}U + 1)\,U_2^2 + 2U(\mathfrak{c}U + \mathfrak{d})\,U_2 + 4U(\mathfrak{e}U^2 + \mathfrak{f}U + \mathfrak{g}) = 0.$$

Da U_2 nur von q_2, α, β abhängt, so muss es auch der Gleichung $\mathfrak{R}_1 = 0$ genügen, es muss daher die Resultante $\mathfrak{S}$ der beiden quadratischen Gleichungen $\mathfrak{R} = 0$ und $\mathfrak{R}_1 = 0$ für U_2 identisch verschwinden. Folglich ist:

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad 0 = \;&[(\mathfrak{a}U + 1)(\mathfrak{e}_1U^2 + \mathfrak{f}_1U + \mathfrak{g}_1) - \mathfrak{a}_1U(\mathfrak{e}U^2 + \mathfrak{f}U + \mathfrak{g})]^2\\
&- U[(\mathfrak{a}U + 1)(\mathfrak{c}_1U + \mathfrak{d}_1) - \mathfrak{a}_1U(\mathfrak{c}U + \mathfrak{d})]\\
&\times\; [(\mathfrak{c}U + \mathfrak{d})(\mathfrak{e}_1U^2 + \mathfrak{f}_1U + \mathfrak{g}_1) - (\mathfrak{c}_1U + \mathfrak{d}_1)(\mathfrak{e}U^2 + \mathfrak{f}U + \mathfrak{g})].
\end{aligned}
$$

Die Gleichung (13) besagt, dass eine ganze Function 6^{ten} Grades von $U(q_2;\, \alpha, \beta)$ identisch verschwindet. Die Coefficienten der einzelnen Potenzen von U, die nach den Exponenten mit $\mathfrak{S}^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, 6)$ bezeichnet werden sollen, sind Functionen von q_1, q_2 und α, während $U = W_2^2$ nothwendig auch von β abhängt. Folglich zieht die Gleichung $\mathfrak{S} = 0$ auch die Gleichungen $\mathfrak{S}^{(i)} = 0$ für $i = 0, 1, \ldots, 6$ nach sich.

Man erhält $\mathfrak{S}^{(0)} = \mathfrak{g}_1^2$. Also ist

$$(14)\qquad \mathfrak{g}_1 = 0.$$

Weiter ist $\mathfrak{S}^{(1)} = \mathfrak{g}\mathfrak{d}_1^2$. Dass $\mathfrak{g} = 0$ ist, möge als *Fall* 4. bezeichnet und von jetzt ab ausgeschlossen werden. Dann ist:

$$(15)\qquad \mathfrak{d}_1 = 0,$$

und man erhält der Reihe nach:

$$(16)\quad \mathfrak{S}^{(2)} = (\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{g})^2 \qquad = 0, \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{a}\mathfrak{g} + \varphi(q_2),$$

$$(17)\quad \mathfrak{S}^{(3)} = \mathfrak{g}(\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b})^2 \qquad = 0, \qquad \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \gamma(q_2),$$

$$(18)\quad \mathfrak{S}^{(4)} = \big(\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{a}_1\varphi(q_2)\big)^2 = 0, \qquad \mathfrak{e} = \mathfrak{a}\varphi(q_2) + \varepsilon(q_2),$$

$$(19)\quad \mathfrak{S}^{(5)} = -\,\mathfrak{a}_1{}^2\gamma^2(q_2) \qquad = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt entweder $\mathfrak{a}_1 = 0$, und *dann sind alle* 6 *Ausdrücke* $\mathfrak{a}$ *bis* $\mathfrak{g}$ *Functionen von* q_2 *und* α *allein — dies sei Fall* 2. —, oder, wenn $\mathfrak{a}_1$ von Null verschieden ist, $\gamma = 0$. Daraus folgt:

$$(20)\qquad \mathfrak{S}^{(6)} = (\mathfrak{a}_1\varepsilon)^2 = 0, \qquad \varepsilon = 0,$$

sodass man in diesem Falle hat:

$$(21)\quad \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b}_1 = 0, \quad \mathfrak{e} = \mathfrak{a}\varphi(q_2), \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{a}\mathfrak{g} + \varphi(q_2), \quad \mathfrak{g}_1 = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{a}U + 1)\big(U_2{}^2 + 2\mathfrak{b}UU_2 + 4U(\varphi U + \mathfrak{g})\big) = 0,$$

sodass U_2 der Gleichung

$$\overline{\mathfrak{R}} = U_2{}^2 + 2\mathfrak{b}UU_2 + 4U(\varphi U + \mathfrak{g}) = 0$$

genügt, in der jetzt $\mathfrak{b}$, φ, $\mathfrak{g}$ nur von q_2 und α abhängen. Wenn dies eintritt, so soll der *Fall* 3. statthaben.

Es dürfte angebracht sein zu zeigen, dass auch Ueberlegungen ganz anderer Natur auf die vier Möglichkeiten, die sich ergaben, mit Nothwendigkeit führen. Schliesst man von der Gleichung (11) ausgehend den *Fall* 1. ($b = 0$) aus, so sollen die Gleichungen $\mathfrak{R} = 0$ und $\mathfrak{R}_1 = 0$ mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel $U_2(q_2;\, \alpha, \beta)$ haben. Dies kann auf verschiedene Arten stattfinden. Die Gleichung $\mathfrak{R}_1 = 0$ besteht entweder identisch für jeden Werth, den man der Grösse U_2 beilegt, oder definirt U_2 als Function ihrer Coefficienten. Im ersten Falle verschwinden alle Coefficienten von $\mathfrak{R}_1$ identisch, folglich hängen die $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{g}$ nur von q_2 ab, es findet also *Fall* 2. statt. Im zweiten Fall haben $\mathfrak{R} = 0$ und $\mathfrak{R}_1 = 0$ entweder *beide* Wurzeln oder nur *eine* gemeinschaftlich. Sind beide Wurzeln gemeinschaftlich, so muss identisch sein:

$$\frac{U(\mathfrak{c}U + \mathfrak{b})}{\mathfrak{a}U + 1} = \frac{\mathfrak{c}_1U + \mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}, \qquad \frac{\mathfrak{e}U^2 + \mathfrak{f}U + \mathfrak{g}}{\mathfrak{a}U + 1} = \frac{\mathfrak{e}_1U^2 + \mathfrak{f}_1U + \mathfrak{g}_1}{\mathfrak{a}_1U},$$

und hieraus ergiebt sich sofort *Fall* 3. Ist endlich nur eine Wurzel gemeinschaftlich, so ist sie bekanntlich eine rationale Function der Coefficienten von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$, also eine rationale Function von U, und die Gleichung $\mathfrak{R} = 0$ zerfällt in zwei in Bezug auf U_2 lineare Factoren, deren Coefficienten nach einem bekannten Satze ganze rationale Functionen von U sind. Dann aber kann nur sein:

$$\mathfrak{R} = \big((\mathfrak{a}U + 1)\,U_2 + \alpha U^2 + \beta U + \gamma\big)\,(U_2 + \delta U + \varepsilon).$$

Die Vergleichung der Coefficienten liefert, da die so entstehenden Gleichungen identisch in U bestehen müssen, sofort $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$, woraus $\mathfrak{g} = 0$ folgt, so dass *Fall* 4. sich ergiebt.

3.

Fall 1. Die Gleichung

$$b = -8EF^2(\Pi + \alpha) = 0$$

kann nur durch $F = 0$ erfüllt werden. Setzt man $F = 0$ in (10) ein, so erhält man für R den Ausdruck:

$$\left[2EG\,W_2 W_{22} + (EG_2 - GE_2)\,W_2^2 - 2\left(E\Pi_2 - (\Pi + \alpha)\,E_2\right)\right]^2;$$

es ist daher:

$$\overline{R} = W_{22} - \frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{E} - \frac{G_2}{G}\right)W_2^2 + \frac{E\Pi_2 - (\Pi + \alpha)\,E_2}{EG} = 0.$$

Bildet man $\overline{R}_1 = 0$, so erkennt man, dass nothwendig

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{E_2}{E} - \frac{G_2}{G}\right) = 0$$

ist. Hieraus folgt durch Integration:

$$E\varphi(q_1) = G\psi(q_2).$$

Denkt man sich jetzt die Transformation der Form (A) gemacht:

$$p_1 = \int \frac{dq_1}{\sqrt{\varphi(q_1)}}, \quad p_2 = \int \frac{dq_2}{\sqrt{\psi(q_2)}},$$

so bleibt einerseits die Separation der Variablen bestehen, andererseits wird $\left(\frac{\partial W}{\partial p_1}\right)^2$ in der transformirten Gleichung $H = 0$ mit $E\varphi(q_1)$, $\left(\frac{\partial W}{\partial p_2}\right)^2$ mit $G\psi(q_2)$ multiplicirt. Man darf daher annehmen, dass von vorn herein

$$E = G = M$$

ist. Setzt man dies in $\overline{R}_1 = 0$ ein, so erkennt man, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2}\,\frac{\Pi + \alpha}{M} = 0$$

ist, woraus durch Integration

$$\frac{\Pi + \alpha}{M} = \mu(q_1) + \nu(q_2) + \alpha\left[\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)\right]$$

folgt. Mithin ist wegen der Willkürlichkeit von α:

$$M = \frac{1}{\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)}, \quad \Pi = \frac{\mu(q_1) + \nu(q_2)}{\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)},$$

man kommt also genau auf die Gleichung I.

4.

Fall 2. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ hängen allein von q_2 ab. Da $\mathfrak{a}$ nicht identisch verschwinden kann, darf man bilden:

$$\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}} = \frac{G_2}{G} - \frac{E_2}{E},$$

und erschliesst hieraus genau so, wie bei Fall 1., dass von vorn herein

$$E = G = M$$

gesetzt werden darf. Dann aber ist $\mathfrak{c} = 0$. Da weiter auch

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} = -\frac{2F^2(\Pi + \alpha)}{M(M^2 - F^2)} = -2\left(\frac{F^2\Pi}{M(M^2 - F^2)} + \alpha\frac{F^2}{M(M^2 - F^2)}\right)$$

nur von q_2 und α abhängt, so ist erstens

$$F^2\varphi(q_2) = M(M^2 - F^2), \tag{22}$$

wobei $\varphi(q_2)$ von Null verschieden und positiv ist, und zweitens Π eine Function von q_2 allein. Bildet man nun:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = -2\frac{\Pi_2}{M} + \frac{(M^2 + F^2)M_2 - 2MFF_2}{M^2(M^2 - F^2)}(\Pi + \alpha),$$

so ist der Coefficient von α für sich eine Function von q_2 allein, und, da auch Π nur von q_2 abhängen kann, nothwendig

$$\Pi_2 = \psi(q_2)\,M. \tag{23}$$

Ist $\psi(q_2)$ von Null verschieden, so hängen nach (22) und (23) M und F nur von q_2 ab, man kommt daher auf eine Hamilton'sche Gleichung der Form II. b). Ist aber $\psi = 0$, so ist Π constant, darf also gleich Null gesetzt werden. Eliminirt man F aus Gl. (22) und der mit Hülfe von $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ sich ergebenden Gleichung:

$$(M^2 + F^2)\,M_2 - 2MFF_2 = M^2(M^2 - F^2)\,\delta(q_2),$$

so erhält man:

$$M_2\varphi^2 = M^2(\delta\varphi M + \delta\varphi^2 - \varphi_2). \tag{24}$$

Nimmt man hinzu die aus dem Ausdrucke für $\mathfrak{g}$ folgende Gleichung:

$$M_2^2 = \gamma^2(q_2)\frac{M^4}{M + \varphi}, \tag{25}$$

in der γ nicht identisch verschwinden kann (denn aus $\gamma = 0$ folgt $\mathfrak{g} = 0$), so ergiebt die Elimination von M_2 aus (24) und (25):

$$(M + \varphi)\,(\delta\varphi M + \delta\varphi^2 - \varphi_2)^2 = \varphi^4\gamma^2,$$

wodurch M als Function von q_2 bestimmt wird, da, wie man sich leicht überzeugt, nicht alle Coefficienten dieser Gleichung für M identisch verschwinden können. Die Ausnahme $\psi = 0$ führt also auf eine besondere Form II. b).

5.

Fall 3. W_{22} genügt der Gleichung:

$$\mathfrak{R} = W_{22}^2 + \mathfrak{b}\, W_2 W_{22} + \varphi\, W_2^2 + \mathfrak{g} = 0.$$

Dann müssen die Relationen (21) bestehen. Die Relation $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ lautet explicite:

$$G(EG - F^2)\,\Pi_2 = (G^2 E_2 - 2GFF_2 + F^2 G_2)\,(\Pi + \alpha),$$

sie zieht daher die Gleichungen nach sich:

$$\Pi_2 = 0, \tag{26}$$

$$G^2 E_2 - 2GFF_2 + F^2 G_2 = 0. \tag{27}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen geht die Relation $\mathfrak{b}_1 = 0$ über in:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{E_2}{E} - \frac{G_2}{G}\right) = 0,$$

woraus wie früher:

$$E = G = M$$

gefolgert werden darf. Hierdurch wird $\mathfrak{b} = 0$, und (27) geht über in:

$$(M^2 + F^2)\,M_2 = 2MFF_2. \tag{27'}$$

Da $\mathfrak{g}$ von Null verschieden ist, folgt aus $\mathfrak{g}_1 = 0$:

$$M_2^2(\Pi + \alpha) = MF^2\psi(q_2)\big(\chi(q_2) + \alpha\big),$$

wo $\psi(q_2)$ von Null verschieden ist. Da nach (26) $\Pi_2 = 0$ ist, kann diese Gleichung nur erfüllt werden, indem Π constant, also $\Pi = 0$ ist. Sie geht dann über in

$$M_2^2 = \psi(q_2)\, MF^2. \tag{28}$$

Jetzt wird die Relation $\mathfrak{e} = \mathfrak{a}\varphi(q_2)$:

$$(MF_2 - FM_2)^2 = \varphi(q_2)\, M^2(M^2 - F^2). \tag{29}$$

Eliminirt man M_2 und F_2 aus (27'), (28) und (29), so resultirt:

$$F^2 = M^2 - 4\,\frac{\varphi}{\psi}\, M. \tag{30}$$

Setzt man dies in (27') ein, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = 0.$$

Da nun F und M bis auf denselben constanten Proportionalitätsfactor bestimmt sind, darf man nach (30) $\frac{\varphi}{\psi}$ irgend einen constanten Werth beilegen. Es sei $\psi = 4\varphi$. Dann wird:

$$F^2 = M^2 - M, \tag{30'}$$

und aus (28) ergiebt sich:

$$M_2^2 = 4\varphi(M^3 - M^2). \tag{31}$$

Die übrigbleibende Relation $\mathfrak{f} = \mathfrak{a}\mathfrak{g} + \varphi(q_2)$ ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, von selbst erfüllt.

Substituirt man die erhaltenen Resultate, so wird:

$$\overline{\mathfrak{R}} = W_{22}^2 + \varphi(q_2)\, W_2{}^2 - 2\alpha\varphi(q_2) = 0.$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung für W_2 hat kein singuläres Integral, und ihr allgemeines Integral ist in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$W_2 = \sqrt{2\alpha}\cos\big(\tau(q_2) + \beta\big)\cdot$$

Ebenso hat die Differentialgleichung erster Ordnung für M (31) kein singuläres Integral, und ihr allgemeines Integral ist entsprechend:

$$M = \frac{1}{\big[\sin\big(\sigma(q_1) + \tau(q_2)\big)\big]^2}.$$

Daraus ergiebt sich vermöge (30′):

$$F = \frac{\cos\big(\sigma(q_1) + \tau(q_2)\big)}{\big[\sin\big(\sigma(q_1) + \tau(q_2)\big)\big]^2},$$

man erhält also genau die Hamilton'sche Gleichung III.

6.

Fall 4: $\mathfrak{g} = 0$. Ist $\mathfrak{g} = 0$, so denke man sich in den Betrachtungen von Nummer 2. W_2 statt W_1 bevorzugt. Dann ergiebt sich aus $H = 0$ und $H_1 = 0$ eine Resultante nach W_2, die wieder eine quadratische Gleichung und zwar für $\frac{\partial W_1{}^2}{\partial q_1}$ ist. Die Discussion dieser Gleichung liefert 4 Möglichkeiten, welche den vier eben durchgenommenen entsprechen. Die ersten drei Fälle führen beziehungsweise zu den Hamilton'schen Gleichungen I., II. a), III. Es bleibt übrig der vierte Fall, welcher durch eine Gleichung $\mathfrak{g}' = 0$ charakterisirt ist, die aus $\mathfrak{g} = 0$ hervorgeht, indem man gleichzeitig E und G und die Indices 1 und 2 vertauscht. Etwas Neues kann daher nur kommen, wenn *gleichzeitig* $\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{g}' = 0$ ist.

Es sei also:

$$E\Pi_2 - (\Pi + \alpha)\, E_2 = 0,$$
$$G\Pi_1 - (\Pi + \alpha)\, G_1 = 0.$$

Hieraus folgt zunächst, dass E nur von q_1, G nur von q_2 abhängen kann. Man darf daher

$$E = G = 1$$

setzen. Weiter ergiebt sich, dass $\Pi = 0$ gesetzt werden darf. Daher ist:

$$\mathfrak{a} = -\frac{1}{2\alpha}\frac{F^2}{1-F^2},\quad \mathfrak{b} = 1,\quad \mathfrak{c} = 0,\quad \mathfrak{d} = 2\frac{F_2}{F},\quad \mathfrak{e} = -\frac{1}{8\alpha}\mathfrak{d}^2,\quad \mathfrak{f} = \frac{1}{4}\mathfrak{d}^2,\quad \mathfrak{g} = 0.$$

Da $F_2 = 0$ auf eine Gleichung der Form II. a) führt, darf man annehmen, dass $\mathfrak{b}$ und damit auch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ von Null verschieden sind. Bildet man nunmehr die Resultante $\mathfrak{S}$, so verschwinden identisch $\mathfrak{S}^{(0)}$, $\mathfrak{S}^{(1)}$ und $\mathfrak{S}^{(2)}$, und es wird:

$$\mathfrak{S}^{(3)} = -\frac{1}{8\alpha}\frac{\mathfrak{b}^2\mathfrak{b}_1^2}{F^2} = 0,$$

woraus $\mathfrak{b}_1 = 0$ folgt; mithin hängen auch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ nur von q_2 ab. Weiter ist:

$$\mathfrak{S}^{(4)} = \mathfrak{a}_1^2\mathfrak{c}^2 = 0,$$

mithin $\mathfrak{a}_1 = 0$, also $F_1 = 0$, und dies führt auf eine Gleichung der Form II. b).

Damit ist bewiesen, dass die Hamilton'schen Gleichungen I, II. a), II. b) und III die *einzigen* sind, welche Separation der Variablen gestatten können. Dass sie aber auch wirklich diese Eigenschaft haben, ist bereits in Nummer 1. gezeigt worden.

Berlin, im Februar 1889.

Nachtrag
zu dem Aufsatze „Ueber eine durchaus differentiirbare, stetige Function mit Oscillationen in jedem Intervalle“ (Annalen, Band XXXIV, pag. 161 ff.)

Von

Alfred Köpcke in Ottensen.

Ich sehe mich genöthigt, die Constructionsvorschrift für die Functionen $\mathfrak{H}_n(x)$ etwas verwickelter zu gestalten, als sie in meiner oben citirten Abhandlung S. 164—166 lautet. Denn für die dort gegebene Vorschrift ist der S. 166—167 geführte Beweis, dass $\mathfrak{H}_n'(x)$ eine convergente Reihe sei, falsch (abgesehen davon, dass S. 167 in der ersten Zeile 10^{n+1} statt 10^n stehen musste); der Schluss S. 167 von Zeile 3 auf Zeile 4 ist nämlich nur richtig, wenn sämmtliche A_n^{s+1}, $A_{n+1}^{s'+1}$ ... mit B_n^x und B_{n+m}^x gleiches positives Zeichen haben; falls für kein noch so grosses n alle B_{n+m}^x gleiches Zeichen besitzen, wird wahrscheinlich keine Convergenz stattfinden, also auch $\mathfrak{H}(x)$ nicht gliedweise differentiirt werden können. Ich will darum die Constructionsvorschrift verändern und beweisen, dass für die so verbesserten Functionen $\mathfrak{H}_n(x)$ die Grössen B_n^x unter allen Umständen, auch wenn sie bis in's Unendliche das Zeichen wechseln sollten, einen Grenzwerth besitzen.

Die Function $\mathfrak{H}_0(x)$ möge den S. 165 geschilderten Kreisbogen darstellen, auch $\mathfrak{H}_1(x)$ sei nach der dort gegebenen Anweisung construirt. Dann aber theile man die Abscissenstrecke von 0 bis 1 in Intervalle ein durch alle Werthe $\xi_0^1 \xi_0^2$ . . ., in welchen $\mathfrak{H}_1'(x) = 0$ ist, einerlei, ob diese Gleichung für $\mathfrak{H}_1(x)$ ein Maximum, Minimum oder einen Wendepunkt bedeutet (sollten gar ganze *Strecken* vorkommen, in denen $\mathfrak{H}_1'(x)$ verschwindet, also $\mathfrak{H}_1(x)$ constant ist, so zähle man deren Endpunkte mit auf); weiter theile man jedes dieser Intervalle der Reihe nach in 2, 4, 8 . . . gleiche Theile; da $\mathfrak{H}_1'(x)$ eine überall stetige und endliche Function ist, muss schliesslich in

jedem Intervalle der Fall eintreten, dass der Werth dieses Differentialquotienten in keinem der entstehenden Theile um mehr als $\frac{1}{10}$ schwankt; es sei dafür nöthig, dass das erste Intervall in mindestens 2^{p_1}, das zweite in mindestens 2^{p_2}, ... gleiche Theile zerlegt werde. Die sämmtlichen Theilpunkte, welche auf diese Weise die Strecke 0 bis 1 in kleine Intervalle zerlegen, seien ξ_1^1, $\xi_1^2, \ldots$; halbire diese Intervalle und bezeichne die Werthe von $\mathfrak{H}_1'(x)$ in den Halbirungspunkten mit A_1^1, A_1^2, u. s. w. (in constanten Strecken von $\mathfrak{H}_1(x)$ wähle man als entsprechendes A den Werth $\frac{1}{10}$, wenn diese Strecke zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt, $-\frac{1}{10}$, wenn sie zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt). Dann zeichne man hinter einander die Curven $A_1^1 \cdot (0 \ldots \xi_1^1)_2$, $A_1^2 \cdot (\xi_1^1 \ldots \xi_1^2)_2, \ldots$ und bezeichne die gesammte Curve als Function mit $h_2(x)$; dann besitzt $\mathfrak{H}_2(x) = \mathfrak{H}_0(x) + h_1(x) + h_2(x)$ in jedem der Intervalle $\xi_1^s \ldots \xi_1^{s+1}$ ein neues Maximum und ein neues Minimum.

Man fahre so fort und schiebe zwischen die zur Construction von $\mathfrak{H}_n(x)$ benutzten Punkte ξ_{n-1}^s alle Werthe ein, in denen $\mathfrak{H}_n'(x) = 0$ ist, (auch die Endpunkte solcher *Strecken*, in denen diese Gleichung gilt); in jedem der entstandenen Intervalle kann $\mathfrak{H}_n(x)$ nur wachsen oder abnehmen (oder constant sein); dann theile man jedes dieser Intervalle in 2^p gleiche Strecken $\xi_n^s \ldots \xi_n^{s+1}$, u. z. so gross sie nur sein können, ohne dass der Werth von $\mathfrak{H}_n'(x)$ in einem derselben um mehr als $\frac{1}{10^n}$ schwankt; über der Gesammtheit dieser kleinen Strecken zeichne man die Curven $A_n^{s+1}(\xi_n^s \ldots \xi_n^{s+1})_{n+1}$ (in constanten Strecken von $\mathfrak{H}_n(x)$ wähle man als entsprechendes A den Werth $\pm\frac{1}{10^n}$); diese Curven zusammen erklären dann die Function $h_{n+1}(x)$, und $\mathfrak{H}_{n+1}(x) = \mathfrak{H}_n(x) + h_{n+1}(x)$ besitzt in jeder Strecke $\xi_n^s \ldots \xi_n^{s+1}$ ein neues Maximum und ein neues Minimum; die Strecken selbst sind jede kleiner, als $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Es werde nun wieder $\frac{d\mathfrak{H}_0(x)}{dx} + \sum_1^n h_n'(x)$ kürzer mit B_n^x bezeichnet; ferner liege x in dem Intervall $\xi_n^s \ldots \xi_n^{s+1}$. Dann hat den Constructionsvorschriften nach B_n^x, wenn es nicht $= 0$ ist, mit A_n^{s+1}, welches nicht verschwinden *kann*, dasselbe Zeichen, und ausserdem gilt

$$B_n^x = A_n^{s+1} + \Theta \cdot \frac{1}{10^n}, \qquad -1 \leqq \Theta \leqq +1.$$

$\mathfrak{H}_0'(x)$ ist überall numerisch kleiner als 1, und $\mathfrak{H}_1'(x)$ überall numerisch kleiner als $1+\frac{1}{10}$. Nun gilt:

$$\text{I.}\qquad B_{n+1}^x = B_n^x + \frac{A_n^{s+1}\cdot\gamma_n}{10^{n+1}},\qquad 1 \geqq \gamma_n \geqq -(10^{n+1}+1).$$

Wenn nun für irgend ein n alle Werthe von $|B_n^x|$ kleiner sind als $\prod_1^n\left(1+\frac{1}{10^n}\right) = P_n$, so ist, da B_n^x mit A_n^{s+1} gleiches Zeichen hat, für ein positives γ_n:

$$|B_{n+1}^x| < \left|P_n + \frac{P_n\cdot\gamma_n}{10^{n+1}}\right| \leqq P_n\left(1+\frac{1}{10^{n+1}}\right);$$

für ein *negatives* γ_n ist entweder

$$|B_{n+1}^x| < |B_n^x| < P_n$$

oder

$$|B_{n+1}^x| < \left|\frac{A_n^{s+1}\cdot\gamma_n}{10^{n+1}}\right| < P_n\left(1+\frac{1}{10^{n+1}}\right),$$

je nachdem in I. auf der rechten Seite der Gleichung das erste oder das zweite Glied das numerisch grössere ist. Also ist unter allen Umständen B_{n+1}^x, auch A_{n+1}^{s+1}, numerisch kleiner als P_{n+1}, wenn B_n^x numerisch kleiner als P_n ist. Da diese Bedingung für $n=0$ und $n=1$ erfüllt ist, folgt, dass überhaupt alle B_n^x, auch alle A_n^{s+1} numerisch kleiner sind als $P = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)$.

Die für jedes n durch die vorgeschriebene Reihenfolge der Glieder eindeutig definirten unendlich vielen Grössen B_{n+m}^x haben eine obere Grenze Q_n und eine untere Grenze q_n, und beide Grenzen sind nach dem Vorstehenden numerisch höchstens gleich P.

Ist $B_n^x = 0$, so gehört x entweder zu den Grössen ξ_n^s oder es liegt im Innern einer constanten Strecke von $\mathfrak{H}_n(x)$; im ersteren Falle sind alle $h'_{n+m}(x) = 0$ und alle $B_{n+m}^x = 0$; im zweiten Falle kann nur dann auch $B_{n+1}^x = 0$ sein, wenn x eine Maximalstelle oder Minimalstelle von $h_{n+1}(x)$ ist, und dann gehört x zu den Grössen ξ_{n+1}^s, sodass wieder *alle* B_{n+m}^x verschwinden. Wenn also zwei auf einander folgende B_n^x verschwinden, ist immer der Grenzwerth aller B_{n+m}^x die Null. Im Folgenden nehmen wir darum an, dass für $B_n^x = 0$ weder B_{n-1}^x noch B_{n+1}^x verschwinden.

Wir wählen zuerst n so gross, dass $\frac{P}{10^n} < \varepsilon$, wenn ε beliebig klein gegeben ist.

x liege der Reihe nach in den Intervallen

$$\xi_n^{s_1} \ldots \xi_n^{s_1+1}, \quad \xi_{n+1}^{s_2} \ldots \xi_{n+1}^{s_2+1}, \text{ u. s. w.}$$

Haben nun q_n und Q_n gleiches Vorzeichen, sind z. B. beide Grössen *positiv* oder höchstens $q_n = 0$, so giebt es ein n, für welches gilt:

$$q_n \leqq B_n^x \leqq q_n + \varepsilon.$$

Es ist nun:

$$B_{n+1}^x = B_n^x + A_n^{s_1+1} \cdot \frac{\gamma_1}{10^{n+1}},$$

$$B_{n+2}^x = B_{n+1}^x + A_{n+1}^{s_2+1} \cdot \frac{\gamma_2}{10^{n+2}},$$

. . . .

$$\text{II.} \quad B_{n+m}^x = B_n^x + A_n^{s_1+1} \cdot \frac{\gamma_1}{10^{n+1}} + A_{n+1}^{s_2+1} \cdot \frac{\gamma_2}{10^{n+2}} + \cdots + A_{n+m-1}^{s_m+1} \cdot \frac{\gamma_m}{10^{n+m}},$$

wobei:

$$1 \geqq \gamma_m \geqq -(10^{n+m}+1)$$

Ist eine der Grössen B, etwa $B_p^x = 0$, dann liegt x in einer constanten Strecke von $\mathfrak{H}_p(x)$ und A_p kann zwar negativ sein, ist aber numerisch kleiner als $\frac{1}{10^p}$, sodass in der Gleichung II. das betreffende Glied $A_p \cdot \frac{\gamma}{10^{p+1}}$ numerisch kleiner ist als

$$\frac{1}{10^p} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^{p+1}}\right) < \frac{10\,P}{10^{p+1}}.$$

In den übrigen Gliedern müssen die Grössen A_p *positiv* sein, wie die zugehörigen B_p^x; geben wir daher in einem solchen Gliede dem γ den grössten *positiven* Werth, den es haben kann, nämlich 1, und der Grösse A_p den Werth $10\,P$, den sie nicht erreicht, so ist die rechte Seite grösser geworden. Es folgt:

$$\text{III.} \quad B_{n+m}^x < B_n^x + 10\,P\left(\frac{1}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{10^{n+m}}\right) < B_p^x + \frac{10\,P}{10^n}$$

und darum:

$$q_n \leqq B_{n+m}^x \leqq Q_n \leqq q_n + 11\,\varepsilon.$$

Die B_n^x nähern sich also einer festen Grenze $Q(x)$, welche 0 oder *positiv* ist.

Sind q_n und Q_n beide *negativ* und höchstens $Q_n = 0$, so folgt in gleicher Weise:

$$Q_n \geqq B_{n+m}^x \geqq q_n \geqq Q_n - 11\,\varepsilon.$$

Die B_n^x nähern sich dann also einer festen Grenze $Q(x)$, welche 0 oder *negativ* ist.

Es sei schliesslich Q_n *positiv*, q_n aber *negativ*, u. z. bleibe dies so, wie gross man auch n wählen mag. Dann betrachten wir drei besondere Fälle.

1. Ist $B_n^x = 0$, so ist B_{n+1}^x nicht Null, x liegt in einer constanten Strecke von $\mathfrak{H}_n(x)$ und dann ist, wie wir schon sahen:

$$|B_{n+1}^x| \leqq \frac{1}{10^n}\left(1 + \frac{1}{10^{n+1}}\right) < \frac{P}{10^n} < \varepsilon.$$

2. Ist B_n^x *negativ*, B_{n+1}^x aber *positiv* (oder 0), so schreiben wir:

$$B_{n+1}^x = A_n^{s+1} + \Theta \cdot \frac{1}{10^n} + \frac{A_n^{s+1}\gamma_n}{10^{n+1}}, \qquad -1 \leqq \Theta \leqq +1.$$

A_n^{s+1} ist hierbei *negativ*, ebenso die Summe der ersten beiden Glieder rechts; darum muss γ_n *negativ* sein, wenn die ganze rechte Seite *positiv* ist; setzt man an die Stelle von γ_n den Werth $-(10^{n+1}+1)$, falls es ihn nicht gerade hat, so entsteht rechts

$$\Theta \cdot \frac{1}{10^n} - \frac{A_n^{s+1}}{10^{n+1}},$$

also gilt:

$$|B_{n+1}^x| \leqq \left|\Theta \cdot \frac{1}{10^n}\right| + \left|\frac{A_n^{s+1}}{10^{n+1}}\right| < \frac{2P}{10^n}$$

und daher:

$$0 \leqq B_{n+1}^x < \frac{2P}{10^n} < 2\varepsilon.$$

3. Ist umgekehrt B_n^x *positiv*, B_{n+1}^x aber *negativ* (oder 0), so folgt in gleicher Weise:

$$0 \geqq B_{n+1}^x > -\frac{2P}{10^n} > -2\varepsilon.$$

Es seien nun $n_1, n_2, \ldots$ diejenigen Werthe von n, für welche in den B_n^x ein Zeichenwechsel eintritt, u. z. wollen wir $B_n^x = 0$ für dasselbe Zeichen zählen, welches B_{n-1}^x hatte. Sei z. B. $B_{n_1}^x$ *negativ* oder 0, $B_{n_1+1}^x$ aber *positiv*, dann ist nach dem Vorhergehenden immer $B_{n_1+1}^x < \frac{2P}{10^n}$. Es ist dann weiter $B_{n_1+m}^x$ für $m = 1, 2, \cdots n_2 - n_1$ *positiv* oder 0; dann gilt also wieder die Formel II, in der wir hier besser die ersten beiden Glieder rechts in die Grösse $B_{n_1+1}^x$ zusammenziehen, und weil für *diese* $B_{n_1+m}^x$ alle Voraussetzungen gelten, welche bei der Ableitung der Formel III für *alle* B_{n+m}^x galten, so folgt:

$$0 \leqq B_{n_1+m}^x < B_{n_1+1}^x + \frac{10P}{10^{n_1+1}} < \frac{3P}{10^{n_1}},$$

$$m = 1, 2, \cdots n_2 - n_1.$$

Ebenso ergiebt sich bei n_2, wo $B^x_{n_2}$ *positiv* oder 0, aber $B^x_{n_2+1}$ *negativ* ist:

$$0 \geqq B^x_{n_2+m} > B^x_{n_2+1} - \frac{10P}{10^{n_2+1}} > - \frac{3P}{10^{n_2}},$$
$$m = 1, 2, \cdots n_3 - n_2.$$

Da die Reihe der ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ unserer Annahme nach unendlich ist, besitzen also die B^x_n den Grenzwerth Null.

Demnach ist $\frac{d\mathfrak{H}_0(x)}{dx} + \sum_1^n h'_n(x)$ für jedes x convergent. Zu beachten ist, dass nur eine *bedingte* Convergenz bewiesen ist, nämlich für die durch die Construction vorgeschriebene Reihenfolge der Glieder, dass aber auch das Dini'sche Theorem keine unbedingte Convergenz verlangt. Ob $\mathfrak{H}'_n(x)$ auch unbedingt convergent ist (wie $\mathfrak{S}'_n(x)$ es ist), lässt sich nicht beantworten, da bei einer anderen Anordnung der Glieder auf B^x_n irgend ein Glied $\frac{A_m \gamma}{10^m}$ folgt, in welchem A_m nicht mehr mit B^x_n dasselbe Zeichen zu haben braucht, während die Gleichheit dieser Zeichen überall in unserem Beweise entscheidend ist und ohne dieselbe sich gar keine Schlüsse ziehen lassen.

Der Beweis für die übrigen Anforderungen des Dini'schen Theorems ist in der Abhandlung richtig geführt und bleibt bestehen; nur bezeichnet ξ^x_n nicht mehr den Argumentwerth für das auf x folgende Maximum oder Minimum, sondern die auf x zunächst folgende der Grössen ξ^s_n.

Ottensen, im Juli 1889.

Ueber die Endlichkeit des Formensystems einer binären Grundform.

Von

Julius Petersen in Kopenhagen.

Im Bande 33, pag. 223 hat Herr Hilbert einen Beweis für die Endlichkeit des Invariantensystems einer binären Grundform gegeben, und im Bande 34 hat Herr Cayley diesen Beweis vereinfacht und auf das Covariantensystem erweitert. Ich werde hier zeigen, dass der Beweis des Herrn Cayley ungenügend ist*); um dieses leichter thun zu können, werde ich erst einige Bemerkungen der Invariantentheorie entlehnen, wie ich sie in Zeuthens Zeitschrift für 1880 u. f. gegeben habe.

Die Grundform sei

$$a_x^n = a_0 x_1^n + \frac{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_0 + \cdots + a_n x_0^n.$$

Ich wende als Symbole die Buchstaben $a, b \ldots A \ldots$ an, indem ich setze

$$(a)^\mu = a_\mu, \ (b)^\mu = b_\mu \ldots,$$

wodurch symbolisch

$$a_x^n = (x_1 + a x_0)^n.$$

Ferner wende ich die Operationszeichen Δ_1, Δ_2 an, von denen ich jedoch hier nur das erste zu erklären brauche. Die Operation Δ_1 ist gewöhnliche Differentiation, nur dass auch die Coefficienten der Form als symbolisch geschrieben gedacht werden; so ist z. B.

$$\Delta_1 a_p = p a_{p-1}; \quad \Delta_1 a_p^q = q a_p^{q-1} \cdot p a_{p-1}.$$

Setzen wir in die Form

$$x_1 = \xi_1 + \alpha_1 \xi_0; \qquad x_0 = \xi_0,$$

so werden die Coefficienten a_p in die geänderten Coefficienten a_p' übergehen, wo

$$a_p' = a_p + \Delta_1 a_p \frac{\alpha_1}{1} + \Delta_1^2 a_p \frac{\alpha_1^2}{1 \cdot 2} \cdots,$$

*) Die gleiche Ansicht hatte uns schon vor einiger Zeit Hr. Hilbert mitgetheilt.

Die Red.

woraus man leicht schliesst

$$u' = u + \Delta_1 u \frac{\alpha_1}{1} + \Delta_1{}^2 u \frac{\alpha_1{}^2}{1 \cdot 2} \cdots,$$

wo u eine beliebige ganze Function der Coefficienten bedeutet.

Eine solche Function, die sowohl im gewöhnlichen Sinne, wie symbolisch geschrieben, homogen ist, und welche bei der besprochenen Aenderung ungeändert wird, ist eine Halbinvariante (Semiinvariante, source); solche treten bekanntlich als erste Coefficienten in den Covarianten auf, und die Abhängigkeit zwischen Covarianten ist dieselbe als zwischen den entsprechenden Halbinvarianten.

Der Grad g einer Halbinvariante ist der Grad in den Coefficienten, das Gewicht v ist der symbolische Grad (Summe der Indices). So ist z. B. die Halbinvariante

$$d_4 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2{}^2$$

vom Grade zwei und vom Gewicht vier; wie die obige Entwickelung (symbolische Taylor'sche Formel) zeigt, ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine homogene Function H der Coefficienten eine Halbinvariante ist,

$$\Delta_1 H = 0.$$

Ist ausserdem $ng - 2v = 0$, so wird H eine Invariante sein.

Die folgenden Functionen werden gleich als Halbinvarianten erkannt:

$$c_0 = a_0;\ c_2 = a_0 a_2 - a_1{}^2; \cdots c_p = (a a_0 - a_1)^p : a_0 \cdots c_n = (a a_0 - a_1)^n : a_0.$$

Sie haben alle (a_0 ausgenommen) $g = v$, und durch successive Elimination von $a_n, a_{n-1} \ldots a_2$ zeigt man leicht, dass jede Halbinvariante, für die $g = v$ ist, sich rational und ganz durch $c_2, c_4 \ldots c_n$ ausdrücken lässt. Ist $g > v$, muss a_0 Factor sein, ist $g < v$, kann durch Multiplication mit einer geeigneten Potenz von a_0 der erste Fall herbeigeführt werden. Eine jede Halbinvariante lässt sich somit, nach Multiplication mit $a_0{}^{v-g}$ als ganze rationale Function von $c_2, c_3 \ldots c_n$ ausdrücken.

Sind $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ die Nullpunkte oder Wurzeln der Form, so werden $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0} \cdots \frac{a_n}{a_0}$ symmetrische Functionen von diesen; wir haben daher

$$\frac{H}{a_0{}^g} = F_v,$$

wo F_v eine symmetrische Function der Wurzeln vom Grade v bedeutet. Diese Function lässt sich bekanntlich als rationale ganze Function der Wurzeldifferenzen schreiben.

Ich kann jetzt den Fehler in dem Aufsatze des Herrn Cayley klar legen; in dem Ausdrucke für eine Halbinvariante durch die Wurzeldifferenzen und a_0, den er aufstellt, hat er a_0 den Exponenten v gegeben, während dieser g sein musste. Sein Beweis gilt daher nur für

die oben besprochenen einfachen Halbinvarianten, für die $g = v$ ist; für andere Halbinvarianten lässt sich die Reduction der Exponenten mittelst der Gleichung der Wurzeldifferenzen nicht ausführen, ohne dass eine Potenz von a_0 als Nenner hineintrete, und, wie oben erwiesen, ist es eben dieser Nenner, der bei dem Beweise des Gordan'schen Satzes die ganze Schwierigkeit verursacht.

Da eine Halbinvariante für $a_0 = 0$ endlich und (wenn a_0 nicht Factor ist) nicht Null wird, muss der Ausdruck F_v in jeder Wurzel vom Grade g sein. Wird F_v durch die Wurzeldifferenzen ausgedrückt, so lassen sich alle Glieder durch Permutiren der Wurzeln aus einem Glied L_v ableiten; ist dieses in jeder Wurzel vom Grade g, dann wird $ng = 2v$ und die Halbinvariante ist eine Invariante. Dieser Fall ist es, den Herr Hilbert betrachtet hat. Er stützt seinen Beweis auf den Satz, dass jedes L_v sich als Product von gewissen bestimmten in endlicher Anzahl vorkommenden L_v bilden lässt. Die rationale Gleichung, welche $a_0^g L_v$ bestimmt, lässt sich dann dazu verwenden die Exponenten dieser Grösse zu erniedrigen, und da der erste Coefficient der Gleichung eins wird, während die übrigen ganze Invarianten sind, so werden in die Ausdrücke für die höheren Potenzen keine Nenner hinzukommen können.

Es entsteht jetzt die Frage, ob der Beweis des Herrn Hilbert so erweitert werden kann, dass er für alle Halbinvarianten gilt. Ich werde zeigen, dass dieses sich sehr leicht bewerkstelligen lässt; es kommt nur darauf an zu zeigen, dass ein Glied von einer Halbinvariante $a_0^g F_v$ sich immer als Product von einer endlichen Anzahl bestimmter ähnlicher Glieder darstellen lässt. Wir können annehmen dass dieses Glied in β_1 vom Grade g ist und in den übrigen Wurzeln von nicht höherem Grade.

Zu dem Gliede fügen wir den Factor

$$\beta_2^{\nu_2} \beta_3^{\nu_3} \cdots \beta_n^{\nu_n},$$

wo die Exponenten (Null oder positiv) so bestimmt sind, dass das Glied in allen Wurzeln vom Grade g ist. Jetzt kann man, wie Hr. Hilbert es macht, ein System von diophantischen Gleichungen aufstellen und dadurch die Zerlegbarkeit aller solchen Producte mittelst einer endlichen Anzahl bestimmter ähnlicher Factoren darthun. Man hat dann nur in diesen Factoren die vereinzelt stehenden Potenzen von $\beta_2, \beta_3 \ldots \beta_n$ wegzunehmen, und man hat die Grössen, welche bei Herrn Hilbert $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_m$ entsprechen.

Kopenhagen im September 1889.

Bestimmung der grössten Untergruppen derjenigen projectiven Gruppe, welche eine Gleichung zweiten Grades in n Veränderlichen invariant lässt.

Von

Hermann Werner aus Hottelstedt bei Weimar.

Die nachstehende Arbeit erledigt ein interessantes Problem aus Lie's allgemeiner Theorie der Transformationsgruppen. Ehe wir dasselbe formuliren, wollen wir die wichtigsten von ihm eingeführten Begriffe und abgeleiteten Sätze, die im Folgenden benutzt werden, kurz zusammenstellen:

Eine Schaar von Transformationen:

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \qquad (i=1,\dots,n)$$

in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ bildet eine *endliche continuirliche Transformationsgruppe*, wenn zwei Transformationen der Schaar nach einander ausgeführt wieder eine Transformation der Schaar ergeben. Die Grössen $a_1 \dots a_r$ heissen die *Parameter* der Gruppe und eine Gruppe mit r *wesentlichen* Parametern heisst *r-gliedrig*.

Eine Transformation heisst *infinitesimal*, wenn sie die Form besitzt:

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \dots x_n)\delta t \qquad (i=1,\dots,n),$$

wobei δt eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Bezeichnet f eine beliebige Function von $x_1 \dots x_n$, so ergiebt die Ausführung dieser Transformation auf f die folgende Gleichung:

$$f(x_1', \cdots, x_n') = f(x_1, \cdots, x_n) + \left(\sum_1^n {}^i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\delta t.$$

Lie führt daher

$$\sum_1^n {}^i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f)$$

als Symbol für die infinitesimale Transformation ein.

Mehrere, etwa r infinitesimale Transformationen

$$X_\varkappa f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{i\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (\varkappa = 1, \dots, r)$$

heissen von einander *unabhängig*, wenn es nicht möglich ist, r Constanten $c_1 \dots c_r$ so zu wählen, dass der Ausdruck

$$c_1 X_1 f + \cdots + c_r X_r f$$

identisch verschwindet.

Ordnen sich die Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe paarweise als inverse zusammen, so enthält die Gruppe die identische Transformation und r *unabhängige infinitesimale Transformationen.* Die endliche Transformation entsteht durch unendlichmalige Wiederholung der allgemeinen infinitesimalen Transformation.

Sind $X_1 f, \dots, X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, so bestehen zwischen den Xf Beziehungen von der Form:

$$(X_i, X_\varkappa) = X_i\big(X_\varkappa(f)\big) - X_\varkappa\big(X_i(f)\big) \equiv \sum_1^n {}^j \{X_i(\xi_{j\varkappa}) - X_\varkappa(\xi_{ji})\} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$= \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} X_s f,$$

wobei die $c_{i\varkappa s}$ numerische Constanten bedeuten.

Umgekehrt bestehen zwischen r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \dots, X_r f$ die obigen Relationen, so erzeugen die Xf eine endliche continuirliche r-gliedrige Transformationsgruppe.

Hat man zwei r-gliedrige Gruppen $X_1 f, \dots, X_r f$ und $Y_1 f, \dots, Y_r f$, zu welchen ein und dasselbe System der $c_{i\varkappa s}$ gehört:

$$(X_i, X_\varkappa) = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} X_s, \qquad (Y_i, Y_\varkappa) = \sum_1^r {}^s c_{i\varkappa s} Y_s,$$

so nennt man die beiden Gruppen *gleichzusammengesetzt* oder *holoedrisch isomorph.*

Zwei m-gliedrige Untergruppen einer r-gliedrigen Gruppe heissen mit einander *gleichberechtigt*, wenn sie durch eine Transformation der r-gliedrigen Gruppe in einander übergeführt werden können.

Soll eine Gleichung $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ eine infinitesimale Transformation

$$Xf = \sum_1^n {}^i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gestatten, so muss $X\varphi = 0$ eine blosse Folge von $\varphi = 0$ sein.

Nach Lie ist es bei Untersuchungen, die sich auf eine Gruppe beziehen, von besonderer Wichtigkeit, die *grössten* Untergruppen zu finden. Dieses Problem hat er für die allgemeine projective Gruppe in n Veränderlichen erledigt*). In seinem Seminar stellte mir Herr

*) Unter Lie's älteren Arbeiten über Transformationsgruppen möge hier besonders auf die folgenden verwiesen werden: Göttinger Nachr. December 1874;

Professor Lie dasselbe Problem für diejenige projective Gruppe im n-fach ausgedehnten Raume, welche eine Gleichung zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante invariant lässt. Dabei äusserte derselbe, dass die betreffenden Untergruppen sich wahrscheinlich definiren liessen als die grössten Untergruppen, welche eine gewisse ebene Mannigfaltigkeit resp. einen Punkt invariant lassen.

§ 1.

Vorbereitung zur Lösung des Problems.

Es ist bekannt, dass im n-fach ausgedehnten Raume, im R_n, jede Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante, M_{n-1}^2, durch $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ projective Transformationen dieses R_n in sich übergeführt wird.*) Ist n eine *gerade* Zahl, so haben wir zwei discrete Schaaren von $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ projectiven Transformationen, von denen die *eine* Schaar für sich eine endliche continuirliche Gruppe bildet und von $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen erzeugt wird; die *andere* Schaar dagegen besteht aus allen projectiven Transformationen, welche die beiden Schaaren von grössten ebenen Mannigfaltigkeiten auf der M_{n-1}^2 mit einander vertauschen, und bildet keine Gruppe für sich allein. Ist n eine *ungerade* Zahl, so haben wir nur *eine* Schaar von $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ projectiven Transformationen, entsprechend dem Umstande, dass es nur eine Schaar von grössten ebenen Mannigfaltigkeiten auf der M_{n-1}^2 giebt, und diese eine Schaar bildet eine endliche continuirliche Gruppe, welche von $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen erzeugt wird.

Um nun die von $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen erzeugte Gruppe der F_2 im R_n zu untersuchen, ist es erforderlich, dieselbe in möglichst einfacher Form aufzustellen. Es giebt $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$ F_2 im R_n; jeder derselben gehört eine Gruppe von in-

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 1876—79; Math. Ann. Bd. XVI, 1879. Eine systematische Darstellung dieser Untersuchungen findet sich in dem soeben erschienenen Werke: Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Erster Abschnitt, unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet, Leipzig 1888.

*) Cayley und Hermite haben bekanntlich die *endlichen* projectiven Transformationen einer Fläche zweiten Grades im n-fach ausgedehnten Raume auf sehr einfache Form gebracht. In dieser Arbeit werden wir durchgängig mit *infinitesimalen* Transformationen rechnen.

finitesimalen Transformationen zu. Da jede F_2 mit nicht verschwindender Determinante durch projective Transformation in jede andere übergeführt werden kann, so müssen alle diese Gruppen gleichzusammengesetzt sein. Wenn wir also gewisse Untergruppen der endlichen continuirlichen projectiven Gruppe einer einzigen solchen F_2 kennen, so können wir auch ohne Weiteres die entsprechenden Untergruppen der Gruppen von allen anderen F_2 mit nicht verschwindender Determinante aufstellen. Wir können also als F_2 die Kugel um den Coordinatenanfangspunkt:

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

annehmen und die allgemeine infinitesimale projective Transformation bestimmen, welche diese Kugel in sich überführt.

Zu diesem Zwecke führen wir die allgemeine projective infinitesimale Transformation $\left(p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$:

$$(2) \qquad \sum_1^n{}^i a_i p_i + \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} x_i p_\varkappa + \sum_1^n{}^i b_i x_i \sum_1^n{}^j x_j p_j$$

auf (1) aus und erhalten:

$$2 \sum_1^n{}^i a_i x_i + 2 \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} x_i x_\varkappa + 2 \sum_1^n{}^i b_i x_i \sum_1^n{}^j x_j^2 = 0$$

oder wegen (1):

$$\sum_1^n{}^i a_i x_i + \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} x_i x_\varkappa + \sum_1^n{}^i b_i x_i = 0.$$

Diese Gleichung muss vermöge (1) identisch erfüllt werden, wenn (1) die Transformation (2) gestatten soll. Das ist aber nur möglich, wenn:

$$a_i + b_i = 0, \qquad a_{i,\varkappa} + a_{\varkappa,i} = 0.$$

Demgemäss erhalten wir die folgenden $\frac{n(n+1)}{2}$-gliedrige Gruppe:

$$(3) \qquad \boxed{\begin{gathered} x_i p_\varkappa - x_\varkappa p_i, \quad p_i - x_i \sum_1^n{}^j x_j p_j \\ (i, \varkappa = 1, \ldots, n) \end{gathered}}\,.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese infinitesimalen projectiven Transformationen wirklich eine Gruppe erzeugen und die Kugel (1) invariant lassen.

Es giebt nun verschiedene Wege, um das Problem, die grössten Untergruppen der Gruppe (3) zu bestimmen, zu lösen, und zwar

können wir entweder die *Gruppe* (3) *selbst* oder eine mit derselben gleich *zusammengesetzte* Gruppe untersuchen und dann die Resultate auf die Gruppe (3) übertragen.

Solche isomorphe Gruppen sind bekanntlich die allgemeine conforme Gruppe im R_{n-1} und die Gruppe aller Rotationen um einen Punkt im R_{n+1}.

Es zeigt sich, dass die Untersuchung der allgemeinen conformen Gruppe erst den Weg zur directen Untersuchung der Gruppe der F_2 vorzeichnet. Deshalb wollen wir uns zuerst mit der allgemeinen conformen Gruppe beschäftigen.

Es ist bekannt, dass die continuirliche Gruppe von projectiven Transformationen, welche die Kugel im R_n invariant lässt, durch stereographische Projection in die, nicht projective, allgemeine conforme Gruppe des R_{n-1} übergeht.*)

Sei nämlich $x_n = -1$ die Gleichung des ebenen R_{n-1}, so ist die stereographische Projection gegeben durch:

$$x_j' = 2\,\frac{x_j}{1-x_n}, \quad \sum_1^{n-1}{}_j\, x_j'^2 = 4\,\frac{1+x_n}{1-x_n}, \quad \sum_1^{n-1}{}_j\, x_j'^2 + 4 = \frac{8}{1-x_n}.$$

Demnach ist:

$$\delta x_j' = 2\,\frac{\delta x_j(1-x_n) + x_j\,\delta x_n}{(1-x_n)^2}$$

und es ergiebt sich:

$$\left\{\begin{aligned}
&x_i p_\varkappa - x_\varkappa p_i \equiv x_i' p_\varkappa' - x_\varkappa' p_i',\\
&x_n p_i - x_i p_n \equiv -p_i' - \tfrac{1}{4}\left\{2x_i' \sum_1^{n-1}{}_j\, x_j' p_j' - \left(\sum_1^{n-1}{}_j\, x_j'^2\right) p_i'\right\},\\
&p_i - x_i \sum_1^{n}{}_j\, x_j p_j \equiv p_i' - \tfrac{1}{4}\left\{2x_i' \sum_1^{n-1}{}_j\, x_j' p_j' - \left(\sum_1^{n-1}{}_j\, x_j'^2\right) p_i'\right\},\\
&p_n - x_n \sum_1^{n}{}_j\, x_j p_j \equiv \sum_1^{n-1}{}_j\, x_j' p_j',\\
&\qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n-1).
\end{aligned}\right.$$

Die so erhaltene Gruppe können wir offenbar in der folgenden Form schreiben:

---

*) Vergl. Felix Klein „Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie" Math. Ann. Bd. V (1871), cf. insbesondere den Satz pag. 267: „Der Gesammtheit der linearen Transformationen des R_n, welche die gegebene M_{n-1}^2 in sich überführen, entspricht im R_{n-1} ein Transformationencyklus, der sich aus dessen Bewegungen, den Aehnlichkeitstransformationen und den Transformationen durch reciproke Radien zusammensetzt."

$$(4)\qquad \boxed{\begin{gathered} p_i,\ x_i p_\varkappa - x_\varkappa p_i,\ \sum_1^n x_j p_j,\ 2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2\right) p_i \\ (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n) \end{gathered}}\ .$$

Dies ist wirklich die *allgemeine conforme Gruppe* des R_n, wie wir zeigen wollen.

Die *allgemeine conforme Gruppe* oder die *Gruppe der reciproken Radien* wird gebildet aus allen *Translationen*, *Rotationen* und der *Aehnlichkeitstransformation* (im engeren Sinne), sowie aus denjenigen Transformationen, welche aus den Translationen durch Transformation der reciproken Radien hervorgehen und welche wir als *Circulationen durch Origo* bezeichnen wollen. Bei den letzteren bewegt sich nämlich jeder Punkt des R_n auf einem Kreise, welcher durch Origo geht, d. h. die Bahncurven einer Circulation sind Kreise durch Origo. In der That, die Bahncurven einer Translation sind alle geraden Linien, welche einer bestimmten geraden Linie durch Origo parallel laufen. Diese Bahncurven gehen durch Transformation der reciproken Radien in sich in Origo berührende Kreise über; unter diesen Kreisen ist die durch die betreffende Translation bestimmte gerade Linie durch Origo mitzurechnen. Also ist jede Circulation durch Origo durch eine bestimmte gerade Linie durch Origo festgelegt, ebenso wie jede Translation.

In der That werden die Translationen durch die p_i, die Rotationen durch die $x_i p_\varkappa - x_\varkappa p_i$ und die Aehnlichkeitstransformation durch $\sum_1^n x_j p_j$ repräsentirt, und es ist nur noch zu zeigen, dass die Circulationen durch die

$$2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2\right) p_i$$

repräsentirt werden. Führen wir nun auf die p_i die Transformation der reciproken Radien $x'_\varkappa = \dfrac{x_\varkappa}{\sum_1^n x_j^2}$ aus, so ergiebt sich:

$$\delta x'_\varkappa = \frac{\delta x_\varkappa \sum_1^n x_j^2 - 2x_\varkappa \sum_1^n x_j \delta x_j}{\left(\sum_1^n x_j^2\right)^2},$$

also, da

$$\delta x_i = 1,\quad \delta x_\varkappa = 0\ (\varkappa \neq i):$$

$$\delta x_i' = \frac{1}{\sum_1^n x_j^2} - \frac{2x_i^2}{\left(\sum_1^n x_j^2\right)^2} = \sum_1^n x_j'^2 - 2x_i'^2,$$

$$\delta x_\varkappa' = -\frac{2x_i x_\varkappa}{\left(\sum_1^n x_j^2\right)^2} = -2x_i' x_\varkappa',$$

so dass wirklich die Circulationen die Form haben:

$$2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2\right) p_i.$$

Wir führen der Kürze wegen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$P_i \equiv p_i, \quad R_{i,\varkappa} \equiv x_i p_\varkappa - x_\varkappa p_i, \quad S \equiv \sum_1^n x_j p_j,$$

$$C_i \equiv 2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2\right) p_i.$$

Setzen wir fest, dass $\varepsilon_{i,\varkappa} \equiv 0$ für $i \neq \varkappa$, dagegen $\varepsilon_{i,i} = 1$ sein soll, so erhalten wir durch paarweise Combination der infinitesimalen Transformationen:

$$P_i, \; R_{i,\varkappa}, \; S, \; C_i$$

die folgenden Relationen*):

$$(5)\quad \begin{cases} (P_i, P_\varkappa) = 0 & (C_i, C_\varkappa) = 0 \\ (P_i, R_{j,\varkappa}) = \varepsilon_{i,j} P_\varkappa - \varepsilon_{i,\varkappa} P_j & (C_i, R_{j,\varkappa}) = \varepsilon_{i,j} C_\varkappa - \varepsilon_{i,\varkappa} C_j \\ (P_i, S) = P_i & (C_i, S) = -C_i \\ (P_i, C_\varkappa) = 2(R_{\varkappa,i} + \varepsilon_{i,\varkappa} S) & \\ (R_{i,\varkappa}, S) = 0 & \\ (R_{i,\varkappa}, R_{\mu,\nu}) = \varepsilon_{\varkappa,\mu} R_{i,\nu} - \varepsilon_{\varkappa,\nu} R_{i,\mu} - \varepsilon_{i,\mu} R_{\varkappa,\nu} + \varepsilon_{i,\nu} R_{\varkappa,\mu}. & \end{cases}$$

Wir erkennen, dass diese Relationen sich nicht ändern, wenn wir $-C_i$, $R_{i,\varkappa}$, $-S$, P_i mit bez. P_i, $R_{i\varkappa}$, S, $-C_i$ vertauschen. Das ist nichts Auffälliges, denn durch Transformation der reciproken Radien geht ja P_i in $-C_i$, $R_{i,\varkappa}$ in $R_{i,\varkappa}$, S in $-S$ über: zwei

*) Die Formeln (5) finden sich in einer Abhandlung von Lie im norwegischen Archiv, Bd. 10, 1885, in welcher überhaupt Untersuchungen über die conforme Gruppe, wie auch über die Gruppe einer Fläche zweiten Grades im n-fach ausgedehnten Raume angestellt werden. Lie bezeichnet $R_{i,\varkappa}$ mit $S_{i,\varkappa}$ S mit U, C_i mit V_i.

Gruppen aber, die durch Transformation in einander übergehen, müssen gleichzusammengesetzt sein.

Im Folgenden betrachten wir Untergruppen, welche durch Vertauschung von $-C_i$, $R_{i,x}$, $-S$, P_i mit bez. P_i, $R_{i,x}$, S, $-C_i$ in einander übergehen, als gleichberechtigt, denn dieselben werden durch eine Transformation der Gruppe in einander übergeführt.

Die allgemeine conforme Gruppe enthält:

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = N$$

unabhängige infinitesimale Transformationen und zwar n unabhängige infinitesimale Transformationen 0^{ter} Ordnung (z. B. alle Translationen), $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ von 1^{ter} Ordnung (z. B. die Rotationen und die Aehnlichkeitstransformation) und n von 2^{ter} Ordnung (die Circulationen).

Aus den Relationen (5) ergiebt sich nun ohne Weiteres, dass die P_i, $R_{i,x}$ und S eine $(N-n)$-gliedrige Untergruppe, die *Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen*, erzeugen.

Wir wollen daher zuerst nach allen $(N-n)$-gliedrigen Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe fragen. Es wird sich zeigen, dass wir damit zugleich alle Fälle erhalten, in denen es Untergruppen mit mehr als $N-n$ Parametern giebt.

Wir werden zunächst zeigen, dass wir immer annehmen können, dass gewisse Translationen $\sum_1^n{}^j a_j p_j$, die wir als gegeben annehmen, in den gesuchten $(N-n)$-gliedrigen Untergruppen vorkommen.

Wir weisen nämlich nach, dass alle $(N-n)$-gliedrigen Untergruppen, welche keine infinitesimale Translation enthalten, mit der Gruppe der P_i, $R_{i,x}$, S gleichberechtigt sind.*)

Nach dem bekannten Satze:

Enthält eine $(r-m)$-gliedrige Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe $X_1f, X_2f, \ldots, X_rf$ keine infinitesimale Transformation von der Form

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \cdots + e_m X_m f,$$

so enthält sie $r-m$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$X_{m+j}f + \sum_1^m{}^{\nu} e_{j\nu} X_\nu f \qquad (j = 1, 2, \ldots, r-m)$$

enthält eine $(N-n)$-gliedrige Untergruppe, in der keine infinitesimale

*) Wir verfahren dabei ganz analog wie Lie bei seiner Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe.

Translation $\sum_1^n a_j p_j$ vorhanden ist, sicher eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\sum_1^n x_j p_j - \sum_1^n a_j p_j = \sum_1^n (x_j - a_j) p_j$$

und ebenso giebt es für jeden Werth von i und $\varkappa$ eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$(x_i - a_i) p_\varkappa - (x_\varkappa - a_\varkappa) p_i + \sum_1^n b_{i\varkappa j} p_j .$$

Durch Combination dieser beiden infinitesimalen Transformationen ergiebt sich aber:

$$-\sum_1^n b_{i\varkappa j} p_j$$

und da unsere Untergruppe keine infinitesimale Translation enthalten soll, so müssen alle $b_{i\varkappa j}$ verschwinden.

Endlich muss die Untergruppe noch n infinitesimale Transformationen von der Form:

$$C_i + \sum_1^n c_{ij} p_j$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, von der Form:

$$(6) \qquad 2(x_i - a_i) \cdot \sum_1^n (x_j - a_j) p_j - \left(\sum_1^n (x_j - a_j)^2 \right) p_i + \sum_1^n d_{ij} p_j$$

enthalten, denn es ist:

$$2(x_i - a_i) \sum_1^n (x_j - a_j) p_j - \left(\sum_1^n (x_j - a_j)^2 \right) p_i$$

$$= \sum_1^n (2x_i x_j - 2a_i x_j - 2a_j x_i + 2a_i a_j) p_j - \left(\sum_1^n x_j^2 - 2a_j x_j + a_j^2 \right) p_i$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2 \right) p_i - 2a_i \sum_1^n (x_j - a_j) p_j \\ + 2 \sum_1^n a_j \{ (x_j - a_j) p_i - (x_i - a_i) p_j \} \\ + 2a_i \sum_1^n a_j p_j - \left(\sum_1^n a_j^2 \right) p_i . \end{array} \right.$$

Combiniren wir nun (6) mit $\sum_1^n {}^j (x_j - a_j) p_j$, so erhalten wir die infinitesimale Transformation:

$$2(x_i - a_i) \sum_1^n {}^j (x_j - a_j) p_j - \left(\sum_1^n {}^j (x_j - a_j)^2 \right) p_i - \sum_1^n {}^j d_{ij} p_j,$$

sodass wegen (6) folgt:

$$d_{ij} = 0.$$

Wir erhalten demnach die folgenden infinitesimalen Transformationen, welche eine $(N-n)$-gliedrige Untergruppe erzeugen:

$$\boxed{\begin{array}{c} (x_i - a_i) p_\varkappa - (x_\varkappa - a_\varkappa) p_i, \quad \sum_1^n {}^j (x_j - a_j) p_j, \\ 2(x_i - a_i) \sum_1^n {}^j (x_j - a_j) p_j - \left(\sum_1^n {}^j (x_j - a_j)^2 \right) p_i \end{array}}.$$

Durch paarweise Combination dieser infinitesimalen Transformationen überzeugt man sich leicht, dass dieselben auch wirklich eine Gruppe erzeugen. Diese Gruppe lässt den Punkt $x_j = a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ invariant. Für $a_j = 0$ erhalten wir die Gruppe der $R_{i,\varkappa}$, S, C_i, welche den Anfangspunkt in Ruhe lässt. Die erhaltenen Gruppen sind also mit der Gruppe der P_i, $R_{i,\varkappa}$, S gleichberechtigt, q. e. d.

Resultat: *Jede $(N-n)$-gliedrige Untergruppe der allgemeinen conformen Gruppe des R_n, in welcher keine infinitesimale Translation vorkommt, besteht aus allen infinitesimalen Transformationen der conformen Gruppe, welche einen im Endlichen gelegenen Punkt invariant lassen und ist daher mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen gleichberechtigt.*

Wir haben demnach nur noch alle Typen von $(N-n)$-gliedrigen Untergruppen zu bestimmen, von denen wir gewisse darin enthaltene Translationen als bekannt voraussetzen.

Von vornherein können wir den Fall ausschliessen, dass alle Translationen vorkommen, denn dann wären entweder keine Circulationen durch Origo vorhanden, in welchem Falle wir die schon bekannte Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen erhielten, oder es könnten nicht alle Circulationen durch Origo vorkommen, weil dann auch alle $R_{i,\varkappa}$ und S vorkommen müssten. Die Untergruppen aber, welche gewisse Circulationen enthalten, sind in ihrer Gesammtheit offenbar gleichberechtigt mit der Gesammtheit der Untergruppen, welche gewisse Translationen enthalten.

In den zu suchenden Untergruppen können also $1, 2, \ldots, n-1$ unabhängige infinitesimale Translationen vorhanden sein und diese bilden immer eine Gruppe. Da die Bahncurven einer bestimmten Translation alle parallele gerade Linien sind, welche nach einem bestimmten Punkte der unendlich fernen ebenen M_{n-1} gerichtet sind, so können wir uns jede Translation durch einen Punkt im unendlich Fernen repräsentirt denken. Eine Gruppe von m unabhängigen infinitesimalen Translationen wird dann durch eine ebene M_{m-1} der unendlich fernen ebenen M_{n-1} repräsentirt.

Nun wissen wir aber, dass zwei Translationen innerhalb der Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen im Allgemeinen nicht mit einander gleichberechtigt sind; denn wäre dies der Fall, so müsste, da jede Translation durch einen Punkt der unendlich fernen ebenen M_{n-1} bestimmt ist, jeder Punkt dieser M_{n-1} durch Rotation in jeden anderen Punkt derselben übergeführt werden können. Die Gruppe der Rotationen lässt aber die Nullkugel, Null-M^2_{n-2}, invariant. Daher sind auch im Allgemeinen zwei m-gliedrige Gruppen von Translationen nicht mit einander gleichberechtigt.

In Folge dessen sind wir genöthigt, bei der Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe einen wesentlich anderen Weg einzuschlagen, als bei Lie's Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe*). Bei der letzteren Gruppe stützt sich nämlich die Bestimmung der grössten Untergruppen auf den Satz, dass irgend zwei Translationen innerhalb der Gruppe gleichberechtigt sind.

Zwei Translationen sind innerhalb der allgemeinen conformen Gruppe nur dann mit einander gleichberechtigt, *entweder*, wenn beide durch Punkte der unendlich fernen ebenen M_{n-1}, welche nicht auf der Null-M^2_{n-2} liegen, *oder* beide durch Punkte, welche auf der Null-M^2_{n-2} liegen, repräsentirt werden. Zum Beispiel wird p_1 repräsentirt durch einen Punkt, welcher nicht auf der Null-M^2_{n-2} liegt, denn die Bahncurven von p_1 sind gegeben durch:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{0} = \cdots = \frac{dx_n}{0},$$

woraus sich durch Integration als Bahncurven ergeben:

$$x_2 = c_2, \; x_3 = c_3, \ldots, x_n = c_n.$$

Andererseits wird $p_1 + ip_2$ repräsentirt durch einen Punkt, welcher auf der Null-M^2_{n-2} liegt, denn die Bahncurven von $p_1 + ip_2$ sind gegeben durch:

---

*) Vergl. Math. Ann. Bd. XXV, Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1888, pag. 569.

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{i} = \frac{dx_3}{0} = \cdots = \frac{dx_n}{0}$$

oder durch:

$$x_1 + ix_2 = c, \; x_3 = c_3, \ldots, x_n = c_n$$

und das System von Gleichungen:

$$x_1 + ix_2 = 0, \; x_3 = 0, \ldots, x_n = 0$$

erfüllt wirklich die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0,$$

welche die Kegel-M^2_{n-2} vom Anfangspunkt nach der Null-M^2_{n-2} darstellt.

Denken wir uns jetzt m unabh. infinitesimale Translationen gegeben, so werden dieselben durch eine ebene M_{m-1} der unendlich fernen ebenen M_{n-1} repräsentirt. Diese ebene M_m schneidet die Null-M^2_{n-2} nach einer M^2_{m-2}.

Wir erkennen ohne Weiteres, dass zwei m-gliedrige Gruppen von Translationen nur dann mit einander gleichberechtigt innerhalb der allgemeinen conformen Gruppe sein können, wenn die zugehörigen M^2_{m-2} von derselben Species sind, d. h. wenn sie entweder beide allgemeine M^2_{m-2} oder beide in gleicher Weise ausgeartete M^2_{m-2} sind.

Daher ist es nöthig, auf die Ausführungen von Segre*) einzugehen. Nach Segre ist eine ebene M_{m-1} eine Tangential-M_{m-1} der Null-M^2_{n-2} von der Species $a + 1$, wenn die Schnitt-M^2_{m-2} mit der Null-M^2_{n-2} $(a+1)$-mal specialisirt ist, d. h. wenn dieselbe eine ebene M_a von Doppelpunkten besitzt. Insbesondere ist eine ebene M_{m-1} eine gewöhnliche Tangential-M_{m-1}, wenn die Schnitt-M^2_{m-2} *einmal* specialisirt ist, d. h. einen einzigen Doppelpunkt besitzt.

Segre zeigt nun, wie man entscheidet, von welcher Species als Tangential-M_{m-1} einer F_2 eine vorgelegte ebene M_{m-1} ist, wenn die F_2 im R_{n-1} in n homogenen Coordinaten vorgelegt ist:

$$\varphi(x) \equiv \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} x_i x_\varkappa = 0. \tag{7}$$

Er nimmt an, die M_{m-1} sei durch m bekannte Punkte

$$x', x'', \ldots, x^{(m)}$$

gegeben. Die Schnitt-M^2_{m-2} hat dann, wenn wir mit

$$x_i \equiv \sum_1^m{}^j \lambda_j x_i^{(j)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

einen allgemeinen Punkt der M_{m-1} bezeichnen, in den Variabeln λ die Gleichung:

---

*) Vergl. Corrado Segre „Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni" nelle Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, Serie seconda, t. 36, 1885, pag. 22—38.

$$\varphi(\lambda_1 x' + \lambda_2 x'' + \cdots + \lambda_m x^{(m)}) = 0,$$

oder wenn wir einführen:

(7a) $$\varphi(x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}) \equiv \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa}\, x_i^{(\alpha)} x_\varkappa^{(\beta)}$$

die Gleichung:

$$\sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa \left\{\varphi(x^{(i)}, x^{(\varkappa)}) \cdot \lambda_i \lambda_\varkappa\right\} = 0.$$

Die Determinante dieser Schnitt-M_{m-2}^2 ist offenbar die folgende:

(8) $$\begin{vmatrix} \varphi(x', x'), & \varphi(x', x''), & \cdots, & \varphi(x', x^{(m)}) \\ \varphi(x'', x'), & \varphi(x'', x''), & \cdots, & \varphi(x'', x^{(m)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x^{(m)}, x'), & \varphi(x^{(m)}, x''), & \cdots, & \varphi(x^{(m)}, x^{(m)}) \end{vmatrix}$$

Wenn nun diese Determinante, sowie alle Unterdeterminanten bis zur Ordnung $m - a$ verschwinden, so ist dies die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ebene M_{m-1} eine Tangential-M_{m-1} von den Species $a + 1$ der Fläche $\varphi(x) = 0$ darstellt.

Wir kehren jetzt zu unserer Aufgabe zurück. Wir setzen voraus, dass die zu suchenden $(N - n)$-gliedrigen Untergruppen die folgenden $n - \nu - \mu$ unabhängigen infinitesimalen Translationen und nur diese enthalten (μ und ν seien beliebige ganze Zahlen, welche nur die Bedingung $n - \nu - \mu > 0$ zu erfüllen haben):

(9) $$\left\{\begin{matrix} p_{\nu+1} + ip_{\nu+2}, & p_{\nu+3} + ip_{\nu+4}, & \ldots, & p_{\nu+2\mu-1} + ip_{\nu+2\mu}, \\ p_{\nu+2\mu+1}, & p_{\nu+2\mu+2}, & \ldots, & p_n \end{matrix}\right\}.$$

Wir wollen zeigen, dass wir damit alle einzelnen Fälle behandeln.

Die Translationen (9) werden durch eine ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ der unendlich fernen ebenen M_{n-1} repräsentirt, welche bestimmt wird durch:

(10) $$\left\{\begin{matrix} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_\nu = 0, \quad x_{\nu+1} + ix_{\nu+2} = 0, \\ x_{\nu+3} + ix_{\nu+4} = 0, \ldots, x_{\nu+2\mu-1} + ix_{\nu+2\mu} = 0. \end{matrix}\right\}$$

Z. B. wird $p_{\nu+1} + ip_{\nu+2}$ repräsentirt durch einen Punkt x' der erwähnten ebenen $M_{n-\nu-\mu-1}$, welcher bestimmt ist durch:

(11) $$x_1' = 0, \ldots, x_\nu' = 0, \quad x'_{\nu+1} + ix'_{\nu+2} = 0, \quad x'_{\nu+3} = 0, \ldots, x'_n = 0.$$

Ferner ist:

(12) $$\varphi(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$$

die Gleichung, welche die Null-M_{n-2}^2 (als Schnitt der unendlich fernen Ebene mit $\varphi(x) = 0$) repräsentirt. Diese Gleichung ist homogen in $x_1, \ldots, x_n$. Es ist also z. B. wegen (11):

$$\varphi(x, x') = x_{\nu+1} + ix_{\nu+2}.$$

Man erkennt leicht, dass sich in unserem Falle die Determinante (8) auf die folgende reducirt:

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x^2_{\nu+2\mu+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x^2_{\nu+2\mu+2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & x^2_n \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante verschwinden alle Unterdeterminanten bis zur Ordnung $n - \nu - 2\mu + 1$, während nicht alle von der Ordnung $n - \nu - 2\mu$ verschwinden. Es ist also:

$$m = n - \nu - \mu; \quad m - a = n - \nu - 2\mu + 1;$$

folglich ergiebt sich:

$$a = \mu - 1,$$

d. h.:

Die Translationen (9) *werden durch eine ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ der unendlich fernen ebenen M_{n-1} repräsentirt, welche eine Tangential-$M_{n-\nu-\mu-1}$ von der Species μ der Null-M^2_{n-2} ist, d. h. die ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ hat eine ebene $M_{\mu-1}$ mit der Null-M^2_{n-2} gemein.*

Dieses Resultat zeigt uns, dass wir unter der Voraussetzung (9) wirklich alle Fälle behandeln, denn μ kann höchstens gleich $\frac{n}{2}$ oder gleich $\frac{n-1}{2}$ sein, jenachdem n gerade oder ungerade, und wirklich sind die ebenen

$$M_{\frac{n-2}{2}} \text{ resp. } M_{\frac{n-3}{2}}$$

die grössten ebenen Mannigfaltigkeiten auf der Null-M^2_{n-2}. Die Ausdrücke (9) geben uns also immer an, welche Fälle vorkommen können, z. B. zeigen sie uns ohne Weiteres, welches die grössten linearen Mannigfaltigkeiten auf der Null-M^2_{n-2} im R_6 resp. auf irgend einer F_2 im R_5 sind. Nämlich: $p_1 + ip_2$, $p_3 + ip_4$, $p_5 + ip_6$ sagt uns, dass μ höchstens gleich 3 ist, dass also die gewöhnlichen Ebenen die grössten ebenen Mannigfaltigkeiten sind.

Wir haben bisher stillschweigend angenommen, dass zwei ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$, welche die Null-M^2_{n-2} nach $M^2_{n-\nu-\mu-2}$ von derselben Species μ schneiden, innerhalb der allgemeinen conformen Gruppe immer gleichberechtigte Gruppen von Translationen repräsentiren. Wäre dies nicht der Fall, so würden wir unter der Voraussetzung (9) nicht alle

Typen von $(N - n)$-gliedrigen Untergruppen der conformen Gruppe erhalten.

Um nun nachzuweisen, dass dies wirklich der Fall, verfahren wir in folgender Weise:

1) Wir suchen die Anzahl σ von unabhängigen infinitesimalen Rotationen $\sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^\varkappa a_{i,\varkappa} R_{i,\varkappa}$, welche eine unendlich ferne ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ in Ruhe lassen. Dann geht die ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ bei Ausführung aller $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ Rotationen in $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}-\sigma}$ oder sagen wir lieber in ∞^{s_1} verschiedene ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ über, deren Inbegriff gegenüber allen Rotationen invariant bleibt.

2) Andererseits suchen wir die Anzahl ∞^{s_2} der ebenen $M_{n-\nu-\mu-1}$ von derselben Species μ, welche im Unendlichfernen liegen.

Ergiebt sich dann $s_1 = s_2$, so ist der Nachweis geführt.

1) Im ersteren Theile der Untersuchung können wir die ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ des Unendlichfernen durch die ebene $M_{n-\nu-\mu}$ ersetzen, welche durch erstere und durch den Coordinatenanfangspunkt geht, denn irgend eine Rotation lässt entweder beide invariant oder beide nicht invariant. Die Gleichungen der ebenen $M_{n-\nu-\mu}$ seien:

$$x_\lambda = 0, \quad x_{\nu+2j-1} + i x_{\nu+2j} = 0, \tag{14}$$

wo $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu, \quad j = 1, 2, \ldots, \mu$.

Führen wir nun auf diese Gleichungen die allgemeine infinitesimale Rotation:

$$\sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^\varkappa a_{i,\varkappa}(x_i p_\varkappa - x_\varkappa p_i) \quad (\text{wo } a_{i,\varkappa} = - a_{\varkappa,i}) \tag{15}$$

aus, so erhalten wir die folgenden beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^n {}^i \sum_1^n a_{i,\varkappa}\left(x_i \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\varkappa} - x_\varkappa \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i}\right) = 0, \\ &\sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^\varkappa a_{i,\varkappa}\left(x_i \frac{\partial(x_{\nu+2j-1} + i x_{\nu+2j})}{\partial x_\varkappa} - x_\varkappa \frac{\partial(x_{\nu+2j-1} + i x_{\nu+2j})}{\partial x_i}\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

oder:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^n {}^i a_{i,\lambda} x_i - \sum_1^n {}^\varkappa a_{\lambda,\varkappa} x_\varkappa = 0, \\ &\sum {}^i (a_{i,\nu+2j-1} + i a_{i,\nu+2j}) x_i - \sum_1^n {}^\varkappa (a_{\nu+2j-1,\varkappa} + i a_{\nu+2j,\varkappa}) x_\varkappa = 0 \end{aligned}\right\}$$

oder:

$$\sum_1^n {}^i a_{i,\lambda} x_i = 0, \quad \sum_1^n {}^i (a_{i,\nu+2j-1} + i a_{i,\nu+2j}) x_i = 0.$$

Soll (14) die Transformation (15) gestatten, so müssen daher die folgenden Bedingungen erfüllt werden ($\varrho = \nu + 2\mu + 1,\ \nu + 2\mu + 2, \cdots, n$):

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_{\lambda,\varrho} = 0 & \text{an Zahl: } \nu(n - \nu - 2\mu) \\ a_{\nu+2j-1,\varrho} + i a_{\nu+2j,\varrho} = 0 & \text{resp.: } \mu(n - \nu - 2\mu) \\ a_{\lambda,\nu+2j-1} + i a_{\lambda,\nu+2j} = 0 & \text{resp.: } \nu \cdot \mu \\ a_{\nu+2j_1,\nu+2j_2-1} + i a_{\nu+2j_1,\nu+2j_2} = i(a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} + i a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2}) & \end{array}\right\}$$

resp.: $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ unabhängige Relationen, die von den Parametern $a_{\iota,\varkappa}$ erfüllt werden müssen.

Daher ergiebt sich:

$$s_1 = \nu(n - \nu - 2\mu) + \mu(n - \nu - 2\mu) + \nu \cdot \mu + \frac{\mu(\mu - 1)}{2}$$
$$= (\mu + \nu)(n - \nu - \mu) - \frac{\mu(\mu + 1)}{2}.$$

2) Im R_n giebt es $\infty^{(m+1)(n-m)}$ ebene M_m, also in der unendlich fernen ebenen M_{n-1} $\infty^{(m+1)(n-m-1)}$ ebene M_m. Eine ebene $M_{\mu-1}$ schneidet die Null-M_{n-2}^2 nach einer $M_{\mu-2}^2$, welche durch $\frac{(\mu-1)(\mu+2)}{2}$ Punkte bestimmt ist. Soll die $M_{\mu-1}$ auf der Null-M_{n-2}^2 liegen, so muss die $M_{\mu-1}$ noch einen weiteren Punkt der Null-M_{n-2}^2, welcher nicht auf der Null-$M_{\mu-2}^2$ liegt, enthalten. Damit also eine ebene $M_{\mu-1}$ auf der Null-M_{n-2}^2 liegt, müssen $\frac{(\mu-1)(\mu+2)}{2} + 1 = \frac{\mu(\mu+1)}{2}$ Bedingungen erfüllt werden. Daher giebt es $\infty^{(m+1)(n-m-1) - \frac{\mu(\mu+1)}{2}}$ ebene M_m von der Species μ in Bezug auf die Null-M_{n-2}^2 *). Wir erhalten also: $\infty^{s_2} = \infty^{(n-\nu-\mu)(\nu+\mu) - \frac{\mu(\mu+1)}{2}}$ ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ in der unendlich fernen ebenen M_{n-1}. Mithin ist wirklich, $s_1 = s_2$, q. e. d.

Man könnte nun den Einwand erheben, dass es eine Anzahl von *discreten* continuirlichen Schaaren von ebenen $M_{n-\nu-\mu-1}$ auf der Null-M_{n-2}^2 geben könnte und dass in Folge dessen der verlangte Beweis nicht erbracht wäre. Es ist aber bekannt, dass nur die grössten ebenen Mannigfaltigkeiten auf der Null-M_{n-2}^2 im R_n, wo n eine gerade Zahl, also die ebenen $M_{\mu-1}$, *zwei* discrete Schaaren bilden. Es ist leicht einzusehen, dass die diesen beiden discreten Schaaren entsprechenden Untergruppen nicht wesentlich von einander verschieden sind.

Wir wollen nur noch darauf hinweisen, dass wir durch den obigen Beweis zugleich bewiesen haben, *dass zwei ebene Tangential-Mannigfaltigkeiten von derselben Species in Bezug auf eine F_2 im R_n immer*

*) Vergl. Segre l. c.

durch eine projective Transformation der F_2 in einander übergeführt werden können. Die F_2 sei die Kugel $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$. Durch stereographische Projection geht eine ebene $M_{n-\nu-\mu}$ von der Species $\mu + 1$ in Bezug auf die Kugel des R_{n+1} in eine unendlich ferne ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ des R_n von der Species μ in Bezug auf die Null-M_{n-2}^2 über und es entspricht jeder ebenen $M_{n-\nu-\mu}$ durch eine der unendlich fernen $M_{n-\nu-\mu-1}$ des R_n eine bestimmte $M_{n-\nu-\mu}$ des R_{n+1} von der Species $\mu + 1$. Es ist klar, dass die $M_{n-\nu-\mu}$ des R_{n+1} durch die projective Gruppe der F_2 des R_{n+1} in derselben Weise vertauscht werden wie die erwähnten $M_{n-\nu-\mu}$ des R_n durch die allgemeine Gruppe von Rotationen um einen festen Punkt. Jede ebene $M_{n-\nu-\mu}$ durch eine unendlich ferne ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ kann aber in jede andere solche $M_{n-\nu-\mu}$ durch die conforme Gruppe übergeführt werden, wie wir zeigen wollen. Die ebene $M_{n-\nu-\mu}$: $x_\lambda = 0$, $x_{\nu+2j-1} + ix_{\nu+2j} = 0$ wird nämlich durch die $\nu + \mu$ unabhängigen infinitesimalen Translationen p_λ, $p_{\nu+2j-1} + ip_{\nu+2j}$ in andere $M_{n-\nu-\mu}$ übergeführt, welche durch dieselbe unendlich ferne $M_{n-\nu-\mu-1}$ gehen. In der That giebt es $\infty^{\nu+\mu}$ ebene $M_{n-\nu-\mu}$ durch eine $M_{n-\nu-\mu-1}$ im R_n und nicht mehr; dieselben können also wirklich in einander übergeführt werden. Damit ist aber unsere obige Behauptung erwiesen.

§ 2.

Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe.

Im vorigen Abschnitt haben wir endgiltig gezeigt, dass wir unter der Voraussetzung (9) alle Typen von $(N - n)$-gliedrigen Untergruppen erhalten, welche nicht mit der Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen gleichberechtigt sind.

Wir nehmen also an, die zu suchenden $(N - n)$-gliedrigen Untergruppen enthalten die folgenden $n - \nu - \mu$ unabhängigen infinitesimalen Translationen:

(17) $P_{\nu+2j-1} + iP_{\nu+2j}$, P_ϱ $(j = 1, \cdots, \mu;\ \varrho = \nu + 2\mu + 1, \cdots, n)$

während keine der Translationen:

$$P_\lambda,\ P_{\nu+2j-1},\ P_{\nu+2j} \quad (\lambda = 1, \cdots, \nu)$$

vorkommen soll.

Wir können also annehmen, in den gesuchten Untergruppen seien keine infinitesimalen Translationen von der folgenden Form vorhanden:

$$(18) \qquad \sum_1^\nu{}^\lambda \varepsilon_\lambda P_\lambda + \sum_1^\mu{}^j \varepsilon_{\nu+2j-1} P_{\nu+2j-1}.$$

Wir verfahren nun in folgender Weise:

Einerseits suchen wir die Anzahl derjenigen unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$(19)\qquad \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} R_{i,\varkappa} + \sum_1^\nu{}^\lambda \varepsilon_\lambda P_\lambda + \sum_1^\mu{}^j \varepsilon_{\nu+2j-1} P_{\nu+2j-1},$$

welche durch Combination mit den Translationen (17) keine Translationen von der Form (18) ergeben. Da die Translationen mit einander vertauschbar sind, *suchen wir also die Anzahl derjenigen unabhängigen infinitesimalen Rotationen $R_{i,\varkappa}$, die in den gesuchten Untergruppen vorkommen dürfen;* dieselbe sei gleich σ.

Andererseits suchen wir die Anzahl derjenigen unabhängigen infinitesimalen *Transformationen* (19), *welche in den gesuchten Untergruppen vorkommen müssen;* dieselbe sei gleich τ.

Es ist einleuchtend, dass wir nur dann Untergruppen der verlangten Art erhalten, wenn $\sigma \geqq \tau$. Die Fälle, in denen $\sigma < \tau$, sind also ohne Weiteres auszuschliessen. Es zeigt sich, dass dann nur einige wenige Fälle übrig bleiben.

Wir suchen zunächst die Anzahl σ der möglichen Rotationen.

Durch Combination von $\sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} R_{i,\varkappa}$ $(a_{i,\varkappa} = -a_{\varkappa,i})$ mit den Translationen (17) erhalten wir die folgenden Relationen:

$$\left(P_\varrho, \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} R_{i,\varkappa}\right) = \sum_1^n{}^\varkappa a_{\varrho,\varkappa} P_\varkappa - \sum_1^n{}^i a_{i,\varrho} P_i = -2 \sum_1^n{}^i a_{i,\varrho} P_i,$$

$$\left(P_{\nu+2j-1} + i P_{\nu+2j}, \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} R_{i,\varkappa}\right) = -2 \sum_1^n{}^i (a_{i,\nu+2j-1} + i a_{i,\nu+2j}) P_i.$$

Da nun nach Voraussetzung keine infinitesimalen Translationen von der Form (18) vorkommen dürfen, so ergeben sich hieraus für die $a_{i,\varkappa}$ die Bedingungsgleichungen (16) (vergl. pag. 128):

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{\lambda,\varrho} = 0 & \text{an Zahl: } \nu(n-\nu-2\mu) \\ a_{\nu+2j-1,\varrho} + i a_{\nu+2j,\varrho} = 0 & \text{resp.: } \mu(n-\nu-2\mu) \\ a_{\lambda,\nu+2j-1} + i a_{\lambda,\nu+2j} = 0 & \text{resp.: } \nu \cdot \mu \\ a_{\nu+2j_1,\nu+2j_2-1} + i a_{\nu+2j_1,\nu+2j_2} = i(a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} + i a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2}) & \\ & \text{resp.: } \frac{\mu(\mu-1)}{2} \text{ unabhängige} \\ & \text{Relationen.} \end{array}\right\}$$

Das sind im Ganzen:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \sigma = \nu(n-\nu-2\mu) + \mu(n-\nu-2\mu) + \nu\cdot\mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2}$$

unabhängige Relationen, die von den Parametern $a_{i,\varkappa}$ erfüllt werden müssen. Also ergiebt sich:

$$\sigma = \frac{n(n-1)}{2} - (\nu + \mu)(n - \nu - \mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2}. \tag{20}$$

Wir wollen gleich die unabhängigen infinitesimalen Rotationen, welche vorkommen können, aufstellen. Dabei bereitet nur die letzte der Relationen (16) einige Schwierigkeiten.

Bezeichnen wir:

$$\left.\begin{matrix}\lambda\\ \lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots, \nu; \qquad \left.\begin{matrix}j\\ j_1\\ j_2\end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots, \mu;$$

$$\left.\begin{matrix}\varrho\\ \varrho_1\\ \varrho_2\end{matrix}\right\} = \nu + 2\mu + 1, \quad \nu + 2\mu + 2, \cdots, n;$$

so erhalten wir etwa:

$$\left\{\begin{array}{ll} & \text{an Zahl:}\\ R_{\lambda_1, \lambda_2} & \frac{\nu(\nu-1)}{2}\\ R_{\varrho_1, \varrho_2} & \frac{(n-\nu-2\mu)(n-\nu-2\mu-1)}{2}\\ R_{\lambda, \nu+2j-1} + i R_{\lambda, \nu+2j} & \mu \cdot \nu\\ R_{\varrho, \nu+2j-1} + i R_{\varrho, \nu+2j} & \mu(n-\nu-2\mu)\\ R_{\nu+2j-1, \nu+2j} & \mu\\ (\mathrm{a})\left\{\begin{matrix} R_{\nu+2j_1-1, \nu+2j_2-1} + i R_{\nu+2j_1-1, \nu+2j_2}\\ R_{\nu+2j_1, \nu+2j_2-1} + i R_{\nu+2j_1, \nu+2j_2}\end{matrix}\right\} & \text{davon } \frac{3\mu(\mu-1)}{2} \text{ un-}\\ & \text{abhängige.}\end{array}\right\}. \tag{21}$$

Wir könnten die letzteren $\mu(\mu-1)$ Rotationen (21a) auch so schreiben:

$$\left\{\begin{array}{ll} & \text{unabhängige an Zahl:}\\ R_{\nu+2j_1-1, \nu+2j_2} - R_{\nu+2j_1, \nu+2j_2-1} & \frac{\mu(\mu-1)}{2},\\ R_{\nu+2j_1-1, \nu+2j_2-1} + R_{\nu+2j_1, \nu+2j_2} & \frac{\mu(\mu-1)}{2},\\ R_{\nu+2j_1-1, \nu+2j_2-1} + i R_{\nu+2j_1-1, \nu+2j_2} & \frac{\mu(\mu-1)}{2}.\end{array}\right.$$

Wir erkennen aber, dass es nicht möglich ist, von den letzteren nur die unabhängigen infinitesimalen Rotationen allgemein hinzuschreiben, dass dies vielmehr nur in jedem einzelnen Falle möglich ist. Wenn wir daher im Folgenden die $\mu(\mu-1)$ Rotationen (21a) schreiben, so müssen wir uns immer erinnern, dass davon nur $\frac{3\mu(\mu-1)}{2}$ unabhängig sind.

Z. B.:

$$P_1 + iP_2, \quad P_3 + iP_4$$

lassen die folgenden Rotationen zu:

$$R_{12}, \; R_{34}, \; R_{13} + iR_{23}, \; R_{14} + iR_{24}, \; R_{13} + iR_{14}, \; R_{23} + iR_{24}.$$

Wegen:

$$(R_{13} + iR_{23}) - (R_{13} + iR_{14}) + i(R_{14} + iR_{24}) = i(R_{23} + iR_{24})$$

sind dies jedoch nur 5 unabhängige Rotationen.

Man kann leicht verificiren, dass die Zahl der unabhängigen Rotationen (21) wirklich denselben Werth von σ wie (20) ergiebt.

Nach dem Vorhergehenden ist es klar, dass keine infinitesimale Rotation von der folgenden Form vorkommen darf:

$$(22) \quad R \equiv \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^{\nu}{}^{\lambda} \sum_{\nu+2\mu+1}^{n}{}^{\varrho} a_{\lambda,\varrho} R_{\lambda,\varrho} + \sum_{\nu+2\mu+1}^{n}{}^{\varrho} \sum_1^{\mu}{}^{j} a_{\varrho,\nu+2j-1} R_{\varrho,\nu+2j-1} \\ + \sum_1^{\nu}{}^{\lambda} \sum_1^{\mu}{}^{j} a_{\lambda,\nu+2j-1} R_{\lambda,\nu+2j-1} \\ + \sum_1^{\mu}{}^{j_1} \sum_1^{\mu}{}^{j_2} a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} R_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} \end{array} \right\}.$$

In der That, es ist:

$$(P_\varrho, R) = -\sum_1^{\nu}{}^{\lambda} a_{\lambda,\varrho} P_\lambda + \sum_1^{\mu}{}^{j} a_{\varrho,\nu+2j-1} P_{\nu+2j-1},$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (P_{\nu+2j-1} + iP_{\nu+2j}, R) = \\ -\sum_{\nu+2\mu+1}^{n}{}^{\varrho} a_{\varrho,\nu+2j-1} P_\varrho - \sum_1^{\nu} a_{\lambda,\nu+2j-1} P_\lambda + 2\sum_1^{\mu}{}^{j} a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j-1} P_{\nu+2j-1}. \end{array} \right\}$$

Solche Translationen können aber nach Voraussetzung nicht vorkommen. Daher ergiebt sich, wie man leicht einsieht, dass alle Coefficienten a in (22) verschwinden müssen, dass also wirklich keine Transformationen von der Form (22) vorkommen können.

Dass die Aufstellung der Rotationen (21) richtig ist, erkennt man daraus, dass sich durch Combination der Translationen (17) mit denselben immer wieder Translationen (17) ergeben.

Man kann ferner leicht verificiren, dass die Rotationen (21) eine Gruppe erzeugen, was selbstverständlich ist. Wir erkennen also, dass wir zugleich mit der Bestimmung von Untergruppen der conformen Gruppe Untergruppen der isomorphen Gruppe der Rotationen erhalten.

Es ist nur noch hervorzuheben, dass in den zu suchenden Untergruppen zu jeder der Rotationen (21) als additive Glieder Translationen von der Form (18) hinzutreten.

Nachdem wir nun σ bestimmt haben, bleibt uns noch übrig, *τ zu finden.*

Zu diesem Zwecke erinnern wir an den bekannten Lie'schen *Satz**):

Eine $(r - m)$-gliedrige Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe $X_1f, X_2f, \cdots, X_rf$ enthält mindestens $q - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \cdots + e_q X_q f.$$

In unserem Falle ist $q = \nu + \mu + \frac{n(n-1)}{2}$, $m = n$. Folglich erkennen wir ohne Weiteres, *dass es in den gesuchten* $(N - n)$-*gliedrigen Untergruppen mindestens:*

$$\tau = \frac{n(n-1)}{2} + \nu + \mu - n \tag{23}$$

unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form (19):

$$\sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} R_{i,\varkappa} + \sum_1^\nu{}^\lambda \varepsilon_\lambda P_\lambda + \sum_1^\mu{}^j \varepsilon_{\nu+2j-1} P_{\nu+2j-1}$$

geben muss.

Nach dem pag. 130 Gesagten erhalten wir nur dann Untergruppen der verlangten Art, wenn $\sigma \geqq \tau$, wenn also:

$$\frac{n(n-1)}{2} - (\nu + \mu)(n - \nu - \mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2} \geqq \frac{n(n-1)}{2} + \nu + \mu - n$$

oder:

$$(\nu + \mu - 1)(n - \nu - \mu) \leqq \frac{\mu(\mu+1)}{2}. \tag{24}$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle: $\mu = 0$ und $\mu > 0$.

I. $\mu = 0$. Nach (24) muss sein:

$$(\nu - 1)(n - \nu) \leqq 0.$$

Diese Bedingung wird nur durch $\nu = 0$ oder $\nu = 1$, n beliebig, erfüllt. Den Fall $\nu = 0$, $\mu = 0$ haben wir aber von vornherein ausgeschlossen. Es bleibt also nur der eine Fall näher zu untersuchen:

1) $\nu = 1$, $\mu = 0$, n beliebig, $\sigma = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \tau$.

II. $\mu > 0$. Die Maximalzahl von ν ist dann $n - 2\mu$, also muss sein:

$$n - \nu - \mu \geqq \mu.$$

---

*) Vergl. Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1888.

Setzen wir dies in (24) ein, so muss um so mehr sein:

$$(\nu + \mu - 1)\,\mu \leqq \frac{\mu(\mu+1)}{2}$$

oder: $$\nu + \mu - 1 \leqq \frac{\mu+1}{2}$$

(25) oder: $$2\nu \leqq 3 - \mu.$$

Daraus folgt nun ohne Weiteres, dass es für $\mu > 3$ keine Untergruppen der verlangten Art giebt.

Wir haben demnach nur noch die folgenden 3 Fälle zu behandeln:

a) $\mu = 1$. Aus (25) folgt $\nu = 0$ oder $\nu = 1$. Aus (24) folgt für $\nu = 0$: n beliebig, für $\nu = 1$: $n = 1, 2, 3$. Da immer $\nu + 2\mu \leqq n$ sein muss, so kann n nur gleich 3 sein, wenn $\nu = 1$. Wir erhalten also nur die folgenden beiden Fälle:

2) $\nu = 0,\ \ \mu = 1,\ \ n$ *beliebig*, $\sigma = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = \tau + 1.$

3) $\nu = 1,\ \ \mu = 1,\ \ n = 3,\ \ \sigma = 2 = \tau.$

b) $\mu = 2$. Aus (25) folgt $\nu = 0$ und aus (24) $n \leqq 5$. Wegen $n \geqq 2\mu$ erhalten wir nur die folgenden beiden Fälle:

4) $\nu = 0,\ \ \mu = 2,\ \ n = 4,\ \ \sigma = 5 = \tau + 1.$

5) $\nu = 0,\ \ \mu = 2,\ \ n = 5,\ \ \sigma = 7 = \tau.$

c) $\mu = 3$. Aus (25) folgt $\nu = 0$ und aus (24) $2(n-3) \lesseqgtr 6$ oder $n \lesseqgtr 6$. Wegen $n \gtreqless 2\mu$ kommt aber nur der folgende Fall in Betracht:

6) $\nu = 0,\ \ \mu = 3,\ \ n = 6,\ \ \sigma = 12 = \tau.$

Wir haben demnach die Bestimmung aller $(N-n)$-gliedrigen Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe auf die Behandlung von 6 speciellen Fällen reducirt.

Wir sehen, dass entweder $\sigma = \tau$ oder $\sigma = \tau + 1$ ist.

In den Fällen, in welchen $\sigma = \tau$, giebt es keine Untergruppen mit mehr als $N - n$ Parametern; denn gäbe es z. B. eine $(N - n + 1)$-gliedrige Untergruppe in einem solchen Falle, so müssten $\tau + 1$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form (19) vorkommen; die Zahl σ bliebe aber dieselbe. Das giebt aber einen Widerspruch. Analog erhalten wir in den Fällen, in welchen $\sigma = \tau + 1$, höchstens Untergruppen mit $N - n + 1$ Parametern, aber keine grösseren. Es ist noch hervorzuheben, dass wir hier alle Typen von Untergruppen mit mehr als $N - n$ Parametern erhalten, denn eine solche Untergruppe enthält sicher mindestens eine infinitesimale Translation.

Aus unseren bisherigen Betrachtungen folgt also ohne Weiteres das *Theorem*:

Die N-gliedrige allgemeine conforme Gruppe des R_n enthält keine Untergruppen mit mehr als $N - n + 1$ Parametern.

Wir wollen nun die 6 übrig gebliebenen Fälle einzeln untersuchen:

1) $\nu = 1$, $\mu = 0$, *n beliebig*, $\sigma = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \tau$.

Es kommen die folgenden infinitesimalen Translationen vor:

$$P_2, P_3, \cdots, P_n.$$

Nach unseren allgemeinen Betrachtungen müssen dann auch die folgenden infinitesimalen Transformationen vorkommen:

$$R_{i,\varkappa} + a_{i,\varkappa} P_1 \quad (i, \varkappa = 2, 3, \cdots, n),$$

während keine von der folgenden Form vorhanden sein darf:

$$a_1 P_1 + \sum_2^n {}_\varkappa a_{1,\varkappa} R_{1,\varkappa}.$$

Da dies gerade n unabhängige infinitesimale Transformationen sind, so müsste die gesuchte Untergruppe nach dem pag. 120 angeführten Satze eine infinitesimale Transformation von der Form enthalten:

$$C_1 + a_1 P_1 + \sum_2^n {}_\varkappa a_{1,\varkappa} R_{1,\varkappa}.$$

Dann müsste aber auch vorkommen:

$$\left(P_2, C_1 + a_1 P_1 + \sum_2^n {}_\varkappa a_{1,\varkappa} R_{1,\varkappa}\right) = 2 R_{1,2} - a_{1,2} P_1.$$

Da aber eine solche Transformation nicht vorkommen darf, so erhalten wir in diesem Falle *keine* Untergruppe der verlangten Art.

2) $\nu = 0$, $\mu = 1$, *n beliebig*, $\sigma = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = \tau + 1$.

Es kommen die folgenden infinitesimalen Translationen vor:

$$P_1 + i P_2, P_3, \cdots, P_n.$$

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $n > 2$. Es darf keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\sum_3^n {}_\varrho a_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + a_1 P_1 \quad (\varrho = 3, \cdots, n)$$

vorkommen, also auch keine von der Form:

$$C_1 + \sum_3^n {}_\varrho a_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + a_1 P_1,$$

denn es ist ($\varrho_1 = 3, \cdots, n$):

$$\left(P_{\varrho_1}, \; C_1 + \sum_3^n{}_\varrho \, a_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + a_1 P_1\right) = 2R_{1,\varrho_1} - a_{1,\varrho_1} P_1.$$

Da also n unabhängige infinitesimale Transformationen nicht vorkommen können, eo erhalten wir in diesem Falle *keine* Untergruppe *mit mehr als $N - n$ Parametern.*

Demnach erhalten wir das *Theorem:*

Die N-gliedrige allgemeine conforme Gruppe des R_n enthält, wenn wir vorläufig vom R_2 und R_4 absehen, keine Untergruppe mit mehr als $N - n$ Parametern.

Wir wollen nun die $(N - n)$-gliedrigen Untergruppen aufsuchen, von denen wir $P_1 + iP_2$, $P_\varrho(\varrho = 3, \cdots, n)$ schon kennen. Nach dem Vorausgehenden müssen dann auch infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen vorkommen:

$$\begin{cases} R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1, \\ R_{1,\varrho} + iR_{2,\varrho} + \varepsilon_\varrho P_1, \\ R_{\varrho_1,\varrho_2} + \varepsilon_{\varrho_1,\varrho_2} P_1, \\ S + a_1 C_1 + \sum\limits_3^n a_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + a_2 P_1, \\ C_2 + b_1 C_1 + \sum\limits_3^n{}_\varrho \, b_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + b_2 P_1, \\ C_\varrho + c_1 C_1 + \sum\limits_3^n{}_\varrho \, c_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + c_2 P_1. \end{cases}$$

Es ergiebt sich:

$$\begin{aligned} (R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1, \; R_{1,\varrho} + iR_{2,\varrho} + \varepsilon_\varrho P_1) &= -R_{2,\varrho} + iR_{1,\varrho} + \varepsilon_1 P_\varrho - \varepsilon_\varrho P_2 \\ &= i(R_{1,\varrho} + iR_{2,\varrho} + i\varepsilon_\varrho P_2) + \varepsilon_1 P_\varrho, \\ (R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1, \; R_{\varrho_1,\varrho_2} + \varepsilon_{\varrho_1,\varrho_2} P_1) &= \varepsilon_{\varrho_1,\varrho_2} P_2, \end{aligned}$$

also: $\varepsilon_\varrho = 0$, $\varepsilon_{\varrho_1,\varrho_2} = 0$.

$$\left(P_{\varrho_1}, \; S + a_1 C_1 + \sum_3^n{}_\varrho \, a_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + a_2 P_1\right) = P_{\varrho_1} + 2a_1 R_{1,\varrho_1} - a_{1,\varrho_1} P_1,$$

also: $a_1 = 0$, $a_{1,\varrho} = 0$.

$$\left(P_{\varrho_1}, \; C_2 + b_1 C_1 + \sum_3^n{}_\varrho \, b_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + b_2 P_1\right) = 2(R_{2,\varrho_1} + b_1 R_{1,\varrho_1}) - b_{1,\varrho_1} P_1,$$

also: $b_1 = -i$, $b_{1,\varrho} = 0$.

Für $n > 3$ verfahren wir in folgender Weise weiter:

$$\left(P_{\varrho_1},\ C_\varrho + c_1 C_1 + \sum_3^n{}^{\varrho} c_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + c_2 P_1\right) = 2 R_{\varrho,\varrho_1} + 2 c_1 R_{1,\varrho_1} - c_{1,\varrho_1} P_1,$$

$$\text{also: } c_1 = 0,\ c_{1,\varrho} = 0.$$

$$(S + a_2 P_1,\ C_\varrho + c_2 P_1) = C_\varrho - 2a_2 R_{1,\varrho} - c_2 P_1,$$

$$\text{also: } a_2 = 0,\ c_2 = 0.$$

$$(S,\ C_2 - iC_1 + b_2 P_1) = C_2 - iC_1 - b_2 P_1,$$

$$\text{also: } b_2 = 0.$$

$$(R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1,\ S) = \varepsilon_1 P_1,$$

$$\text{also: } \varepsilon_1 = 0.$$

Wir erhalten demnach die folgende $(N-n)$-gliedrige Untergruppe:

$$\boxed{\begin{array}{c} P_1 + iP_2,\ P_\varrho,\ R_{1,2},\ R_{1,\varrho} + iR_{2,\varrho},\ R_{\varrho_1,\varrho_2},\ S,\ C_1 + iC_2,\ C_\varrho \\ (\varrho,\ \varrho_1,\ \varrho_2 = 3, \cdots, n) \end{array}}$$

Diese Untergruppe lässt $x_1 + ix_2 = 0$, also eine Tangential-M^1_{n-1} des Null-Kegels $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = 0$ invariant. Die erhaltene Gruppe ist mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen gleichberechtigt und nicht als ein neuer Typus zu betrachten.

Für $n = 3$ kennen wir die folgenden infinitesimalen Transformationen:

$$P_1 + iP_2,\ P_3,\ R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1,\ R_{1,3} + iR_{2,3},\ S + a_2 P_1,$$
$$C_2 - iC_1 + b_2 P_1,\ C_3 + c_1 C_1 + c_{1,3} R_{1,3} + c_2 P_1.$$

Durch Combination je zweier dieser Transformationen kann man nur bestimmen:

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ b_2 = -2i\varepsilon_1^2 = -\varepsilon_1 c_{1,3} = 2\varepsilon_1 a_2.$$

Es bleibt also ein willkürlicher Parameter übrig. Wir werden später einsehen, dass wir in diesem Falle keinen neuen Typus erhalten.

b) $n = 2$. In diesem Falle wollen wir die $(N - n)$-gliedrigen Untergruppen nicht bestimmen, da wir sogar eine $(N - n + 1)$-, resp. 5-gliedrige Untergruppe erhalten.

Es kommen etwa die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$P_1 + iP_2,\ R_{1,2} + a_1 P_1,\ S + a_2 P_1,\ C_1 + a_3 P_1,\ C_2 + a_4 P_1.$$

Es ergiebt sich nun:

$$(P_1 + iP_2,\ C_2 + a_4 P_1) = -2R_{1,2}, \qquad \text{also: } a_1 = 0.$$
$$(R_{1,2},\ S + a_2 P_1) = -a_2 P_2, \qquad \text{also: } a_2 = 0.$$
$$(S,\ C_1 + a_3 P_1) = C_1 - a_3 P_1, \qquad \text{also: } a_3 = 0.$$
$$(S,\ C_2 + a_4 P_1) = C_2 - a_4 P_1, \qquad \text{also: } a_4 = 0.$$

Wir erhalten demnach die folgende 5-*gliederige* Untergruppe der conformen Gruppe des R_2:

$$(26)\qquad \boxed{P_1 + iP_2,\ R_{1,2},\ S,\ C_1,\ C_2}$$

Diese Untergruppe lässt $x_1 + ix_2 = 0$, also eine gerade Linie durch einen der beiden Nullpunkte, invariant.

3) $\nu = 1$, $\mu = 1$, $n = 3$, $\sigma = 2 = \tau$.

In der gesuchten 7-gliedrigen Untergruppe kommt vor:

$$P_2 + iP_3,$$

während keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein darf:

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_{1,2} R_{1,2}.$$

Dann müssen auch Transformationen von den folgenden Formen vorkommen:

$$\begin{cases} R_{2,3} + \varepsilon_1 P_1 + \varepsilon_2 P_2, \\ R_{1,2} + iR_{1,3} + \varepsilon_3 P_1 + \varepsilon_4 P_2, \\ S + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_{1,2} R_{1,2}, \\ C_1 + b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_{1,2} R_{1,2}, \\ C_2 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_{1,2} R_{1,2}, \\ C_3 + d_1 P_1 + d_2 P_2 + d_{1,2} R_{1,2}. \end{cases}$$

Durch Combination von je zwei solchen Transformationen kann man zeigen, dass ein Theil der Parameter ε, a, b, c, d verschwinden muss, dass sich aber einige der Parameter auf diese Weise nicht wegschaffen lassen. Noch schlimmer wird dies in den Fällen 4) und 6), wo noch viel mehr Parameter vorkommen.

Da nun die Vereinfachungen, die wir hier erzielen können, nur durch unerquickliche Rechnungen geleistet werden und trotzdem willkürliche Parameter in den gesuchten Untergruppen zurückbleiben, so wollen wir uns hier darauf beschränken, die Typen von Untergruppen für die Fälle 3), 4) und 6) anzugeben.

Bei der Bestimmung der grössten Untergruppen der Gruppe der F_2 wird sich dann zeigen, dass wir Typen von Untergruppen erhalten, die den hier aufgestellten vollständig entsprechen.

Im Falle 3) erhalten wir die 7-*gliedrige* Untergruppe der conformen Gruppe des R_3:

$$(27)\qquad \boxed{P_2 + iP_3,\ R_{2,3},\ R_{1,2} + iR_{1,3},\ S,\ C_1,\ C_2,\ C_3}$$

Diese Untergruppe lässt $x_1 = 0$, $x_2 + ix_3 = 0$, eine Erzeugende des imaginären Kreiskegels $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, invariant.

4) $\nu = 0, \ \mu = 2, \ n = 4, \ \sigma = 5 = \tau + 1.$

Wir erhalten die 12-*gliedrige* Untergruppe der conformen Gruppe des R_4:

$$(28) \quad \boxed{\begin{matrix} P_1 + iP_2, \ P_3 + iP_4, \ R_{1,2}, \ R_{3,4}, \ R_{1,3} + iR_{2,3}, \ R_{1,4} + iR_{2,4}, \\ R_{1,3} + iR_{1,4}, \ S, \ C_1, \ C_2, \ C_3, \ C_4. \end{matrix}}$$

Diese Untergruppe lässt die ebene M_2 $x_1 + ix_2 = 0$, $x_3 + ix_4 = 0$ invariant, welche durch eine Erzeugende der Null-M_2^2 hindurchgeht.

5) $\nu = 0, \ \mu = 2, \ n = 5, \ \sigma = 7 = \tau.$

Wir erhalten in diesem Falle **keine** 16-*gliedrige* Untergruppe der conformen Gruppe des R_5.

Nämlich, es kommen die folgenden infinitesimalen Translationen vor:

$$P_1 + iP_2, \quad P_3 + iP_4, \quad P_5,$$

während keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein darf:

$$P \equiv a_1 P_1 + a_3 P_3 + a_{1,3} R_{1,3} + a_{1,5} R_{1,5} + a_{3,5} R_{3,5}.$$

Dann müsste aber etwa eine Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$C_1 + P.$$

Es ist aber:

$$(P_5, \ C_1 + P) = 2R_{1,5} - a_{1,5} P_1 - a_{3,5} P_3.$$

Eine solche Transformation darf jedoch nicht vorkommen, wir erhalten also in diesem Falle keine Untergruppe.

6) $\nu = 0, \ \mu = 3, \ n = 6, \ \sigma = 12 = \tau.$

Wir erhalten die 22-*gliedrige* Untergruppe der conformen Gruppe des R_6:

$$(29) \quad \boxed{\begin{matrix} P_1 + iP_2, \ P_3 + iP_4, \ P_5 + iP_6, \ S, \ C_1, \ C_2, \ C_3, \ C_4, \ C_5, \ C_6, \\ R_{1,2}, \ R_{3,4}, \ R_{5,6}, \ R_{1,3} + iR_{2,3}, \ R_{2,3} + iR_{2,4}, \ R_{1,3} + iR_{1,4}, \\ R_{1,5} + iR_{2,5}, \ R_{1,6} + iR_{2,6}, \ R_{1,5} + iR_{1,6}, \ R_{3,5} + iR_{4,5}, \\ R_{3,6} + iR_{4,6}, \ R_{3,5} + iR_{3,6}. \end{matrix}}$$

Diese Untergruppe lässt die ebene $M_3: x_1 + ix_2 = 0$, $x_3 + ix_4 = 0$, $x_5 + ix_6 = 0$ invariant, welche durch eine grösste ebene Mannigfaltigkeit, eine M_2, der Null-M_4^2 hindurchgeht.

Wir erhalten demnach als Resultat das folgende

Theorem: *Die* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$-*gliedrige allgemeine conforme Gruppe des* R_n *besitzt, wenn* $n = 3$ *oder* $n > 4$ *vorausgesetzt wird,*

keine continuirliche Untergruppe mit mehr als $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - n$ *Parametern. Und zwar ist jede grösste Untergruppe mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen innerhalb der conformen Gruppe gleichberechtigt. Nur für* $n = 3$ *und* $n = 6$ *erhalten wir noch einen zweiten Typus von grössten Untergruppen, welche dadurch charakterisirt sind, dass bei ihnen eine ebene* M_1 *resp.* M_3*, welche durch eine grösste ebene Mannigfaltigkeit, Punkt resp. ebene* M_2*, der Null-*M^2_{n-2} *hindurchgeht, invariant bleibt.*

Für $n = 2$ *und* $n = 4$ *erhalten wir dagegen Untergruppen mit einem Parameter mehr und diese sind wieder dadurch charakterisirt, dass bei ihnen eine ebene* M_1 *resp.* M_2*, welche durch eine grösste ebene Mannigfaltigkeit, Punkt resp. Gerade, der Null-*M^2_{n-2} *hindurchgeht, invariant bleibt.*

§ 3.

Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe der F_2.

Mit der Untersuchung der allgemeinen conformen Gruppe haben wir zugleich den Weg gefunden, um die Gruppe von projectiven infinitesimalen Transformationen, welche die F_2 im R_n gestattet, direct zu untersuchen. Wir zeigten, dass diese Gruppe sich auf die einfache Form bringen lässt:

$$(30)\qquad \boxed{\begin{array}{c} Q_i \equiv p_i - x_i \sum_1^n {}^j x_j p_j; \quad R_{i,\varkappa} \equiv x_i p_\varkappa - x_\varkappa p_i \\ (i, \varkappa = 1, \ldots, n) \end{array}}\,.$$

Bezeichnen wir die infinitesimalen Rotationen der conformen Gruppe des R_{n-1} mit $R'_{i,\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1, \ldots, n-1)$, so können wir das gegenseitige Entsprechen der infinitesimalen Transformationen der Gruppe der F_2 und der allgemeinen conformen Gruppe durch die folgenden Relationen ausdrücken (vergl. pag. 117):

$$(31)\left\{\begin{array}{llll} R_{i,\varkappa} \equiv R'_{i,\varkappa}; & R_{i,n} \equiv P_i + \frac{1}{4} C_i; & Q_i \equiv P_i - \frac{1}{4} C_i; & Q_n \equiv S \\ 2P_i \equiv R_{i,n} + Q_i; & C_i \equiv 2(R_{i,n} - Q_i); & S \equiv Q_n; & R'_{i,\varkappa} \equiv R_{i,\varkappa} \\ \multicolumn{4}{c}{(i, \varkappa = 1, \ldots, n-1)} \end{array}\right\}.$$

Die Zusammensetzung der Gruppe (30) ist durch die folgenden Relationen gegeben ($\varepsilon_{i,\varkappa} \equiv 0$ für $i \neq \varkappa$; $\varepsilon_{i,i} = 1$):

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{c} (Q_i, Q_\varkappa) = R_{i,\varkappa}; \quad (Q_i, R_{j,\varkappa}) = \varepsilon_{i,j} Q_\varkappa - \varepsilon_{i,\varkappa} Q_j \\ (R_{i,\varkappa}, R_{\mu,\nu}) = \varepsilon_{\varkappa,\mu} R_{i,\nu} - \varepsilon_{\varkappa,\nu} R_{i,\mu} - \varepsilon_{,\mu} R_{\varkappa,\nu} + \varepsilon_{i,\nu} R_{\varkappa,\mu} \end{array}\right\}.$$

Wir wollen zunächst die Bahncurven der Q_i bestimmen. Es ergiebt sich für $Q_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} - x_i \sum_1^n {}^j\, x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$\frac{dx_i}{1 - x_i^2} = \frac{dx_j}{-x_i x_j};$$

also erhalten wir als Bahncurven etwa:

(33) $$x_i^2 + c_j x_j^2 = 1,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$x_i^2 + a_\varkappa x_\varkappa^2 = 1, \qquad x_\varkappa + a_j x_j = 0,$$

wo j beliebige, i, $\varkappa$ aber bestimmte von den Zahlen $1, \ldots, n$ sind.

Unter diesen Kegelschnitten ist eine einzige doppeltzählende Gerade und zwar eine Gerade durch den Mittelpunkt der Kugel $\left(\sum_1^n {}^j\, x_j^2 = 1\right)$:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_{i-1} = 0, \quad x_{i+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Diese Gerade hat mit der Kugel die Punkte

$$x_1 = 0, \ldots, x_{i-1} = 0;\ x_i = \pm 1,\ x_{i+1} = 0, \ldots, x_n = 0$$

gemein. Ebenso gehen alle Kegelschnitte (33) durch diese beiden Punkte. Wir erkennen also, dass die Bahncurven einer infinitesimalen Transformation Q alle Kegelschnitte sind, welche die Kugel in denjenigen beiden Punkten berühren, welche Schnittpunkte eines *bestimmten* Durchmessers mit der Kugel sind. Demgemäss ist es klar, *dass jede infinitesimale Transformation* $\sum_1^n {}^j\, a_j Q_j$ *durch einen bestimmten Durchmesser der Kugel repräsentirt wird.*

Z. B. ist der infinitesimalen Transformation $Q_1 + i Q_2$ der Durchmesser:

$$x_1 + i x_2 = 0,\ x_3 = 0, \ldots, x_n = 0$$

zugeordnet. In der That lässt $Q_1 + i Q_2$ dieses Gleichungensystem invariant, wie man sich leicht überzeugt.

Unsere Gruppe (30) hat nun $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Parameter. Uebertragen wir die im vorigen Abschnitt für die allgemeine conforme Gruppe endgilig gefundenen Theoreme (pag. 135 und 136) auf unsere Gruppe, so erhalten wir die beiden folgenden Theoreme:

Die $\frac{n(n+1)}{2}$*-gliedrige projective Gruppe der* F_2 *im* R_n *enthält keine Untergruppen mit mehr als* $\frac{n(n+1)}{2} - n + 2 = \frac{n(n-1)}{2} + 2$ *Parametern.*

Die $\frac{n(n+1)}{2}$-gliedrige projective Gruppe der F_2 im R_n enthält, wenn wir vom R_3 und R_5 absehen, keine Untergruppen mit mehr als $\frac{n(n+1)}{2} - n + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern.

Wir wollen daher zunächst alle $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$-gliedrigen Untergruppen der Gruppe (30) bestimmen. Es wird sich zeigen, dass wir dabei auch alle $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 2\right)$-gliedrigen Untergruppen erhalten.

Nach dem pag. 133 angeführten Satze ist es sicher, dass eine $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$-gliedrige Untergruppe mindestens *eine* infinitesimale Transformation $\sum_1^n{}^j a_j Q_j$ enthält; umsomehr muss dies bei grösseren Untergruppen der Fall sein.

Wir setzen daher voraus, dass wir die folgenden infinitesimalen Transformationen der gesuchten Untergruppen bereits kennen:

$$(34)\qquad \begin{gathered} Q_{\nu+2j-1} + i\,Q_{\nu+2j},\; Q_\varrho, \\ (j=1,2,\ldots,\mu;\; \varrho=\nu+2\mu+1,\; \nu+2\mu+2,\ldots,n) \end{gathered}$$

während wir zugleich wissen, dass keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorkommen darf:

$$(35)\qquad \sum_1^\nu{}^\lambda a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^\mu{}^j a_{\nu+2j-1}\,Q_{\nu+2j-1} \quad (\lambda=1,2,\ldots,\nu).$$

Es kommen dann nothwendig auch die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} &(Q_{\nu+2j_1-1} + i\,Q_{\nu+2j_1},\; Q_{\nu+2j_2-1} + i\,Q_{\nu+2j_2}) \\ &\qquad = \left\{\begin{aligned} &R_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} + i\,R_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2} \\ &+ i(R_{\nu+2j_1,\nu+2j_2-1} + i\,R_{\nu+2j_1,\nu+2j_2}) \end{aligned}\right\} \\ &(Q_{\nu+2j-1} + i\,Q_{\nu+2j},\; Q_\varrho) = R_{\nu+2j-1,\varrho} + i\,R_{\nu+2j,\varrho} \\ &(Q_{\varrho_1},\; Q_{\varrho_2}) = R_{\varrho_1,\varrho_2} \end{aligned}\right\}.$$

Wir behandeln unter der Voraussetzung (34) wirklich alle Fälle, denn wir haben gesehen, dass $\sum_1^n{}^i a_i Q_i$ und $\sum_1^n{}^i a_i P_i$ durch dieselbe Gerade durch den Coordinatenanfangspunkt und also auch durch denselben unendlich fernen Punkt repräsentirt werden. Daher gelten für die Q_i genau dieselben Betrachtungen, wie wir sie für die P_i früher (pag. 123—129) ausgeführt haben.

Es sind nun verschiedene Fälle zu unterscheiden, jenachdem nämlich *mehrere*, oder nur *eine*, oder gar *keine* der infinitesimalen Transformationen Q_ϱ vorhanden sind. Es wird sich zeigen, dass sich der letzte Fall am schwierigsten erledigen lässt. Im ersten Falle ist $\nu + 2\mu < n - 1$, im zweiten $\nu + 2\mu = n - 1$ und im dritten $\nu + 2\mu = n$.

1) $\nu + 2\mu < n - 1$.

Wir erkennen ohne Weiteres, dass ausser den $n - \nu - \mu$ infinitesimalen Transformationen $Q_{\nu+2j-1} + iQ_{\nu+2j}$, Q_ϱ noch

$$\tau = \frac{n(n-1)}{2} + 1 - n + \nu + \mu$$

unabh. von der folgenden Form vorkommen müssen:

$$(37)\qquad T \equiv \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa a_{i,\varkappa} R_{i,\varkappa} + \sum_1^\nu{}^\lambda a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^\mu{}^j a_{\nu+2j-1} Q_{\nu+2j-1}.$$

Wir fragen weiter: *wie viele unabh. solche Transformationen können vorkommen?*

Es ergiebt sich nun:

$$(38)\qquad (Q_\varrho, T) = \left\{\begin{array}{l} -2\sum_1^n{}^i a_{i,\varrho} Q_i - \sum_1^\nu{}^\lambda a_\lambda R_{\lambda,\varrho} \\ -\sum_1^\mu{}^j a_{\nu+2j-1} R_{\nu+2j-1,\varrho}, \end{array}\right\}$$

$$\big(Q_{\varrho_1}, (Q_\varrho, T)\big) = +2\sum_1^n{}^i a_{i,\varrho} R_{i,\varrho_1} \quad (\varrho_1 \gtrless \varrho),$$

$$\Big(Q_{\varrho_1}, \big(Q_{\varrho_1}, (Q_\varrho, T)\big)\Big) = -2\sum_1^n{}^i a_{i,\varrho} Q_i.$$

Da nun nach Voraussetzung keine infinitesimalen Transformationen von der Form (35) vorkommen dürfen, so folgt:

$$a_{\lambda,\varrho} = 0 \quad \text{an Zahl:} \quad \nu(n - \nu - 2\mu),$$

$$a_{\nu+2j-1,\varrho} + ia_{\nu+2j,\varrho} = 0 \quad \text{resp.:} \quad \mu(n - \nu - 2\mu).$$

In Folge dessen folgt aus (38), dass auch Transformationen von der folgenden Form vorkommen:

$$\sum_1^\nu a_\lambda R_{\lambda,\varrho} + \sum_1^\mu{}^j a_{\nu+2j-1} R_{\nu+2j-1,\varrho}.$$

Durch Combination dieses Ausdruckes mit $-Q_\varrho$ erhalten wir aber den Ausdruck (35); es sind demnach die weiteren Bedingungen zu erfüllen:

Wegen $a_\lambda = 0; \quad a_{\nu+2j-1} = 0;$ an Zahl: $\nu + \mu$.

$$\left(Q_{\nu+2j-1} + i\, Q_{\nu+2j},\ \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa a_{i,\varkappa} R_{i,\varkappa}\right) = 2 \sum_1^n{}_\varkappa (a_{\nu+2j-1,\varkappa} + i\, a_{\nu+2j,\varkappa})\, Q_\varkappa$$

ergiebt sich ferner:

$$\begin{cases} a_{\lambda,\nu+2j-1} + i\, a_{\lambda,\nu+2j} = 0 & \text{an Zahl: } \nu \cdot \mu, \\ a_{\nu+2j_1,\nu+2j_2-1} + i\, a_{\nu+2j_1,\nu+2j_2} = i(a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} + i\, a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2}) & \text{resp.: } \frac{\mu(\mu-1)}{2} \end{cases}$$

unabhängige Bedingungen.

Wir erkennen aus dem Vorangehenden, dass wir ausser den gegebenen Q nur R ohne additive Glieder erhalten und zwar genau die Rotationen (21) auf pag. 131. Es ergiebt sich demnach für σ ganz dieselbe Zahl wie dort:

$$\sigma = \frac{n(n-1)}{2} - (\nu+\mu)(n-\nu-\mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

Wir erhalten nur dann Untergruppen der verlangten Art, wenn $\sigma \geqq \tau$ oder:

$$\frac{n(n-1)}{2} - (\nu+\mu)\cdot(n-\nu-\mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2} \geqq \frac{n(n-1)}{2} + 1 - n + \nu + \mu$$

oder:

$$(39) \qquad (\nu+\mu-1)\,(n-\nu-\mu) \leqq \frac{\mu(\mu+1)}{2} - 1.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

I. $\mu = 0$. Dann muss sein:

$$(\nu-1)\,(n-\nu) \leqq -1.$$

Diese Bedingung wird nur für $\nu = 0$ erfüllt. Der Fall $\nu = 0$, $\mu = 0$ ergäbe aber alle Q und also auch alle R, also sämmtliche Transformationen der Gruppe (30).

II. $\mu > 0$. Jedenfalls muss sein:

$$\nu < n - 2\mu - 1,$$

also:

$$n - \nu - \mu > \mu + 1.$$

Setzen wir dies in (39) ein, so muss um so mehr sein:

$$(\nu+\mu-1)\,(\mu+1) \leqq \frac{\mu(\mu+1)}{2} - 1$$

oder:

$$2\nu(\mu+1) \leqq \mu(1-\mu).$$

Hieraus folgt ohne Weiteres, dass es für $\mu > 1$ keine Untergruppen der verlangten Art giebt.

Für $\mu = 1$ folgt $\nu = 0$ und wegen (39) $n > 3$, ferner folgt $\sigma = \tau$. Wir erhalten demnach die folgende $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe der Kugel im R_n $(n > 3)$:

$$\boxed{\begin{array}{c} Q_1 + iQ_2, \quad Q_\varrho, \quad R_{1,2}, \quad R_{1,\varrho} + iR_{2,\varrho}, \quad R_{\varrho_1,\varrho_2} \\ (\varrho, \varrho_1, \varrho_2 = 3, 4, \ldots, n) \end{array}}\,.$$

Diese Untergruppe lässt $x_1 + ix_2 = 0$ invariant. Diese ebene M_{n-1} berührt die Null-M^2_{n-2}.

Die erhaltene Untergruppe ist mit jeder grössten Untergruppe, welche irgend einen Punkt der Kugel invariant lässt, gleichberechtigt. Es wird sich zeigen, dass wir eine solche, gewissermassen allgemeinere, Untergruppe auffinden. Daher betrachten wir die erhaltene Untergruppe nicht als Typus einer grössten Untergruppe.

$$2)\quad \nu + 2\mu = n - 1.$$

a) $\mu = 0$. Wir betrachten also nur die infinitesimale Transformation Q_n als gegeben, während keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein soll:

$$\sum_1^{n-1}{}_\lambda\, a_\lambda Q_\lambda\,.$$

In Folge dessen erhalten wir in diesem Falle keine Untergruppe mit mehr als $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern.

In der gesuchten $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$-gliedrigen Untergruppe sind nun sicher infinitesimale Transformationen von der folgenden Form vorhanden:

$$T \equiv R_{\lambda_1,\lambda_2} + \sum_1^{n-1}{}_\lambda\, a_\lambda Q_\lambda \quad (\lambda_1, \lambda_2 = 1, \ldots, n-1).$$

Es ergiebt sich aber:

$$(Q_n, T) = -\sum_1^{n-1}{}_\lambda\, a_\lambda R_{\lambda,n}$$

$$\big(Q_n, (Q_n, T)\big) = \sum_1^{n-1}{}_\lambda\, a_\lambda Q_\lambda.$$

Also ist $a_\lambda = 0$ und es kommen in der gesuchten Untergruppe die folgenden Rotationen vor:

$$R_{\lambda_1, \lambda_2}.$$

Da wir immer $n > 2$ voraussetzen, so kommt also jedenfalls $R_{1,2}$ vor. Vernachlässigen wir ferner den Fall $n = 3$, da wir im R_3 nicht nur viergliedrige, sondern auch eine fünfgliedrige Untergruppe erhalten, so können wir in folgender Weise verfahren:

Es müssen infinitesimale Transformationen von der folgenden Form vorhanden sein:

$$R_{\lambda_1, n} + \sum_1^{n-1} {}^{\lambda} b_\lambda Q_\lambda.$$

Durch Combination dieses Ausdrucks mit

$$R_{\lambda_2, \lambda_3} \quad (\lambda_2, \lambda_3 \gtrless \lambda_1)$$

erhalten wir jedoch:

$$b_{\lambda_3} Q_{\lambda_2} - b_{\lambda_2} Q_{\lambda_3}.$$

Also muss sein:

$$b_\lambda = 0 \quad (\lambda \gtrless \lambda_1).$$

Nun ist aber:

$$(Q_n, R_{\lambda_1, n} + b_{\lambda_1} Q_{\lambda_1}) = - Q_{\lambda_1} - b_{\lambda_1} R_{\lambda_1, n},$$

folglich muss sein:

$$b_{\lambda_1} = \pm 1.$$

Wir erhalten demnach die folgende $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$-gliedrige Untergruppe $(n > 3)$:

$$(40) \qquad \boxed{\begin{matrix} Q_n, \quad Q_\lambda \pm R_{\lambda, n}, \quad R_{\lambda_1, \lambda_2} \\ (\lambda, \lambda_1, \lambda_2 = 1, \ldots, n-1) \end{matrix}}.$$

Diese Untergruppe lässt den Punkt $x_\lambda = 0$, $x_n = \pm 1$, welcher auf der Kugel $\sum_1^n {}^{j} x_j^2 = 1$ liegt, invariant (vergl. pag. 33 oben).

b) $\mu > 0$. Wir betrachten also in diesem Falle die folgenden infinitesimalen Transformationen als gegeben $(j = 1, \ldots, \mu)$:

$$Q_{\nu+2j-1} + i Q_{\nu+2j}, \; Q_n, \; R_{\nu+2j-1, n} + i R_{\nu+2j}$$

und

$$(Q_{\nu+2j_1-1} + i Q_{\nu+2j_1}, \; Q_{\nu+2j_2-1} + i Q_{\nu+2j_2}),$$

während keine infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$\sum_1^{\nu} {}^{\lambda} a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^{\mu} {}^{j} a_{\nu+2j-1} Q_{\nu+2j-1}$$

vorkommen sollen.

Wir werden zeigen, dass dann auch keine infinitesimalen Transformationen von der folgenden Form vorhanden sein dürfen:

$$T \equiv \left\{\begin{array}{l} \sum_1^{\nu}{}^{\lambda}\, a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^{\mu}{}^{j}\, a_{\nu+2j-1} Q_{\nu+2j-1} \\ + \sum_1^{\mu}{}^{j_1} \sum_1^{\mu}{}^{j_2}\, a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} R_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} \\ + \sum_1^{\nu}{}^{\lambda} \sum_1^{\mu}{}^{j_1}\, a_{\lambda,\nu+2j_1-1} R_{\lambda,\nu+2j_1-1} \end{array}\right\}.$$

In der That, es ergiebt sich:

$$(Q_n, T) = -\sum_1^{\nu}{}^{\lambda}\, a_\lambda R_{\lambda,n} - \sum_1^{\mu}{}^{j}\, a_{\nu+2j-1} R_{\nu+2j-1,n},$$

$$\big(Q_n, (Q_n, T)\big) = \sum_1^{\nu}{}^{\lambda}\, a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^{\mu}{}^{j}\, a_{\nu+2j-1} Q_{\nu+2j-1},$$

folglich muss sein:

$$a_\lambda = 0, \quad a_{\nu+2j-1} = 0.$$

Ferner ergiebt sich in Folge dessen:

$$(Q_{\nu+2j-1} + i\,Q_{\nu+2j},\ T)$$

$$= 2\sum_1^{\mu}{}^{j_2}\, a_{\nu+2j-1,\nu+2j_2-1} Q_{\nu+2j_2-1} - \sum_1^{\nu}{}^{\lambda}\, a_{\lambda,\nu+2j-1} Q_\lambda,$$

folglich muss auch sein:

$$a_{\lambda,\nu+2j-1} = 0, \quad a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} = 0.$$

Damit haben wir wirklich gezeigt, dass eine Transformation von der Form T nicht vorkommen kann. Es kommen also sicher wenigstens:

$$\vartheta = \nu + \mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \nu\cdot\mu.$$

unabhängige infinitesimale Transformationen nicht vor, während in den gesuchten grössten Untergruppen höchstens $n-1$ unabhängige nicht vorkommen dürfen. Wir erhalten demnach die Bedingung:

$$\nu + \mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \nu\cdot\mu \leqq n-1$$

oder:

$$(2\nu+\mu)(\mu+1) \leqq 2(n-1)$$

oder da $\nu + 2\mu = n-1$:

$$(2\nu+\mu)(\mu+1) \leqq 2(\nu+2\mu)$$

oder:

$$\mu(2\nu+\mu-3) \leqq 0,$$

also umsomehr:

$$2\nu + \mu - 3 \leqq 0$$

oder:

$$2\nu \leqq 3 - \mu.$$

Hieraus folgt ohne Weiteres, dass es für $\mu > 3$ keine Untergruppen der verlangten Art giebt.

Es bleiben also nur die folgenden Fälle übrig:

$$\begin{cases} \alpha) & \mu = 1, & \nu = 0, & \vartheta = 1, & n = 3, & \text{also: } \vartheta = n - 2, \\ \beta) & \mu = 1, & \nu = 1, & \vartheta = 3, & n = 4, & \text{also: } \vartheta = n - 1, \\ \gamma) & \mu = 2, & \nu = 0, & \vartheta = 3, & n = 5, & \text{also: } \vartheta = n - 2, \\ \delta) & \mu = 2, & \nu = 0, & \vartheta = 6, & n = 7, & \text{also: } \vartheta = n - 1. \end{cases}$$

In den Fällen α) und γ) erhalten wir demnach vermuthlich nicht nur Untergruppen mit $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern, sondern auch solche mit einem Parameter mehr. In diesen Fällen verzichten wir eher darauf, die Untergruppen mit $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern zu bestimmen.

$$\alpha) \quad \nu = 0, \quad \mu = 1, \quad \vartheta = 1, \quad n = 3.$$

Es kommen die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$Q_1 + iQ_2, \quad Q_3, \quad R_{1,3} + iR_{2,3},$$

während Q_1 nicht vorkommen soll.

Erhalten wir in diesem Falle wirklich eine fünfgliedrige Untergruppe, so muss dieselbe infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen enthalten:

$$R_{1,2} + a_{1,2}Q_1, \quad R_{1,3} + a_{1,3}Q_1.$$

Es ergiebt sich nun:

$$(Q_3, R_{1,2} + a_{1,2}Q_1) = -a_{1,2}R_{1,3},$$

$$\big(Q_3, (Q_3, R_{1,2} + a_{1,2}Q_1)\big) = a_{1,2}Q_1,$$

also:

$$a_{1,2} = 0.$$

Ferner:

$$(Q_3, R_{1,3} + a_{1,3}Q_1) = -Q_1 - a_{1,3}R_{1,3},$$

also:

$$a_{1,3} = \pm 1.$$

Wir erhalten demnach die folgende *fünfgliedrige* Untergruppe der sechsgliedrigen Gruppe der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ im R_3:

$$(41) \qquad \boxed{Q_1 + iQ_2, \; Q_3, \; R_{1,3} + iR_{2,3}, \; R_{1,2}, \; Q_1 \pm R_{1,3}}\,.$$

Diese Untergruppe lässt die gerade Linie $x_1 + ix_2 = 0$, $x_3 = \pm 1$, welche auf der Kugel liegt, invariant. Natürlich ist entweder das

positive oder das negative Zeichen zu nehmen. Dem entspricht, dass entweder eine Erzeugende der einen Schaar oder eine der anderen Schaar invariant bleibt.

$$\beta)\ \nu = 1,\ \mu = 1,\ \vartheta = 3,\ n = 4.$$

$$Q_2 + iQ_3,\quad Q_4,\quad R_{2,4} + iR_{3,4}$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_{1,2} R_{1,2}.$$

Dann enthält die gesuchte siebengliedrige Untergruppe sicher infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen:

$$\begin{cases} R_{1,3} + a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_{1,2} R_{1,2}, \\ R_{2,3} + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + b_{1,2} R_{1,2}, \\ R_{1,4} + c_1 Q_1 + c_2 Q_2 + c_{1,2} R_{1,2}, \\ R_{2,4} + d_1 Q_1 + d_2 Q_2 + d_{1,1} R_{1,2}. \end{cases}$$

Es ergiebt sich nun:

$$(Q_4,\ R_{1,3} + \cdots) = -a_1 R_{1,4} - a_2 R_{2,4},$$

$$\big(Q_4,\ (Q_4,\ R_{1,3} + \cdots)\big) = a_1 Q_1 + a_2 Q_2,$$

also:

$$a_1 = 0,\quad a_2 = 0.$$

$$\big(Q_4,\ (Q_4,\ R_{2,3} + \cdots)\big) = b_1 Q_1 + b_2 Q_2,$$

also:

$$b_1 = 0,\quad b_2 = 0.$$

$$(Q_2 + iQ_3,\ R_{1,3} + a_{1,2} R_{1,2}) = -a_{1,2} Q_1 - iQ_1,$$

$$(Q_2 + iQ_3,\ R_{2,3} + b_{1,2} R_{1,2}) = Q_3 - iQ_2 - b_{1,2} Q_1,$$

also:

$$a_{1,2} = -i,\quad b_{1,2} = 0.$$

Es kommen demnach die beiden infinitesimalen Rotationen vor:

$$R_{2,3},\quad R_{1,2} + iR_{1,3}.$$

Es ergiebt sich ferner:

$$(R_{2,3},\ R_{1,4} + \cdots) = -c_2 Q_3 - c_{1,2} R_{1,3},$$

also:

$$c_2 = 0,\quad c_{1,2} = 0.$$

$$(Q_4,\ R_{1,4} + c_1 Q_1) = -Q_1 - c_1 Q_{1,4},$$

also:

$$c_1 = \pm 1.$$

$$(Q_2 + iQ_3,\ R_{2,4} + \cdots) = Q_4 - d_1(R_{1,2} + iR_{1,3}) - id_2 R_{2,3} - d_{1,2} Q_1,$$

also:

$$d_{1,2} = 0.$$

$$(R_{2,3},\ R_{2,4}+d_1Q_1+d_2Q_2)=-R_{3,4}-d_2Q_3,$$

also:

$$d_1=0.$$

$$(Q_4,\ R_{2,4}+d_2Q_2)=-Q_2-d_2R_{2,4},$$

also:

$$d_2=\pm 1.$$

Wir erhalten demnach nur die folgende *siebengliedrige* Untergruppe der 10-gliedrigen Gruppe der Kugel $\sum_1^4 x_j^2=1$ im R_4:

$$(42)\quad \boxed{Q_2+iQ_3,\ Q_4,\ R_{2,4}+iR_{3,4},\ R_{2,3},\ R_{1,2}+iR_{1,3},\ Q_1\pm R_{1,4},\ Q_2\pm R_{2,4}}.$$

Diese Untergruppe lässt die gerade Linie $x_1=0$, $x_2+ix_3=0$, $x_4=\pm 1$ resp., welche eine Erzeugende der Kugel im R_4 ist, invariant.

$$\gamma)\quad v=0,\quad \mu=2,\quad \vartheta=3,\quad n=5.$$

$$Q_1+iQ_2,\quad Q_3+iQ_4,\quad Q_5,\quad R_{1,5}+iR_{2,5},\quad R_{3,5}+iR_{4,5},$$
$$R_{1,3}+iR_{2,3}+i(R_{1,4}+iR_{2,4})$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$a_1Q_1+a_3Q_3+a_{1,3}R_{1,3}.$$

Dann erhält die gesuchte 12-gliedrige Untergruppe sicher infinitesimale Transformationen von den Formen:

$$R_{1,2}+a_1Q_1+a_3Q_3+a_{1,3}R_{1,3};\quad R_{3,4}+b_1Q_1+b_3Q_3+b_{1,3}R_{1,3}.$$

Es ergiebt sich:

$$\big(Q_5,\ (Q_5,\ R_{1,2}+\cdots)\big)=a_1Q_1+a_3Q_3,$$

also:

$$a_1=0,\quad a_3=0.$$

$$\big(Q_5,\ (Q_5,\ R_{3,4}+\cdots)\big)=b_1Q_1+b_3Q_3,$$

also:

$$b_1=0,\quad b_3=0.$$

$$(Q_3+iQ_4,\ R_{1,2}+a_{1,3}R_{1,3})=-a_{1,3}Q_1,$$

$$(Q_1+iQ_2,\ R_{3,4}+b_{1,3}R_{1,3})=\quad b_{1,3}Q_1,$$

also:

$$a_{1,3}=0,\quad b_{1,3}=0.$$

Demnach kommen die infinitesimalen Rotationen $R_{1,2}$ und $R_{3,4}$ vor.

Ferner müssen infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen vorkommen:

$$R_{1,5}+c_1Q_1+c_3Q_3+c_{1,3}R_{1,3};\quad R_{3,5}+d_1Q_1+d_3Q_3+d_{1,3}R_{1,3}.$$

Es ergiebt sich:

$$(R_{3,4}, R_{1,5} + \cdots) = - c_3 Q_4 - c_{1,3} R_{1,4};$$
$$\big(R_{1,2}, (R_{3,4}, R_{1,5} + \cdots)\big) = c_{1,3} R_{2,4},$$

also:

$$c_3 = 0, \quad c_{1,3} = 0.$$
$$(Q_5, R_{1,5} + c_1 Q_1) = - Q_1 - c_1 R_{1,5},$$

also:

$$c_1 = \pm 1.$$

Analog weist man durch Combination von $R_{3,5} + \cdots$ mit $R_{1,2}$ und Q_5 nach, dass:

$$d_1 = 0, \quad d_{1,3} = 0, \quad d_2 = \pm 1.$$

Demnach kommen die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$Q_1 \pm R_{1,5}. \quad Q_3 \pm R_{3,5}.$$

Schliesslich müssen infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen vorkommen:

$$R_{2,3} + e_1 Q_1 + e_3 Q_3 + e_{1,3} R_{1,3}; \quad R_{1,4} + f_1 Q_1 + f_3 Q_3 + f_{1,3} R_{1,3}.$$

Es ergiebt sich:

$$\big(Q_5, (Q_5, R_{2,3} + \cdots)\big) = e_1 Q_1 + e_3 Q_3,$$

also:

$$e_1 = 0, \quad e_3 = 0.$$
$$(Q_3 + i Q_4, R_{2,3} + e_{1,3} R_{1,3}) = - Q_2 - e_{1,3} Q_1,$$

also:

$$e_{1,3} = - i.$$

Analog weist man durch Combination von $R_{1,4} + \cdots$ mit Q_5 und $Q_1 + i Q_2$ nach, dass:

$$f_1 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_{1,3} = - i.$$

Demnach kommen die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$R_{1,3} + i R_{2,3}, \quad R_{1,3} + i R_{1,4}$$

und folglich auch:

$$R_{1,4} + i R_{2,4}.$$

Wir erhalten in Folge dessen die folgende 12-*gliedrige* Untergruppe der 15-gliedrigen Gruppe der Kugel $\sum_1^5 x_j^2 = 1$ im R_5:

$$(43) \quad \boxed{\begin{array}{l} Q_1 + i Q_2, \; Q_3 + i Q_4, \; Q_5, \; R_{1,5} + i R_{2,5}, \; R_{3,5} + i R_{4,5}, \; R_{1,3} + i R_{2,3}, \\ R_{1,4} + i R_{2,4}, \; R_{1,3} + i R_{1,4}, \; R_{1,2}, \; R_{3,4}, \; Q_1 \pm R_{1,5}, \; Q_3 \pm R_{3,5}. \end{array}}$$

Diese Untergruppe lässt die ebene M_2:

$$x_1 + ix_2 = 0,\ x_3 + ix_4 = 0,\ x_5 = \pm 1$$

resp., welche eine Erzeugende (grösste ebene Mannigfaltigkeit) der Kugel im R_5 ist, invariant.

$$\delta)\ \nu = 0,\quad \mu = 3,\quad \vartheta = 6,\quad n = 7.$$

$Q_1+iQ_2,\ Q_3+iQ_4,\ Q_5+iQ_6,\ Q_7,\ R_{1,7}+iR_{2,7},\ R_{3,7}+iR_{4,7},\ R_{5,7}+iR_{6,7},$
$R_{1,3}+iR_{2,3}+i(R_{1,4}+iR_{2,4}),\quad R_{1,5}+iR_{2,5}+i(R_{1,6}+iR_{2,6}),$
$R_{3,5}+iR_{4,5}+i(R_{3,6}+iR_{4,6})$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$T \equiv a_1 Q_1 + a_3 Q_3 + a_5 Q_5 + a_{1,3} R_{1,3} + a_{1,5} R_{1,5} + a_{3,5} R_{3,5}.$$

Dann enthält die gesuchte 22-gliedrige Untergruppe sicher infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen:

$$R_{1,2} + T,\quad R_{1,7} + T,\quad R_{2,3} + T.$$

Es ergiebt sich nun:

$$\big(Q_7,\ (Q_7,\ R_{1,2} + T)\big) = a_1 Q_1 + a_3 Q_3 + a_5 Q_5,$$

also:

$$a_1 = 0,\quad a_3 = 0,\quad a_5 = 0,$$

folglich:

$$(Q_3+iQ_4,\ R_{1,2} + T) = - a_{1,3} Q_1 + a_{3,5} Q_5,$$

also:

$$a_{1,3} = 0,\quad a_{3,5} = 0,$$

folglich:

$$(Q_5+iQ_6,\ R_{1,2} + T) = - a_{1,5} Q_1,$$

also:

$$a_{1,5} = 0.$$

Demnach kommt $R_{1,2}$ vor. Analog zeigt man, dass auch $R_{3,4}$ und $R_{5,6}$ vorkommen.

Ferner ergiebt sich:

$$(R_{3,4},\ R_{1,7} + T) = - a_3 Q_4 - a_{1,3} R_{1,4} - a_{3,5} R_{4,5},$$
$$\big(R_{1,2},\ (R_{3,4},\ R_{1,7} + T)\big) = a_{1,3} R_{2,4},$$
$$\big(R_{5,6},\ (R_{3,4},\ R_{1,7} + T)\big) = a_{3,5} R_{4,6},$$

also:

$$a_{1,3} = 0,\quad a_{3,5} = 0,\quad a_3 = 0;$$

folglich:

$$(R_{5,6},\ R_{1,7} + T) = - a_5 Q_6 - a_{1,5} R_{1,6},$$
$$\big(R_{1,2},\ (R_{5,6},\ R_{1,7} + T)\big) = a_{1,5} R_{2,6},$$

also:

$$a_{1,5} = 0,\quad a_5 = 0;$$

folglich:

$$(Q_7, R_{1,7} + T) = -Q_1 - a_1 R_{1,7},$$

also:

$$a_1 = \pm 1.$$

Demnach kommt $Q_1 \pm R_{1,7}$ vor. Analog zeigt man, dass auch $Q_3 \pm R_{3,7}$, $Q_5 \pm R_{5,7}$ vorkommen.

Ferner ergiebt sich:

$$\big(Q_7, (Q_7, R_{2,3} + T)\big) = a_1 Q_1 + a_3 Q_3 + a_5 Q_5,$$

also:

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_5 = 0;$$

folglich:

$$(Q_5 + i Q_6, R_{2,3} + T) = -a_{1,5} Q_1 - a_{3,5} Q_3,$$

also:

$$a_{1,5} = 0, \quad a_{3,5} = 0;$$

folglich:

$$(Q_3 + i Q_4, R_{2,3} + T) = -Q_2 - a_{1,3} Q_1,$$

also:

$$a_{1,3} = -i.$$

Demnach kommt $R_{1,3} + i R_{2,3}$ vor. In analoger Weise findet man die übrigen infinitesimalen Transformationen der gesuchten Untergruppe.

Wir erhalten schliesslich die folgende 22-*gliedrige* Untergruppe der 28-gliedrigen Gruppe der Kugel $\sum_1^7 {}^j x_j^2 = 1$ im R_7:

$$\boxed{\begin{array}{c} Q_1+iQ_2,\ Q_3+iQ_4,\ Q_5+iQ_6,\ Q_7,\ R_{1,7}+iR_{2,7},\ R_{3,7}+iR_{4,7},\ R_{5,7}+iR_{6,7}, \\ R_{1,3}+iR_{1,4},\ R_{2,3}+iR_{2,4},\ R_{1,3}+iR_{2,3},\ R_{1,5}+iR_{1,6},\ R_{2,5}+iR_{2,6},\ R_{1,5}+iR_{2,5}, \\ R_{3,5}+iR_{3,6},\ R_{4,5}+iR_{4,6},\ R_{3,5}+iR_{4,5},\ R_{1,2},\ R_{3,4},\ R_{5,6},\ Q_1\pm R_{1,7},\ Q_3\pm R_{3,7} \\ Q_5\pm R_{5,7}. \end{array}} \tag{44}$$

Diese Untergruppe lässt die ebene M_3:

$$x_1 + i x_2 = 0, \quad x_3 + i x_4 = 0, \quad x_5 + i x_6 = 0, \quad x_7 = \pm 1 \text{ resp.},$$

welche eine Erzeugende (grösste ebene Mannigfaltigkeit) der Kugel im R_7 ist, invariant.

3) $\nu + 2\mu = n$.

Von den infinitesimalen Transformationen $\sum_1^n {}^i a_i Q_i$ kommen also nur die folgenden unabhängigen vor:

$$Q_{\nu+2j-1} + i Q_{\nu+2j} \qquad (j = 1, \ldots, \mu).$$

Die Anzahl der unabhängigen infinitesimalen Rotationen, die vorkommen können, ist nach dem Früheren (pag. 19):

$$\sigma = \frac{n(n-1)}{2} - (\nu+\mu)(n-\nu-\mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

Anderseits müssen:

$$\tau = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

unabhängige infinitesimale Rotationen in den gesuchten $\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)$-gliedrigen Untergruppen vorkommen (vergl. den pag. 21 angeführten Satz).

Wir erhalten nur dann Untergruppen der verlangten Art, wenn $\sigma \geqq \tau$, also wenn:

$$\frac{n(n-1)}{2} - (\nu+\mu)(n-\nu-\mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2} \geqq \frac{n(n-1)}{2} + 1 - n$$

oder:

$$\mu(\mu+1) - 2(\nu+\mu)(n-\nu-\mu) \geqq 2(1-n)$$

oder da:

$$n = \nu + 2\mu:$$

$$\mu(\mu+1) - 2\mu(\nu+\mu) \geqq 2 - 2\nu - 4\mu$$

oder:

$$\frac{\mu}{2}(5-\mu) + \nu(1-\mu) \geqq 1.$$

Hieraus folgt ohne Weiteres, dass wir für $\mu > 4$ keine Untergruppen der verlangten Art erhalten. Es bleiben, wie man leicht verificiren kann, nur die folgenden Fälle übrig:

$$\left\{\begin{array}{rlll} \text{I.} & \mu = 1, & \nu \text{ beliebig}, & n \text{ beliebig}, \\ \text{II.} & \mu = 2, & \nu = 0, & n = 4, \\ \text{III.} & \mu = 2, & \nu = 1, & n = 5, \\ \text{IV.} & \mu = 2, & \nu = 2, & n = 6, \\ \text{V.} & \mu = 3, & \nu = 0, & n = 6, \\ \text{VI.} & \mu = 3, & \nu = 1, & n = 7, \\ \text{VII.} & \mu = 4, & \nu = 0, & n = 8. \end{array}\right.$$

Die Fälle IV, V und VII können wir ohne Weiteres ausschliessen, denn bekämen wir in diesen Fällen Untergruppen der verlangten Art, die mit den bereits bekannten nicht gleichberechtigt wären, so müssten wir auch besondere Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe des R_5 und R_7 erhalten haben.

I. $\mu = 1$, ν beliebig, n beliebig.

$Q_{n-1} + iQ_n$ ist allein bekannt, dagegen darf keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$T \equiv a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \cdots + a_{n-1} Q_{n-1}.$$

Daher erhalten wir keine Untergruppe mit mehr als $\frac{n(n-1)}{2}+1$ Parametern. In Folge dessen können wir $n > 3$ voraussetzen.

Dann müsste sicher eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$R_{\lambda, n-1} + T \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Nun ergiebt sich:

$$(Q_{n-1} + i\,Q_n,\ R_{\lambda, n-1} + T)$$
$$= \left\{\begin{array}{l} -\ Q_\lambda - a_1 (R_{1, n-1} + i\,R_{1,n}) - \cdots - a_{n-2}(R_{n-2, n-1} + i\,R_{n-2, n}) \\ -\ i\,a_{n-1} R_{n-1, n}, \end{array}\right\}$$

$$\big(Q_{n-1} + i\,Q_n,\ (Q_{n-1} + i\,Q_n,\ R_{\lambda, n-1} + T)\big) = \left\{\begin{array}{l} R_{\lambda, n-1} + i\,R_{\lambda, n} \\ -\ i\,a_{n-1}(Q_n - i\,Q_{n-1}). \end{array}\right\}$$

Demnach müssten die infinitesimalen Rotationen:

$$R_{\lambda, n-1} + i\,R_{\lambda, n} \quad (\lambda = 1, \ldots, n-2)$$

vorkommen. Dann müssten aber, der ersten der obigen Relationen zufolge, auch infinitesimale Transformationen von der folgenden Form vorkommen:

$$Q_\lambda + b_\lambda R_{n-1, n} \quad (\lambda = 1, \ldots, n-2).$$

Aus zwei solchen Transformationen kann man jedoch eine von der folgenden Form herleiten:

$$c_{\lambda_1} Q_{\lambda_1} + c_{\lambda_2} Q_{\lambda_2} \quad (\lambda_1, \lambda_2 = 1, \ldots, n-2).$$

Eine solche infinitesimale Transformation kommt aber nach Voraussetzung nicht vor. Demnach erhalten wir in diesem Falle keine Untergruppe der verlangten Art.

II. $\mu = 2,\ \nu = 0,\ n = 4.$

$$Q_1 + i\,Q_2,\ Q_3 + i\,R_4,\ R_{1,3} + i\,R_{2,3} + i(R_{1,4} + i\,R_{2,4})$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$a_1 Q_1 + a_3 Q_3.$$

In der gesuchten 7-gliedrigen Untergruppe kommt sicher eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vor:

$$T \equiv a_{1,2} R_{1,2} + a_{1,3} R_{1,3} + a_1 Q_1 + a_3 Q_3.$$

Nun ergiebt sich:

$$(Q_1 + i\,Q_2,\ T) = \left\{\begin{array}{r} a_{1,2}(Q_2 - i\,Q_1) + a_{1,3} Q_3 - i\,a_{1,2} R_{1,2} \\ +\ a_3(R_{1,3} + i\,R_{2,3}), \end{array}\right\}$$

$$(Q_3 + i\,Q_4,\ T) = -\,a_{1,3} Q_1 - a_1(R_{1,3} + i\,R_{1,4}) - i\,a_3 R_{3,4},$$

$$\big(Q_1 + i\,Q_2,\ (Q_3 + i\,Q_4,\ T)\big) = a_{1,3} R_{1,2} - a_1(Q_3 + i\,Q_4),$$

$$\big(Q_1 + i\,Q_2,\ (Q_1 + i\,Q_2,\ T)\big) = a_{1,3}(R_{1,2} + i\,R_{2,3}) - i\,a_1(Q_2 - i\,Q_1),$$

$$\big(Q_3 + i\,Q_4,\ (Q_1 + i\,Q_2,\ T)\big) = \left\{\begin{array}{r} a_{1,2}(Q_3 + i\,Q_4,\ Q_2 - i\,Q_1) - i\,a_{1,3} R_{3,4} \\ -\ a_3(Q_1 + i\,Q_2). \end{array}\right\}$$

Nehmen wir $a_{1,3} \gtrless 0$ an, so folgt hieraus, dass:

$$R_{3,4},\ R_{1,3} + iR_{2,3},\ R_{1,4} + iR_{2,4},\ R_{1,2}$$

und in Folge dessen auch Q_3 vorkommen müssten; Q_3 kommt aber nach Voraussetzung nicht vor, also ist $a_{1,3} = 0$.

Demnach muss eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$T_1 \equiv R_{1,2} + a_1 Q_1 + a_3 Q_3$$

vorkommen und ganz analog zeigt man, dass auch eine von der Form:

$$T_2 \equiv R_{3,4} + b_1 Q_1 + b_3 Q_3$$

vorkommen muss. Es ergiebt sich:

$$(T_1, T_2) = -b_1 Q_2 + a_3 Q_4 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) R_{1,3}.$$

Combiniren wir nun (T_1, T_2) ganz auf dieselbe Weise mit $Q_1 + iQ_2$ und $Q_3 + iQ_4$ wie oben T, so erkennen wir, dass analog sein muss

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0.$$

Dann wäre

$$(T_1, T_2) = -b_1 Q_2 + a_3 Q_4,$$

also ist auch:

$$b_1 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Folglich muss auch $a_1 = 0$ und $b_3 = 0$ sein, denn es ergiebt sich:

$$(Q_1 + iQ_2,\ R_{1,2} + a_1 Q_1) = Q_2 - iQ_1 - ia_1 R_{1,2},$$
$$(Q_3 + iQ_4,\ R_{3,4} + b_3 Q_3) = Q_4 - iQ_3 - ib_3 R_{3,4}.$$

Demnach kennen wir von der gesuchten 7-gliedrigen Untergruppe die infinitesimalen Transformationen:

$$Q_1 + iQ_2,\ Q_3 + iQ_4,\ R_{1,2},\ R_{3,4},\ R_{1,3} + iR_{2,3} + i(R_{1,4} + iR_{2,4}).$$

Ferner muss eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$\mathsf{T} \equiv a_{1,3} R_{1,3} + a_{2,3} R_{2,3} + a_1 Q_1 + a_3 Q_3.$$

Es ergiebt sich:

$$\big(R_{1,2},\ (R_{1,2}, \mathsf{T})\big) = -a_{1,3} R_{1,3} - a_{2,3} R_{2,3} - a_1 Q_1,$$
$$\big(R_{3,4},\ (R_{3,4}, \mathsf{T})\big) = -a_{1,3} R_{1,3} - a_{2,3} R_{2,3} - a_3 Q_3,$$

also:

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0.$$

$$(Q_1 + iQ_2,\ a_{1,3} R_{1,3} + a_{2,3} R_{2,3}) = a_{1,3} Q_3 + ia_{2,3} Q_3,$$

also:

$$a_{1,3} + ia_{2,3} = 0.$$

Demnach kommt $R_{1,3} + iR_{2,3}$ und folglich auch $R_{1,4} + iR_{2,4}$ vor.

Analog zeigt man, dass auch $R_{1,3} + iR_{1,4}$ und $R_{2,3} + iR_{2,4}$ vorkommen.

Wir erhalten in Folge dessen die folgende 7-gliedrige Untergruppe der 10-gliedrigen Gruppe der Kugel $\sum_1^4 j\, x_j^2 = 1$ im R_4:

$$\boxed{Q_1+iQ_2,\ Q_3+iQ_4,\ R_{1,2},\ R_{3,4},\ R_{1,3}+iR_{2,3},\ R_{1,4}+iR_{2,4},\ R_{1,3}+iR_{1,4}.}$$

Diese Untergruppe lässt die ebene M_2:

$$x_1 + ix = 0,\ x_3 + ix_4 = 0$$

invariant. Diese M_2 hat mit der Null-$M_2{}^2$ eine Gerade gemein. Die erhaltene Untergruppe ist eine mit der Untergruppe (42) gleichberechtigte und nicht als ein neuer Typus zu betrachten.

III. $\mu = 2,\ \nu = 1,\ n = 5.$

$$Q_2 + iQ_3,\ Q_4 + iQ_5,\ R_{2,4} + iR_{3,4} + i(R_{2,5}+iR_{3,5})$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_4 Q_4.$$

In der gesuchten 12-gliedrigen Untergruppe muss eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein:

$$T_1 \equiv a_{2,3}R_{2,3} + a_{1,2}R_{1,2} + a_{1,4}R_{1,4} + a_{2,4}R_{2,4}.$$

Es ergiebt sich:

$$(Q_4+iQ_5,\ T_1) = -\, a_{1,4}Q_1 - a_{2,4}Q_2,$$

also:

$$a_{1,4} = 0,\quad a_{2,4} = 0.$$

$$(Q_2+iQ_3,\ a_{2,3}R_{2,3}+a_{1,2}R_{1,2}) = a_{2,3}(Q_3 - iQ_2) - a_{1,2}Q_1,$$

also:

$$a_{1,2} = 0.$$

Folglich kommt $R_{2,3}$ vor; analog zeigt man, dass auch $R_{4,5}$ vorkommt.

Ferner muss eine Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$T_2 \equiv b_{1,2}R_{1,2} + b_{1,4}R_{1,4} + b_{2,4}R_{2,4} + b_4 Q_4.$$

Es ergiebt sich:

$$(R_{2,3},\ T_2) = -\, b_{1,2}R_{1,3} - b_{2,4}R_{3,4},$$

$$\big(Q_2+iQ_3,\ (R_{2,3},\ T_2)\big) = \quad ib_{1,2}Q_1 - ib_{2,4}Q_4,$$

also:

$$b_{1,2} = 0,\quad b_{2,4} = 0.$$

$$(Q_4+iQ_5,\ b_{1,4}R_{1,4}+b_4Q_4) = -b_{1,4}Q_1 - ib_4R_{4,5},$$

also:

$$b_{1,4} = 0.$$

Demnach müsste Q_4 vorkommen, was der Voraussetzung widerspricht. Wir erhalten daher in diesem Falle keine Untergruppe der verlangten Art.

IV. $\mu = 3,\ \nu = 1,\ n = 7.$

$$Q_2 + iQ_3,\ \ Q_4 + iQ_5,\ \ Q_6 + iQ_7$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_4Q_4 + a_6Q_6.$$

In der gesuchten 22-gliedrigen Untergruppe muss eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein:

$$T_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_{2,3}R_{2,3} + a_{1,2}R_{1,2} + a_{1,4}R_{1,4} + a_{1,6}R_{1,6} + a_{2,4}R_{2,4} + a_{2,6}R_{2,6} \\ \qquad + a_{4,6}R_{4,6}. \end{array} \right\}$$

Es ergiebt sich:

$$(Q_4 + iQ_5,\ T_1) = -a_{1,4}Q_1 - a_{2,4}Q_2 + a_{4,6}Q_6,$$

also:

$$a_{1,4} = 0,\quad a_{2,4} = 0,\quad a_{4,6} = 0;$$

folglich:

$$(Q_6 + iQ_7,\ T_1) = -a_{1,6}Q_1 - a_{2,6}Q_2,$$

also:

$$a_{1,6} = 0,\quad a_{2,6} = 0.$$

folglich:

$$(Q_2 + iQ_3,\ T_1) = a_{2,3}(Q_3 - iQ_2) - a_{1,2}Q_1,$$

also:

$$a_{1,2} = 0.$$

Demnach kommt $R_{2,3}$ vor; analog auch $R_{4,5}$ und $R_{6,7}$.

Ferner muss eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein:

$$T_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} b_{1,2}R_{1,2} + b_{1,4}R_{1,4} + b_{1,6}R_{1,6} + b_{2,4}R_{2,4} + b_{2,6}R_{2,6} + b_{4,6}R_{4,6} \\ \qquad + b_6Q_6. \end{array} \right\}$$

Es ergiebt sich jedoch:

$$(R_{2,3},\ T_2) = -b_{1,2}R_{1,2} - b_{2,4}R_{3,4} - b_{2,6}R_{3,6},$$

$$\big(Q_2 + iQ_3,\ (R_{2,3},\ T_2)\big) = ib_{1,2}Q_1 - ib_{2,4}Q_4 - ib_{2,6}Q_6,$$

also:

$$b_{1,2} = 0,\quad b_{2,4} = 0,\quad b_{2,6} = 0;$$

folglich:

$$(R_{4,5}, T_2) = -b_{1,4} R_{1,5} - b_{4,6} R_{5,6},$$

$$\big(Q_4 + iQ_5, (R_{4,5}, T_2)\big) = \quad ib_{1,4} Q_1 - ib_{4,6} Q_6,$$

also:

$$b_{1,4} = 0, \quad b_{4,6} = 0;$$

folglich:

$$(Q_6 + iQ_7, T_2) = -b_{1,6} Q_1 - ib_6 R_{6,7},$$

also:

$$b_{1,6} = 0.$$

Demnach müsste Q_6 vorkommen, was der Voraussetzung widerspricht. Wir erhalten daher auch in diesem Falle keine Untergruppe der verlangten Art.

Damit haben wir die Bestimmung der grössten Untergruppen der Gruppe (30) vollständig und streng durchgeführt.

Wir haben nur noch zu zeigen, dass die früher erfolgte Aufstellung der grössten Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe richtig ist (vergl. pag. 26 u. 27). Zu diesem Zwecke brauchen wir nur die Formeln (31) auf die Untergruppe (40—44) der Gruppe (30) anzuwenden. Man überzeugt sich leicht, dass der grössten Untergruppe, welche einen Punkt der Kugel invariant lässt, die Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen entspricht. Ebenso entsprechen sich die gefundenen 5-, 7-, 12- und 22-gliedrigen Untergruppen der Gruppe der Kugel und der conformen Gruppe. Jede der Formeln (40—44) giebt eigentlich zwei Typen von Untergruppen, jenachdem man entweder das positive oder das negative Zeichen wählt. Durch Anwendung der Formeln (31) zeigt sich jedoch, dass der Vertauschung des positiven mit dem negativen Zeichen, die Vertauschung der Translationen P_i mit den Circulationen C_i in der allgemeinen conformen Gruppe entspricht. Demnach brauchen wir nur das eine Zeichen zu berücksichtigen.

Wir erhalten als Endresultat unserer Untersuchung das folgende

Theorem: *Die continuirliche projective Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante im n-fach ausgedehnten Raume besitzt, wenn $n = 4$ oder $n > 5$ vorausgesetzt wird, keine continuirliche Untergruppe mit mehr als $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern. Und zwar ist jede grösste Untergruppe dadurch charakterisirt, dass sie einen bestimmten Punkt der F_2 invariant lässt. Nur für $n = 4$ und $n = 7$ erhalten wir noch einen zweiten Typus von grössten Untergruppen, welche dadurch charakterisirt sind, dass bei ihnen eine grösste ebene Mannigfaltigkeit der F_2 invariant bleibt.*

Für $n = 3$ und $n = 5$ erhalten wir dagegen Untergruppen mit einem Parameter mehr und diese Untergruppen sind wieder dadurch charakterisirt, dass bei ihnen eine grösste ebene Mannigfaltigkeit der F_2 invariant bleibt.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass Lie die grössten Untergruppen der projectiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades im R_3, R_4 und R_5, wie auch die grössten Untergruppen der conformen Gruppe im R_2, R_3 und R_4 schon früher, allerdings auf andere Weise, bestimmt hat (vergl. Abhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1885).

Leipzig, im Januar 1889.

Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen*).

Von

Friedrich Schur in Dorpat.

Es sei mir gestattet, kurz diejenigen Punkte hervorzuheben, in welchen sich die folgende Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen von denjenigen unterscheidet, welche Herr Lie, der Schöpfer dieser neuen Disciplin, ihr unter Mitwirkung von Herrn Engel in dem vor Kurzem erschienenen ersten Abschnitte seiner umfangreichen Monographie**) gegeben hat. Eine, wie mir scheint, wesentliche Vereinfachung erziele ich dadurch, dass ich nur solche Gruppen betrachte, welche die identische Transformation enthalten. Dass hierin eine vielleicht ungerechtfertigte Beschränkung nicht liegt, beruht auf der schon von Herrn Lie bemerkten Thatsache, dass jede endliche Transformationsgruppe durch Einführung geeigneter Parameter in eine solche übergeführt werden kann, welche die identische Transformation enthält. Während aber Herr Lie dies mit dem ganzen Apparate seiner Theorie bewiesen hat, habe ich im letzten Paragraphen einen directen, nur den ursprünglichen analytischen Ausdruck der Gruppeneigenschaft benutzenden Beweis dafür gegeben. Ich hätte daher diesen Beweis ebenso gut an die Spitze meiner Abhandlung stellen können und habe dies nur desshalb nicht gethan, um mit concreteren Betrachtungen beginnen zu können.

Die Ableitung der grundlegenden Differentialgleichungen ist nunmehr eine directe Folgerung aus der Gruppeneigenschaft; während sich dieselben aber bei Herrn Lie zunächst nur als nothwendige Bedingungen ergeben, gelingt es mir durch eine nahe liegende Verallgemeinerung eines Verfahrens, welches ich in einer vor Kurzem ver-

*) Die vorliegende Abhandlung ist gesondert als *Gratulationsschrift der Universität Dorpat zum fünfzigjährigen Jubiläum der Sternwarte Pulkowa* erschienen.

**) Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet von Sophus Lie. Leipzig, Teubner 1888. Ich werde dieses Werk im Folgenden immer kurz als „Transf." citiren. Die in der Einleitung erwähnten Theoreme des Herrn Lie werden später noch genau citirt werden.

öffentlichten Abhandlung*) zur Ableitung der Haupteigenschaften der Parametergruppe angewendet habe, diese Differentialgleichungen zugleich als die hinreichenden Bedingungen für die Bestimmung einer Gruppe nachzuweisen. Die hierbei verwendeten Recursionsformeln liefern gleichzeitig die directe Lösung des Problems, die endlichen Gleichungen einer Gruppe aus den infinitesimalen Transformationen ihrer selbst sowohl wie ihrer Parametergruppe zu finden. Wenn hierbei etwas lange Formeln kaum zu vermeiden waren, so wird auf der andern Seite der Vortheil erreicht, dass keine besonderen Vorkenntnisse, z. B. nicht die Integration der vollständigen Systeme vorausgesetzt wird.

Indem ferner die bekannten Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe direct als die vollständigen Integrabilitätsbedingungen jener grundlegenden Differentialgleichungen nachgewiesen werden, sind diese Relationen wiederum mit einem Schlage als die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür erwiesen, dass die betreffenden infinitesimalen Transformationen eine Gruppe bestimmen. Herr Lie erreicht dies dadurch, dass er von der Schaar der von diesen infinitesimalen Transformationen erzeugten eingliedrigen Gruppen ausgeht und beweist, dass dieselbe, falls jene Relationen bestehen, eine Gruppe bildet. Es hat dieser Beweis, weil er auf den Ideen beruht, welche bei Erfindung der Theorie leitend gewesen sind, sicher eine grosse Bedeutung, aber, von der grösseren Länge abgesehen, hat er gegenüber dem von mir gegebenen immerhin den Nachtheil, dass er eine gewisse Kenntniss der Zusammensetzung der Gruppen anticipirt.

Es werden zuletzt auch die Gleichungen, welche zwischen den charakteristischen Constanten einer Gruppe bestehen, als die vollständigen Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen, denen die Componenten ihrer infinitesimalen Transformationen zu genügen haben, wenigstens für den Fall nachgewiesen, dass es sich um transitive Gruppen handelt. An diesen Nachweis knüpft sich zugleich die vollständige Integration dieser Differentialgleichungen durch Potenzreihen, deren Glieder nach verhältnissmässig einfachen Gesetzen sich aus den charakteristischen Constanten aufbauen. Es ist hiermit das Problem gelöst, alle endlichen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen, und in diesem Punkte dürfte meine Abhandlung wesentlich über das bisher über diesen Gegenstand Veröffentlichte hinausgehen. Die explicite Darstellung einer Transformationsgruppe durch ihre charakteristischen Constanten setzt zugleich ihre blosse innere Abhängigkeit von diesen in unmittelbare Evidenz.

---

*) Schur, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen, Math. Ann. Bd. 33, S. 49ff.

Somit erledigt diese Darstellung zugleich die Frage nach der Aehnlichkeit transitiver Gruppen. Handelt es sich um die Parametergruppe, so sind diese Formeln von besonderer Einfachheit. Ich habe daher die Behandlung dieses Falles vorausgeschickt, zumal die von mir gegebene analytische Darstellung der Parametergruppe unmittelbar die Zusammensetzung jeder zugehörigen Transformationsgruppe aus eingliedrigen Gruppen erkennen lässt. Der beliebige Untergruppen behandelnde Paragraph enthält nichts Neues, musste aber der Vollständigkeit halber eingefügt werden. Es mag zuletzt noch bemerkt werden, dass für das Verständniss meiner Abhandlung keinerlei Vorkenntnisse aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen oder Transformationsgruppen erforderlich sind.

§ 1.

Zurückführung der Gruppeneigenschaft auf die grundlegenden Differentialgleichungen.

Ist in einem Gebiete von n Dimensionen eine Schaar von ∞^r Transformationen vorgelegt, von denen jede einem Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einen Punkt $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ zuordnet, so ist der allgemeinste analytische Ausdruck derselben:

$$(1) \qquad x_\mathfrak{a}' = f_\mathfrak{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, u_1, u_2, \ldots, u_r) = f_\mathfrak{a}(x;\, u).$$

Von den $f_\mathfrak{a}$ möge zunächst nur so viel bekannt sein, dass sie Potenzreihen der $x_\mathfrak{a}$ und der $u_\mathfrak{b}$ sind, welche in der Nähe der Stelle

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = u_1 = u_2 = \cdots = u_r = 0$$

convergiren. Beschränken wir uns auf eine gehörige Nähe dieses Nullpunktes, so werden wir es im Folgenden zunächst immer mit Potenzreihen derselben Art zu thun haben.

Unter diesen Transformationen möge nun im Besonderen eine sein, welche jedem Punkte ihn selbst zuordnet, die sogenannte identische Transformation; wir werden später*) sehen, wie wir uns von dieser zunächst als speciell erscheinenden Annahme befreien können. Nehmen wir weiter an, dass diese Transformation dem Werthesysteme $u_\mathfrak{b} = 0$ der Parameter entspreche, so werden die $f_\mathfrak{a}$ die Form haben:

$$(2) \qquad f_\mathfrak{a}(x;\, u) = x_\mathfrak{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_\mathfrak{a}(x;\, 0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1} \partial u_{\mathfrak{b}_2} \cdots \partial u_{\mathfrak{b}_m}} u_{\mathfrak{b}_1} u_{\mathfrak{b}_2} \cdots u_{\mathfrak{b}_m}.$$

$$\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \cdots, r\}.$$

Soll unsre Schaar von Transformationen wirklich von r-facher Mächtigkeit sein, so muss es möglich sein, *um den Nullpunkt einen*

*) Vergl. § 7 dieser Abhandlung.

solchen endlichen Bereich abzugrenzen, dass zwei verschiedenen Werthsystemen der Parameter i. A. auch zwei verschiedene Transformationen entsprechen. Würden nämlich allen Stellen (u_a) eines Theiles desjenigen Gebietes, für welches $|u_a| < \delta$, Stellen (v_a) entsprechen, für welche ebenfalls $|v_a| < \delta$, δ mag so klein sein, wie man will, derart dass für alle x_a die Gleichungen bestehen:

$$(3)\qquad f_a(x;u) = f_a(x;v),$$

so würde für unendlich kleine δ hieraus folgen:

$$(4)\qquad \sum_{b=1}^{r} \frac{\partial f_a(x;u)}{\partial u_b}(v_b - u_b) = 0.$$

Es müssten daher die Functionen $\chi_c(u)$, welche die Coefficienten der Entwickelung der $f_a(x;u)$ nach den x_b sind, sämmtlich Gleichungen von der Form:

$$(5)\qquad \sum_{b=1}^{r} \frac{\partial \chi_c(u)}{\partial u_b}\, w_b = 0$$

genügen, sodass die Functionaldeterminante von je r dieser Functionen verschwinden würde. Es lassen sich demnach diese Functionen durch $r-1$ derselben ausdrücken*), oder unsere Transformationen bilden eine Schaar von höchstens $(r-1)$-facher Mächtigkeit.

Die Gruppeneigenschaft unserer Transformationen spricht sich nun in dem Bestehen folgender Gleichungen aus:

$$(6)\qquad f_a\big(f(x;u);v\big) = f_a\big(x;\varphi(u;v)\big).$$

in Rücksicht auf unsere letzte Bemerkung ergeben sich für die Functionen $\varphi_a(u;v)$ sofort folgende Gleichungen:

$$(7)\qquad u_b = \varphi_b(u;0)$$

und:

$$(8)\qquad v_b = \varphi_b(0;v).$$

Aus (7) folgt, dass die Functionen φ_a die folgende Form haben:

$$(9)\qquad \varphi_a(u;v) = u_a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi_a(u,0)}{\partial v_{b_1}\partial v_{b_2}\cdots\partial v_{b_m}}\, v_{b_1}v_{b_2}\cdots v_{b_m};$$
$$\{b_1, b_2, \cdots, b_m = 1, 2, \cdots, r\}$$

von den hierdurch neu eingeführten Potenzreihen möge zunächst wieder nur bekannt sein, dass sie in gewisser Nähe des Nullpunktes convergiren.

*) S. etwa Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5. Aufl. Leipzig, Hirzel, 1881, S. 142 u. 143.

Aus (8) ergiebt sich weiter:

$$\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(0;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},\text{*)} \tag{10}$$

wo $\delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 1$ oder 0, je nachdem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$, und:

$$\frac{\partial^m \varphi_{\mathfrak{a}}(0;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}} = 0, \tag{11}$$

wenn $m > 1$.

Weiterhin folgt, dass auch die Gleichungen:

$$u_{\mathfrak{a}}' = \varphi_{\mathfrak{a}}(u;\,v) \tag{12}$$

eine Gruppe bestimmen**) Nach (6) ist nämlich erstens:

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{a}}\Big(f\big(f(x;\,u);\,v\big);\,w\Big) &= f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;\,u);\,\varphi(v;\,w)\big) \\ &= f_{\mathfrak{a}}\Big(x;\,\varphi\big(u;\,\varphi(v;\,w)\big)\Big), \end{aligned} \tag{13}$$

und zweitens:

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{a}}\Big(f\big(f(x;\,u);\,v\big);\,w\Big) &= f_{\mathfrak{a}}\Big(f\big(x;\,\varphi(u;\,v)\big);\,w\Big) \\ &= f_{\mathfrak{a}}\Big(x;\,\varphi\big(\varphi(u;\,v);\,w\big)\Big), \end{aligned} \tag{14}$$

also, sobald die u, v, w innerhalb des oben definirten Bereiches liegen:

$$\varphi_{\mathfrak{a}}\big(\varphi(u;\,v);\,w\big) = \varphi_{\mathfrak{a}}\big(u;\,\varphi(v;\,w)\big); \tag{15}$$

hierbei kann man sowohl die $u_{\mathfrak{a}}$ als die zu transformirenden Grössen betrachten und die $v_{\mathfrak{a}}$ als die Parameter der Transformation als auch umgekehrt. Die durch die Gleichungen (12) und (15) dargestellte Gruppe wollen wir die *Parametergruppe* der gegebenen Gruppe nennen.

Entwickeln wir in Gleichung (6) auf beiden Seiten nach Potenzen von $v_{\mathfrak{b}}$ und vergleichen die Coefficienten, so ergeben sich die folgenden nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Gruppeneigenschaft:

$$\frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;\,u);\,0\big)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}} = \tag{16}$$

$$\sum \frac{1}{p!}\,\frac{\partial^p f_{\mathfrak{a}}(x;\,u)}{\partial u_{\mathfrak{c}_1}\partial u_{\mathfrak{c}_2}\cdots\partial u_{\mathfrak{c}_p}}\left[\frac{1}{s_1!}\cdot\frac{\partial^{s_1}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_1}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1}}}\cdot\frac{1}{s_2!}\,\frac{\partial^{s_2}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_2}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+1}}\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+2}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+s_2}}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\frac{1}{s_p!}\,\frac{\partial^{s_p}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_p}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m-s_p}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right].$$

$$\left\{\begin{matrix} p = 1, 2, \ldots, m;\ \ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_p = 1, 2, \ldots, r;\ \ \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_p = 1, 2, \ldots, p; \\ s_1 + s_2 + \cdots + s_p = m \end{matrix}\right\}.$$

*) Vergl. Transf. Theorem 1, S. 18.

**) Vergl. Transf. Theorem 71, S. 404.

Diese unendlich vielen Bedingungen reduciren sich nun dadurch auf eine endliche Anzahl, dass *sie für jedes m erfüllt sind*, *sobald sie für $m = 1$ befriedigt sind*, sobald also:

$$\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;\,u);\,0\big)}{\partial v_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;\,u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}} \; \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{c}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}}}\,. \tag{17}$$

Nehmen wir nämlich an, das System (16) sei für ein gewisses m und alle kleineren Zahlen erfüllt, so ergiebt sich durch Differentiation desselben nach $u_{\mathfrak{c}}$, Multiplication mit $\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{c}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}$ und Summation über $\mathfrak{c}$ in Rücksicht auf (17):

$$\sum_{\mathfrak{d}=1}^{n} \frac{1}{m!} \, \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;\,u);\,0\big)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right)}{\partial f_{\mathfrak{d}}(x;\,u)} \; \frac{\partial f_{\mathfrak{d}}\big(f(x;\,u);\,0\big)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}} = \tag{18}$$

$$= \sum \frac{1}{(p+1)!} \, \frac{\partial^{p+1} f_{\mathfrak{a}}(x;\,u)}{\partial u_{\mathfrak{c}_1}\partial u_{\mathfrak{c}_2}\cdots\partial u_{\mathfrak{c}_{p+1}}} \left[\frac{1}{s_1!}\,\frac{\partial^{s_1}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_1}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1}}} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \frac{1}{s_p!}\,\frac{\partial^{s_p}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_p}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m-s_p}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}} \; \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_{p+1}}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}\right]$$

$$+ \sum \frac{1}{p!} \, \frac{\partial^{p} f_{\mathfrak{a}}(x;\,u)}{\partial u_{\mathfrak{c}_1}\partial u_{\mathfrak{c}_2}\cdots\partial u_{\mathfrak{c}_{p}}} \left[\frac{1}{s_1!}\,\frac{\partial^{s_1}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_1}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{s}}} \cdots \right.$$

$$\cdots \left\{\frac{1}{s_{\mathfrak{e}}!}\,\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^{s_{\mathfrak{e}}}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_{\mathfrak{e}}}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+s_2+\cdots+s_{\mathfrak{e}-1}+1}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+s_2+\cdots+s_{\mathfrak{e}}}}}\right)}{\partial u_{\mathfrak{c}}} \cdot \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{c}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}\right\} \cdots$$

$$\left. \cdots \frac{1}{s_p!}\,\frac{\partial^{s_p}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_p}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m-s_p}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right].$$

$$\left\{\begin{matrix} p=1,2,\ldots,m;\ \mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\ldots,\mathfrak{c}_{p+1}=1,2,\ldots,r;\ \mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2,\ldots,\mathfrak{d}_p;\ \mathfrak{d}_{p+1}=1,2,\ldots,p;p+1 \\ s_1+s_2+\cdots+s_p=m;\ \mathfrak{e}=1,2,\ldots,p;\ \mathfrak{c}=1,2,\ldots,r. \end{matrix}\right\}.$$

Hier dürfte nur zu erörtern sein, warum in der ersten Summe rechts der Nenner $(p+1)!$ statt $p!$ gesetzt ist; dem würde in der That so sein, wenn wir nach der Rechenvorschrift dem letzten Factor den Index $\mathfrak{c}$ gegeben hätten. Durch die angewandte Bezeichnung tritt aber jedes Glied der Summe $(p+1)$-mal so oft auf, als dies eben nach

jener Vorschrift der Fall sein durfte, sodass für ein bestimmtes p die betreffenden Glieder der Summe noch durch $p+1$ zu dividiren sind.

Aus (18) ergiebt sich für $u_\mathfrak{a} = 0$ in Rücksicht auf die Gleichungen (10) und (11):

$$(19)\quad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{n} \frac{1}{m!} \frac{\partial\left(\frac{\partial^m f_\mathfrak{a}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}\partial u_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial u_{\mathfrak{b}_m}}\right)}{\partial x_\mathfrak{d}} \frac{\partial f_\mathfrak{d}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_{m+1}}} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f_\mathfrak{a}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}\partial u_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial u_{\mathfrak{b}_{m+1}}}$$

$$+\sum \frac{1}{p!} \frac{\partial^p f_\mathfrak{a}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}}\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}}\cdots\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p-1}}}\partial u_\mathfrak{c}} \frac{1}{(m-p+1)!} \frac{\partial\left(\frac{\partial^{m-p+1}\varphi_\mathfrak{c}(0;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_p}}\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p+1}}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right)}{\partial u_{\mathfrak{b}_{m+1}}}.$$

$$\{p=1,2,\ldots,m;\ \mathfrak{c}=1,2,\ldots,r;\ \mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\ldots,\mathfrak{c}_m=1,2,\ldots,m\}.$$

Setzt man hierin zunächst $f(x;u)$ für x, so erhält man eine neue Form der linken Seite von (18).

Alle unsre Formeln von (16) ab bleiben offenbar gültig, wenn man in ihnen f, x, u, v, n durch φ, u, v, w, r ersetzt*). Wir wollen von ihnen nur diejenigen anmerken, welche (17) und (19) analog sind, nämlich die Formeln:

$$(20)\qquad \frac{\partial\varphi_\mathfrak{a}(\varphi(u;v);0)}{\partial w_\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial\varphi_\mathfrak{a}(u;v)}{\partial v_\mathfrak{c}} \frac{\partial\varphi_\mathfrak{c}(u;0)}{\partial w_\mathfrak{b}}.$$

und:

$$(21)\quad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} \frac{1}{m!} \frac{\partial\left(\frac{\partial^m\varphi_\mathfrak{a}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right)}{\partial u_\mathfrak{d}} \frac{\partial\varphi_\mathfrak{d}(x;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}\varphi_\mathfrak{a}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}$$

$$+\sum \frac{1}{p!} \frac{\partial^p\varphi_\mathfrak{a}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}}\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p-1}}}\partial v_\mathfrak{c}} \frac{1}{(m-p+1)!} \frac{\partial\left(\frac{\partial^{m-p+1}\varphi_\mathfrak{c}(0;0)}{\partial w_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_p}}\partial w_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p+1}}}\cdots\partial w_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}}\right)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}.$$

$$\{p=1,2,\ldots,m;\ \mathfrak{c}=1,2,\ldots,r;\ \mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\ldots,\mathfrak{c}_m=1,2,\ldots,m\}.$$

Setzt man hierin für m und p: $s_\mathfrak{e}$ und q, so erhält man einen Ausdruck für die in geschweiften Klammern stehende Grösse in der rechten Seite von (18). Substituirt man diesen Ausdruck in (18), so liefert der erste Term derselben gerade diejenigen Glieder der Formel (16) für $m+1$, welche in der Summe der rechten Seite von (18) hierzu noch fehlen; die übrigen Terme liefern auf Grund der Formel (16)

*) Vergl. des Verf. o. a. Abhandlung, S. 52 u. 53.

für m und alle kleineren Zahlen gerade diejenige Summe, welche in der aus (19) folgenden neuen Form der linken Seite von (18) neben:

$$\frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1} f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;u);0\big)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}$$

noch steht. *Aus der Gültigkeit der Formel* (16) *für ein m und alle kleineren Zahlen folgt also diese selbe Formel für $m+1$.* Die vollständige Ausrechnung glaubten wir hierbei dem Leser überlassen zu dürfen.

Das Bestehen der Gleichungen (17) hat daher die Gleichungen (16) für jedes m und somit auch die für die Gruppeneigenschaft charakteristischen Gleichungen (6) zur Folge. Dies ist aber nur bewiesen unter Voraussetzung der Gleichungen (20), welche ihrerseits natürlich wieder die Gleichungen (15) zur Folge haben. Das Problem der Bestimmung einer Transformationsgruppe gestaltet sich also folgendermassen. Sind gegeben die Functionen:

$$(22)\qquad \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}}} = \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u),$$

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b}=1,2,\ldots,r)$$

die sogenannten *Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe*, so erlauben die aus (20) folgenden Recursionsformeln (21) die Functionen $\varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)$ nach Potenzen der $v_{\mathfrak{b}}$ zu entwickeln, also die Parametergruppe zu bestimmen. Sind ferner gegeben die Functionen:

$$(23)\qquad \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;0)}{u_{\mathfrak{b}}} = \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x),\qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{a}=1,2,\ldots,n\\ \mathfrak{b}=1,2,\ldots,r\end{pmatrix}$$

die *Componenten der infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe*, so erlauben die aus (17) folgenden Recursionsformeln (19) mit Hülfe der nunmehr bekannten $\varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)$ die $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ nach Potenzen der $u_{\mathfrak{b}}$ zu entwickeln, also die gesuchte Gruppe zu bestimmen. Selbstverständlich bedarf in gegebenem Falle die Convergenz der betreffenden Reihen einer besonderen Untersuchung*). Wir erhalten also das Resultat:

Satz 1. *Soll die Schaar von Transformationen*

$$x_{\mathfrak{a}}' = f_{\mathfrak{a}}(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

eine Gruppe bilden, soll also sein

$$f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;u);v\big) = f_{\mathfrak{a}}\big(x;\varphi(u;v)\big),$$

*) Vergl. § 4. Einleitung und Anmerkung auf S. 177.

so sind hierfür die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen die, dass die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ und $\varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)$ den Differentialgleichungen genügen:

$$\text{(I)} \qquad \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\big(\varphi(u;v)\big) - \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}}\, \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) = 0, \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r)$$

und:

$$\text{(II)} \qquad \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\big(f(x;u)\big) - \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\, \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u) = 0; \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n \\ \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

*und es ist die Gruppe durch die Functionen $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ und $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$, welche letzteren den Anfangsbedingungen: $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = 1$ oder 0, je nachdem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$, genügen, vollständig bestimmt.**)

§ 2.

Integrabilitätsbedingungen der grundlegenden Differentialgleichungen.

Um das System (I) zu integriren setzten wir:

$$(25) \qquad \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v) = u_{\mathfrak{a}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi_{\mathfrak{a}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1} \partial v_{\mathfrak{b}_2} \cdots \partial v_{\mathfrak{b}_m}} v_{\mathfrak{b}_1} v_{\mathfrak{b}_2} \cdots v_{\mathfrak{b}_m}. \qquad \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Wir werden so aus dem Systeme (I) zur Bestimmung der Coefficienten dieser Reihe Gleichungen erhalten, welche, wie wir bewiesen haben, den Recursionsformeln (21) äquivalent sind. Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (I) werden daher ausdrücken müssen, dass diese Formeln einander nicht widersprechen, dass also die durch Vertauschung von $\mathfrak{b}_{m+1}$ mit etwa $\mathfrak{b}_m$ aus (21) entstehende Formel denselben Werth des rechts stehenden $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten liefert. Wir erhalten so, wenn wir:

$$(26) \qquad c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}} = \frac{\partial \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial u_{\mathfrak{a}}} - \frac{\partial \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}$$

setzen, für $m = 1$ die Bedingungen:

$$(27) \qquad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} \left\{ \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}} \omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_2}(u) - \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_2}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}} \omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u) \right\} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)\, c_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{c}},$$

*) Vergl. Transf. Theorem 3, p. 33, welches sich freilich mit unserem Satz nur theilweise deckt.

Es lässt sich nun zeigen, dass dies zugleich die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems (I) sind. Differentiiren wir nämlich dasselbe nach $v_\mathfrak{d}$, multipliciren mit $\omega_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(v)$ und summiren wir über $\mathfrak{d}$, so erhalten wir das System:

$$(28)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(\varphi(u;v))}{\partial \varphi_\mathfrak{c}(u;v)}\, \omega_\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}_1}\big(\varphi(u;v)\big)$$

$$-\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}\left\{\frac{\partial^2 \varphi_\mathfrak{a}(u;v)}{\partial v_\mathfrak{c}\partial v_\mathfrak{d}}\, \omega_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(v)\, \omega_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(v) + \frac{\partial \varphi_\mathfrak{a}(u;v)}{\partial v_\mathfrak{c}}\, \frac{\partial \omega_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(v)}{\partial v_\mathfrak{d}}\, \omega_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(v)\right\} = 0,$$

welches das System (I) ersetzen kann. Denn bezeichnen wir die linke Seite von (I) mit $\varrho_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(u;v)$, so hat das System (28) die Form:

$$\sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} \frac{\partial \varrho_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(u;v)}{\partial v_\mathfrak{d}}\, \omega_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(v) = 0;$$

weil die Determinante $|\omega_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(v)|$ nicht identisch verschwindet, so folgt hieraus, dass die $\varrho_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(u;v)$ von den $v_\mathfrak{c}$ unabhängig sind. Da aber der Definition der $\omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(u)$ und den Anfangsbedingungen gemäss $\varrho_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(u;0)$ für alle $u_\mathfrak{c}$ verschwindet, so folgt in der That aus dem System (28) das System (I). Es war daher auch berechtigt, die Doppelsumme des ersten Gliedes von (28) auf Grund von (I) durch eine einfache Summe zu ersetzen.

Aus (28) werden sich nunmehr durch Coefficientenvergleichung ebenfalls Gleichungen ergeben, die den Formeln (21) äquivalent sind. Hierbei ist aber folgendes zu bemerken. Nehmen wir an, die Formeln (21) seien für alle m von 1 bis l widerspruchslos erfüllt, so hat das zur Folge, dass im Systeme (I) alle Glieder l^{ter} und niederer Dimension in den $v_\mathfrak{c}$ fortfallen, während in (28) dann nur die Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension verschwinden; umgekehrt wird das Fortfallen dieser Glieder das Bestehen der Gleichungen (21) für alle m von 1 bis l zur Folge haben. Um aber auszudrücken, dass diese Gleichungen einander nicht widersprechen, brauchen wir nur die Bedingungen dafür aufzusuchen, dass die Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension auch in denjenigen Gleichungen fortfallen, die aus (28) entstehen, wenn man darin $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}_1$ vertauscht und das Resultat von (28) subtrahirt. Wir erhalten so:

$$(29)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{\frac{\partial \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(\varphi(u;v))}{\partial \varphi_\mathfrak{c}(u;v)}\, \omega_\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}_1}\big(\varphi(u;v)\big) - \frac{\partial \omega_\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_1}(\varphi(u;v))}{\partial \varphi_\mathfrak{c}(u;v)}\, \omega_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}\big(\varphi(u;v)\big)\right\}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}\left\{\frac{\partial \omega_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(v)}{\partial v_\mathfrak{d}}\, \omega_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(v) - \frac{\partial \omega_\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}_1}(v)}{\partial v_\mathfrak{d}}\, \omega_\mathfrak{d}^\mathfrak{b}(v)\right\}\frac{\partial \varphi_\mathfrak{a}(u;v)}{\partial v_\mathfrak{c}} = 0.$$

Auf Grund von (27) gehen diese Gleichungen über in:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, \varrho^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a}}(u;v) = 0.$$

Sind demnach die Formeln (21) für alle m von 1 bis l widerspruchslos erfüllt, so folgt hieraus, dass in den Gleichungen (29) alle Glieder l^{ter} und niederer Dimension in den $v_{\mathfrak{c}}$ herausfallen, es stehen daher die Gleichungen (21) auch für $m = l + 1$ mit einander nicht im Widerspruch und können dazu dienen, auch die $(l+2)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten zu bestimmen. Es haben also in der That die Gleichungen (27) alle aus den Formeln (21) sich ergebenden Integrabilitätsbedingungen des Systems (I) zur Folge.

Genau ebenso ergeben sich als die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems (II) die Gleichungen:

$$(30) \qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\, \xi^{\mathfrak{b}_1}_{\mathfrak{c}}(x) - \frac{\partial \xi^{\mathfrak{b}_1}_{\mathfrak{a}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\, \xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}(x) \right\} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \xi^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a}}(x)\; c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}.$$

Es muss aber hier noch einer Beschränkung gedacht werden, der die $\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ unterworfen sind, sollen anders die aus (I) und (II) sich ergebenden Transformationen wirklich von r Parametern abhängen. Es lässt sich nämlich dann leicht die Unmöglichkeit davon einsehen, dass zwischen den $\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ Identitäten von der Form:

$$(31) \qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\, \xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x) = 0$$

$$(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Dies ist ja sicher nicht möglich, falls wir $\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ durch $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ ersetzen, also dem $\mathfrak{a}$ alle Werthe von 1 bis r geben, weil die Determinante $|\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)|$ nicht identisch verschwindet. Setzen wir daher:

$$(32) \qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\, \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) = \sigma_{\mathfrak{a}}(u),$$

so würde, falls wirklich die Identitäten (31) beständen, aus (II) folgen, dass auch:

$$(33) \qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\, \sigma_{\mathfrak{c}}(u) = 0.$$

Aus diesen den Gleichungen (4) ähnlichen Gleichungen würde aber wie dort folgen, dass die $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ von weniger als r Parametern abhängen.

Umgekehrt, wenn dies der Fall, müssen immer Identitäten von der Form (31) bestehen. Würden nämlich die durch die Systeme (I) und (II) bestimmten Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x; u)$ von weniger als r Parametern abhängen, so würde es unter den a. a. O. erwähnten Functionen $\chi_{\mathfrak{c}}(u)$ etwa $m < r$ von einander unabhängige, $\chi_1(u), \chi_2(u), \ldots, \chi_m(u)$, geben, sodass nicht alle m-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \frac{\partial \chi_{\mathfrak{c}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} \right\| \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r \\ \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

identisch verschwinden, wohl aber alle $(m+1)$-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \frac{\partial \chi_{\mathfrak{c}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} \right\| \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r \\ \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, m, \; m+1 \end{pmatrix},$$

wenn $\chi_{m+1}(u)$ eine ganz beliebige der übrigen Functionen $\chi_{\mathfrak{c}}(u)$. Setzen wir daher:

$$\frac{\partial \chi_{\mathfrak{c}}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = e_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}, \tag{34}$$

so wird es auch unter diesen Grössen $l \cdot r$ $(l \leq m)$ solche geben, dass nicht alle l-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\| e_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}} \| \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, a_l \\ \mathfrak{b} = 1, \; 2, \; \ldots, a_r \end{pmatrix}$$

verschwinden, wohl aber alle $(l+1)$-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\| e_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}} \| \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1, a_2, \ldots, \mathfrak{a}_{l+1} \\ \mathfrak{b} = 1, \; 2, \; \ldots, r \end{pmatrix}.$$

Wir werden daher $r(r-l)$ solche Grössen $d_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}$ wählen können, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} e_{\mathfrak{a}_1}^1, & e_{\mathfrak{a}_2}^1, & \ldots, & e_{\mathfrak{a}_l}^1, & d_1^{\,1}, & \ldots, & d_{r-l}^1 \\ e_{\mathfrak{a}_1}^2, & e_{\mathfrak{a}_2}^2, & \ldots, & e_{\mathfrak{a}_l}^2, & d_1^{\,2}, & \ldots, & d_{r-l}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{\mathfrak{a}_1}^r, & e_{\mathfrak{a}_2}^r, & \ldots, & e_{\mathfrak{a}_l}^r, & d_1^{\,r}, & \ldots, & d_{r-l}^r \end{vmatrix} \tag{35}$$

nicht verschwindet. Bezeichnen wir dann mit $a_{\mathfrak{b}}$ die ersten Unterdeterminanten derselben nach den Gliedern der letzten Verticalreihe, so ist evident, dass diese die Gleichungen (31) befriedigen. Wissen wir also, dass solche Identitäten nicht bestehen können, so sind die durch die Systeme (I) und (II) bestimmten Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x; u)$ wirklich von r Parametern abhängig.

Wir erhalten so den folgenden Satz:

Satz 2. *Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Componenten der infinitesimalen Transformationen*

$\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ und $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ auf Grund der Systeme (I) *und* (II) *eine r-gliedrige Gruppe von Transformationen bestimmen, sind die, dass:*

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{\frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(u)-\frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)-\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)\,c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}\right\}=0 \tag{III}$$

und:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n}\left\{\frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\,\xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(x)-\frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\,\xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)\right\}-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\,c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}=0,\text{*)} \tag{IV}$$

wo:

$$c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}=\frac{\partial \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}}-\frac{\partial \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}, \tag{V}$$

ferner $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}=1$ *oder* 0, *je nachdem* $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ *oder* $a \gtrless b$, *und wo die* $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ *keine Identitäten von der Form:*

$$\sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\,\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)=0\text{**)} \tag{VI}$$

$$(\mathfrak{a}=1,2,\ldots,n)$$

befriedigen dürfen.

§ 3.

Bestimmung der Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe.

Wenn wir jetzt dazu übergehen, das System (III) zu integriren, so setzen wir natürlich die Constanten $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ als gegeben voraus; dieselben müssen dann zunächst den Bedingungen genügen:

$$c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}=-c_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}. \tag{36}$$

Unsern Voraussetzungen gemäss werden wir nun ansetzen müssen:

$$\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)=\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}A_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\cdots\mathfrak{c}_m}^{\mathfrak{a}}\,u_{\mathfrak{c}_1}u_{\mathfrak{c}_2}\ldots u_{\mathfrak{c}_m}, \tag{37}$$

$$\{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\ldots,\mathfrak{c}_m=1,2,\ldots,r\}$$

wo $\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}=1$ oder 0, je nachdem $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}\gtrless\mathfrak{b}$. Hiernach ergiebt sich aus (III) für $u=0$:

$$c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}=A_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}-A_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}, \tag{38}$$

---

*) Vergl. Transf. Theorem 24, p. 158.
**) Vergl. Transf. Theorem 8, p. 65.

welche Gleichungen wegen (36) widerspruchslos sind; sie erlauben offenbar von der r^3 Grössen $A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}$ durch die $\left(\frac{1}{2}r(r-1)+r\right)r$ Grössen $A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}$, wo $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}_1$, und die $c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}$ die übrigen auszudrücken.

Setzen wir nun überhaupt die Reihen (37) in das System (III) ein, so ergeben sich durch Coefficientenvergleichung folgende Beziehungen:

$$
(39) \qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m}
$$

$$
-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-p-1)!\,p!}\Big\{A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}
$$

$$
- A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}\Big\}.
$$

$$
\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \ldots, m\}
$$

Hiernach ergeben sich z. B. für die drei Differenzen:

$$
A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}, \qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m},
$$

$$
A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}
$$

Ausdrücke durch die $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}$ und die Coefficienten niederer Ordnung der $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$, welche gestatten durch diese Grössen und einen der in diesen Differenzen enthaltenen Coefficienten die beiden andern auszudrücken. Es wird aber nun darauf ankommen, die Bedingungen dafür aufzustellen, dass jene drei Ausdrücke nicht mit einander im Widerspruche stehen, d. h. dass auch die Summe der rechten Seiten derselben verschwindet.

Für $m = 2$ sind diese Bedingungen leicht zu finden; dann geht nämlich (39) über in:

$$
(40) \quad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \{c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2} + A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2}\}.
$$

Vertauscht man hierin $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ cyklisch mit einander und addirt die drei so entstehenden Gleichungen zu einander, so ergiebt sich in Rücksicht auf (38):

$$
(41) \qquad 0 = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \{c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_1} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}}\}.
$$

Diese Bedingungen sind nun aber auch hinreichend, um das Bestehen der analogen Identitäten für jedes m zur Folge zu haben.

Um dies zu beweisen, formen wir das System (III) in ein anderes um, welches dasselbe ersetzen kann. Wir differentiiren (III) nach $u_{\mathfrak{b}}$, multipliciren mit $\omega^{\mathfrak{b}_2}_{\mathfrak{b}}(u)$ und summiren über $\mathfrak{b}$; dann erhalten wir:

$$(42)\qquad \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}\left\{\frac{\partial^2\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}\partial u_{\mathfrak{d}}}\,\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(u)\,\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_2}(u)-\frac{\partial^2\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}\partial u_{\mathfrak{d}}}\,\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)\,\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_2}(u)\right\}$$

$$+\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}\left\{\frac{\partial\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\frac{\partial\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}}\,\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_2}(u)-\frac{\partial\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\frac{\partial\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}}\,\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_2}(u)-\frac{\partial\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}}\,\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_2}(u)\,c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}\right\}=0.$$

Zunächst ist leicht zu sehen, dass das System (42) das System (III) ersetzen kann. Denn bezeichnet man die linke Seite des letzteren mit $\tau_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}(u)$, so können wir (42) auch so schreiben:

$$(43)\qquad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{r}\frac{\partial\tau_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}}\,\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_2}(u)=0.$$

Giebt man hierin dem $\mathfrak{b}_2$ alle Werthe von 1 bis r, während man $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ festhält, so erhält man ein System von r homogenen linearen Gleichungen für die r Unbekannten $\frac{\partial\tau_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}}$, dessen Determinante $|\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_2}(u)|$ nach Voraussetzung nicht identisch verschwindet, sodass die $\tau_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}(u)$ von den $u_{\mathfrak{c}}$ unabhängig sein müssen. Setzen wir also voraus, dass die Coefficienten der linearen Glieder in den $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ bereits den Bedingungen (38) gemäss gewählt sind, so folgt aus $\tau_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}(0)=0$, dass in der That das System (42) das System (III) ersetzen kann.

Hier greift nun wieder die Bemerkung Platz, dass das Bestehen der Gleichungen (39) für alle m von 1 bis l zur Folge hat, dass in den $\tau_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}(u)$ alle Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension fortfallen, während dadurch nur die Glieder $(l-2)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension in der linken Seite von (42) zum Verschwinden gebracht werden; umgekehrt hat das Verschwinden der letzteren das Bestehen der Gleichungen (39) für alle m von 1 bis l zur Folge. Wollen wir daher zum Ausdruck bringen, dass die Gleichungen (39) für $m=l+1$ einander nicht widersprechen, so haben wir die Bedingungen dafür aufzustellen, dass die Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension in denjenigen Gleichungen fortfallen, die aus (42) entstehen, wenn man in ihnen $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ cyklisch vertauscht und die Resultate zu (42) addirt. Wir erhalten so aus (42) auf Grund von (41):

$$(44)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{\frac{\partial\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\tau_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}^{\mathfrak{c}}(u)+c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}^{\mathfrak{c}}\,\tau_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}(u)\right\}=0.$$

Hieraus geht hervor, dass das Bestehen der Gleichungen (39) für alle m von 1 bis l das Verschwinden aller Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension aus diesen Bedingungsgleichungen zur Folge hat, sodass die Gleichungen (39) einander auch für $m=l+1$ nicht wider-

sprechen, die Grössen $A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_{l+1}}$ also ihnen entsprechend gewählt werden können. Hierdurch ist bewiesen, dass *die Gleichungen* (41) *die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems* (III) *bilden.*

Ehe wir nun dazu übergehen, die der Natur der Sache nach noch unbestimmten Coefficienten in den Entwickelungen für die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ durch geeignete Festsetzungen zu bestimmen, müssen wir eine wichtige Bemerkung machen über die Ableitung aller Lösungssysteme von (III) aus einem derselben. Führen wir in die Parametergruppe $u'_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(u;\, v)$ neue Veränderliche mit Hülfe der Gleichungen:

$$s_{\mathfrak{a}} = g_{\mathfrak{a}}(u); \quad u_{\mathfrak{a}} = G_{\mathfrak{a}}(s) \tag{45}$$

ein, wo $g_{\mathfrak{a}}(0) = 0$ und $\dfrac{\partial g_{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ sein mag, so geht dieselbe über in:

$$s'_{\mathfrak{a}} = g_{\mathfrak{a}}\Big(\varphi\big(G(s);\; G(t)\big)\Big) = \psi_{\mathfrak{a}}(s;\, t), \tag{46}$$

es wird also:

$$\vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(s) = \frac{\partial \psi_{\mathfrak{a}}(s;\, 0)}{\partial t_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\, \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}(u), \tag{47}$$

und:

$$\frac{\partial \vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial s_{\mathfrak{b}}} - \frac{\partial \vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial s_{\mathfrak{b}}} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}; \tag{48}$$

es sind also, wenn die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ Lösungen des Systems (III) sind, auch die Functionen $\sum\limits_{\mathfrak{c}=1}^{r} \dfrac{\partial g_{\mathfrak{a}}(G(s))}{\partial G_{\mathfrak{c}}(s)}\, \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}\big(G(s)\big)$ Lösungen desselben, wovon man sich auch leicht direct und unabhängig von der Definition dieser Functionen als Componenten infinitesimaler Transformationen einer Parametergruppe überzeugen kann. Man sieht aber auch umgekehrt, dass, sobald irgend ein Lösungssystem $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ von (III) gefunden ist, jedes andere $\vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(s)$ auf die obige Art aus ihm abgeleitet werden kann. Wir brauchen, um dies einzusehen, nur zu beweisen, dass die Integrabilitätsbedingungen des Systems (47) für die Functionen $g_{\mathfrak{a}}(u)$ unter den gemachten Voraussetzungen erfüllt sind. Dieser Beweis kann genau so geführt werden wie bei den Systemen (I) und (III); die Integrabilitätsbedingungen bestehen eben hier darin, dass die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ und $\vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(s)$ je Lösungssysteme des Systems (III) sind. Es dürfte überflüssig sein, dies zum dritten Male auszuführen. Ebensowenig brauchen wir besonders zu beweisen, dass die $g_{\mathfrak{a}}(u)$ den Gleichungen (47) gemäss nunmehr als Potenzreihen, die in der Nähe des Nullpunktes convergiren, bestimmt werden können, falls die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ und $\vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(s)$ als

solche Potenzreihen gegeben sind. Es genügt darauf hinzuweisen, dass die Gleichungen (47) auf die Form:

$$(49)\qquad \frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \vartheta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(s)\, \alpha_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u),$$

gebracht werden können, wo auch die $\alpha_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)$ Potenzreihen sind, die in der Nähe des Nullpunktes convergiren, und dass daher auf Grund dieser Gleichungen jeder Coefficient von $g_{\mathfrak{a}}(u)$ als ganze, ganzzahlige Function der Coefficienten niederer Dimension und der Coefficienten der $\vartheta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(s)$ und der $\alpha_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)$ ausgedrückt werden kann.*)

Hierdurch ist also bewiesen, dass es genügt, irgend ein Lösungssystem des Systems (III) aufzustellen. Wir finden ein solches, wenn wir den Formeln (39) die folgenden Bedingungen hinzufügen:

$$(50)\quad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} + A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m\mathfrak{b}} + A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\cdots\mathfrak{b}_m\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1} + \cdots + A_{\mathfrak{b}_m,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\cdots\mathfrak{b}_{m-1}} = 0.$$

In der That sind ja durch die Formeln (39) von den $m+1$ Gliedern dieser Summe m etwa durch das erste bestimmt, sodass das Hinzutreten der Bedingung (50) genügen würde, um diese $m+1$ Coefficienten durch die niederer Ordnung ausdrücken zu können. Es frägt sich nur, ob wir hierdurch convergente Reihen für die $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ erhalten. Um dies einzusehen, müssen wir genauer auf die Bestimmung der Coefficienten eingehen.

Vertauscht man in (39) $\mathfrak{b}_1$ der Reihe nach mit $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \ldots, \mathfrak{b}_m$ und addirt die so entstehenden Gleichungen zu (39), so folgt auf Grund von (50):

$$(51)\qquad (m+1)\, A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-1)!}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1},\mathfrak{b}}\, A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_3}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$- \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-p)!\, p!}\, A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}}\, A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p+1}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}.$$

$$\left\{\begin{matrix} p = 1, 2, \ldots, m-1; \\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m \end{matrix}\right\}$$

Nun ergiebt sich zunächst aus (38) in Rücksicht auf (50) für $m=1$:

$$(52)\qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = \frac{1}{2}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}.$$

Ferner folgt aus (51) für $m=2$:

$$(53)\qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} = \frac{1}{12} \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left\{ c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}} \right\}.$$

*) Vergl. S. v. Kowalevsky, zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Journ. f. r. u. a. M. Bd. 80, S. 1 ff. und etwa Biermann, Theorie der analytischen Functionen, Leipzig, Teubner 1887, S. 244 ff.

Allgemein ergiebt sich:

$$(54)\qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \lambda_m \sum_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2,\ldots,\mathfrak{d}_{m-1}=1}^{r} c^{\mathfrak{d}_1}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}} \cdot c^{\mathfrak{d}_2}_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}} \cdots c^{\mathfrak{d}_{m-1}}_{\mathfrak{d}_{m-2},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}} \cdot c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d}_{m-1},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}},$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m\}$$

wo die λ_m gewisse rationale Zahlen. Nehmen wir in der That an, diese Formel sei richtig für $m = 1, 2, \ldots, l-1$, so werden wir zeigen, dass sich λ_m immer so bestimmen lässt, dass sie auch für $m = l$ erfüllt ist. Es würde dann nämlich sein:

$$(55)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(l-p)!} \cdot \frac{1}{p!} A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{l-p}}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{l-p+1}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_l}} =$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_l = 1, 2, \ldots, l\}$$

$$= \lambda_{l-p}\,\lambda_p \sum_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2,\ldots,\mathfrak{d}_{p-1},\mathfrak{c},\mathfrak{e}_1,\ldots,\mathfrak{e}_{l-p-1}=1}^{r} c^{\mathfrak{d}_1}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}} c^{\mathfrak{d}_2}_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}} \cdots c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{d}_{p-1},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_p}}\, c^{\mathfrak{e}_1}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p+1}}}\, c^{\mathfrak{e}_2}_{\mathfrak{e}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p+2}}} \cdots c^{\mathfrak{e}_{l-p-1}}_{\mathfrak{e}_{l-p-2},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{l-1}}} \cdot c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e}_{l-p-1},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_l}}.$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_l = 1, 2, \ldots, l\}$$

Bedenken wir nun, dass $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, und dass in Folge dessen die Summe der Ausdrücke rechts für $p = 1$ und $l-1$ gleich wird der auf der rechten Seite von (51) stehenden ersten Summe, so folgt aus (51), dass Formel (54) auch für $m = l$ erfüllt ist, wenn wir setzen:

$$(56)\qquad (l+1)\,\lambda_l = -(\lambda_2\lambda_{l-2} + \lambda_3\lambda_{l-3} + \cdots + \lambda_{l-2}\lambda_2).$$

Dies würde nur für $l = 3$ nicht richtig sein, weil dann $l - 2 = 1$, vielmehr ist $\lambda_3 = 0$, und es verschwindet daher λ_l immer, sobald l eine ungerade Zahl. Wir erhalten daher zur Berechnung der λ_{2q} die Recursionsformel:

$$(57)\qquad (2q+1)\,\lambda_{2q} = -(\lambda_2\lambda_{2q-2} + \lambda_4\lambda_{2q-4} + \cdots + \lambda_{2q-2}\lambda_2).$$

Da nach (53) $\lambda_2 = \frac{1}{12}$, so finden wir so: $\lambda_4 = -\frac{1}{720}$, $\lambda_6 = \frac{1}{30240}$, u. s. w. Es scheint kein einfaches Gesetz zu sein, nach dem die λ_{2q} fortschreiten, jedenfalls aber sehen wir so viel, dass:

$$(58)\qquad |\lambda_{2q}| \leq \lambda_2^q;$$

denn nehmen wir an, diese Formel sei für $q = 1, 2, \ldots, m-1$ richtig, so folgt aus (57), dass:

$$(59)\qquad (2m+1)\,|\lambda_{2m}| \leq (m-1)\,\lambda_2^m,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nunmehr ist die Convergenz der für die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ aufgestellten Reihen leicht zu beweisen. Liegen nämlich alle $|c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}|$ unterhalb der positiven Grösse g, so folgt aus (37), (54) und (58), dass:

$$(60)\qquad |\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)| \leqq 1 + g\sum_{m=1}^{\infty} (gr)^{m-1}\,|u_{\mathfrak{b}_1}|\,|u_{\mathfrak{b}_2}|\cdots|u_{\mathfrak{b}_m}|$$

$$\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, r\}$$

$$= 1 + \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty} (gr)^m\,(|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r|)^m;$$

demnach convergirt die Reihe (38) sicher, so lange:

$$(61)\qquad |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r| < \frac{1}{rg}.$$

Wir können jetzt das folgende Resultat aussprechen:

Satz 3. *Sobald die Grössen* $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ *die Bedingungen:*

$$(\mathrm{VII})\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{c}}\,c_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}} + c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}^{\mathfrak{c}}\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}} + c_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}\,c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}\right\} = 0$$

erfüllen, lassen sich in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ *aufstellen*), welche die Differentialgleichungen* (III) *befriedigen, und zwar kann jedes Lösungssystem* $\vartheta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(s)$ *aus einer canonischen Form* $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ *desselben dadurch abgeleitet werden, dass man setzt:*

$$\vartheta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(s) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u),$$

wo die $s_{\mathfrak{a}} = g_{\mathfrak{a}}(u)$ *solche in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen, dass* $g_{\mathfrak{a}}(0) = 0$ *und* $\frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$. *Die Reihen für die canonische Form sind:*

$$(\mathrm{VIII})\quad \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m}{m!}\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}}^{\mathfrak{d}_1}\,c_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}}^{\mathfrak{d}_2}\cdots c_{\mathfrak{d}_{m-2},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}^{\mathfrak{d}_{m-1}}\,c_{\mathfrak{d}_{m-1},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}^{\mathfrak{a}}\,u_{\mathfrak{b}_1}u_{\mathfrak{b}_2}\cdots u_{\mathfrak{b}_m},$$

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{d}_1;\mathfrak{d}_2;\ldots;\mathfrak{d}_{m-1} = 1,2,\ldots,r;\ \mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_m = 1,2,\ldots,r\\ \mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\ldots,\mathfrak{c}_m = 1,2,\ldots,m\end{matrix}\right\}$$

wo:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2},\quad \lambda_2 = \frac{1}{12},\quad \lambda_{2q+1} = 0$$

und:

$$(2q+1)\,\lambda_{2q} = -(\lambda_2\lambda_{2q-2} + \lambda_4\lambda_{2q-4} + \cdots + \lambda_{2q-2}\lambda_2).$$

Die Gleichungen (VII) *sind zugleich die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für Integrabilität des Systems* (III).

*) Vergl. den ohne Beweis aufgestellten Satz I im 17. Capitel von Transf. S. 297.

§ 4.

Ueber die eingliedrigen Untergruppen.

Im zweiten Paragraphen haben wir bewiesen, dass die Functionen $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ und $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$, sobald sie die Differentialgleichungen (III) und (IV) befriedigen, auf Grund der Systeme (I) und (II) oder der mit ihnen äquivalenten Recursionsformeln (21) und (19) eine r-gliedrige Transformationsgruppe bestimmen. Es bedarf kaum des Hinweises, dass hierdurch die Functionen $\varphi_{\mathfrak{a}}(u; 0)$ und $f_{\mathfrak{a}}(x; u)$ als in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen bestimmt sind, sobald die $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ und $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ als solche gegeben sind. Es wird auch hier die Bemerkung genügen, dass auf Grund der Differentialgleichungen (I) und (II) die Coefficienten der Potenzreihen für $\varphi_{\mathfrak{a}}(u; v)$ und $f_{\mathfrak{a}}(x; u)$ als ganze, ganzzahlige Functionen der Coefficienten niederer Ordnung und derjenigen der $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ und $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ gegeben sind; das lehren ja auch die Recursionsformeln.

Nach Satz 3 bestimmt daher im Besonderen jedes System von Constanten $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$, welche die Bedingungen (VII) erfüllen, eine Parametergruppe $u'_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(u; v)$, welche alle die im ersten Paragraphen aufgestellten Gesetze erfüllt; wir denken uns diese in ihrer canonischen Form gegeben, d. h. nehmen die Componenten $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ ihrer infinitesimalen Transformationen in der Form (VIII) an. Nun gehört zu jeder Parametergruppe eine ihr reciproke Gruppe $v'_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(u; v)$; die Componenten der infinitesimalen Transformationen derselben:

$$\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v) = \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(0; v)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} \tag{62}$$

stehen in einer bemerkenswerthen Beziehung zu den $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$. Differentiiren wir nämlich Gleichung (I) nach $u_{\mathfrak{b}_1}$ und setzen dann $u_{\mathfrak{a}} = 0$, so folgt:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left\{ \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(v) - \frac{\partial \eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) \right\} = 0.\text{*)} \tag{63}$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\frac{\partial \eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(0)}{\partial v_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}}. \tag{64}$$

Bezeichnet man also die Coefficienten der Entwickelung von $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ mit $B_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m}^{\mathfrak{a}}$, so ist:

$$B_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = A_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}, \tag{65}$$

---

*) Vergl. die von Herrn Engel herrührende Bemerkung in Transf. S. 429.

und es ergiebt sich überhaupt aus (63) durch Coefficientenvergleichung die der Gleichung (39) ähnliche Gleichung:

$$(66)\qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m} - B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m}$$

$$+\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\frac{1}{(m-p-1)!\,p!}\Big\{A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}B^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}$$

$$- B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}\Big\} = 0.$$

$$\{p = 1, 2, \dots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \dots, m\}$$

Sind nun die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ in ihrer canonischen Form gegeben, sind also die Bedingungen (50) erfüllt, so gelten hiernach auch die Gleichungen:

$$(67)\qquad B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m} + B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\dots\mathfrak{b}_m\mathfrak{b}} + \cdots + B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_m,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\dots\mathfrak{b}_{m-1}} = 0.$$

Denn dieselben sind erfüllt für $m = 1$; nehmen wir also an, sie seien für $m = 1, 2, \dots, l-1$ erfüllt, so folgt aus (66), wenn wir in dieser Gleichung die Indices $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_m$ auf alle mögliche Weise mit einander vertauschen und die Resultate dieser Vertauschung zu (66) addiren, dass Gleichung (67) auch für $m = l$ erfüllt ist. Es werden sich demnach nach (64) die $B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m}$ ebenso aus den $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}$ zusammensetzen, wie die $A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m}$ aus den $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}$, oder es ist, weil diese Coefficienten für jedes ungerade $m > 1$ verschwinden, für $m > 1$:

$$(68)\qquad B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m} = A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m},$$

also:

$$(69)\qquad \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) - \eta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\,u_{\mathfrak{c}}.$$

Wir erhalten daher den Satz:

Satz 4. *Zwischen den Componenten der infinitesimalen Transformationen, $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$, der Parametergruppe $u'_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(u; v)$ und denen, $\eta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$, ihrer reciproken Gruppe $v'_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(u; v)$ besteht, sobald dieselben in ihrer canonischen Form vorgelegt sind, die Beziehung:*

$$\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) - \eta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\,u_{\mathfrak{c}}.$$

Von besonderem Interesse ist es aber, zu untersuchen, wie sich die Recursionsformeln (19) gestalten, wenn die Parametergruppe in ihrer canonischen Form vorliegt. Nun ist doch:

$$(70)\qquad \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m \varphi_{\mathfrak{a}}(0;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\dots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m}.$$

Vertauschen wir daher in (19) die Indices $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_{m+1}$ auf alle mögliche Weise mit einander und addiren die Resultate zu (19), so ergiebt sich wegen (67):

$$(71)\qquad \frac{\partial^{m+1} f_{\mathfrak{a}}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}\partial u_{\mathfrak{b}_2}\ldots\partial u_{\mathfrak{b}_{m+1}}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} \frac{1}{m!}\,\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m f_{\mathfrak{a}}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}}\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}}\ldots\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}}\right)}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\,\xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m+1}}}(x).$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m+1} = 1, 2, \ldots, m+1\}$$

Handelt es sich um eine eingliedrige Gruppe, so ist diese Formel eine unmittelbare Folge aus der Gleichung:

$$(72)\qquad \frac{d f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{du} = \xi_{\mathfrak{a}}\big(f(x;u)\big),$$

in welche die grundlegende Differentialgleichung (II) für $r=1$ übergeht.

Setzen wir nun:

$$(73)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\,u_{\mathfrak{c}} = \xi_{\mathfrak{a}}(x;u)$$

und bezeichnen mit $\frac{1}{m!} f_{\mathfrak{a}}^{(m)}(x;u)$ die Summe der Glieder m^{ter} Dimension in der Entwickelung von $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$, so folgt aus (71):

$$(74)\qquad f_{\mathfrak{a}}^{(m+1)}(x;u) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}^{(m)}(x;u)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\,\xi_{\mathfrak{c}}(x;u).$$

Setzt man daher $u_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} t$, so ergeben sich die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x; at)$ aus den Differentialgleichungen:

$$(75)\qquad \frac{d f_{\mathfrak{a}}(x;at)}{dt} = \xi_{\mathfrak{a}}\big(f(x;at);\,a\big).$$

Dies besagt offenbar, dass die den unendlich vielen Werthen von t entsprechenden Parametersysteme $u_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} t$ in unserer r-gliedrigen Gruppe Transformationen bestimmen, die ihrerseits eine eingliedrige Untergruppe jener bilden. Wir können dies auch ganz direct einsehen. Aus Formel (VIII) folgt nämlich:

$$(76)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)\,u_{\mathfrak{b}} = u_{\mathfrak{a}};$$

dasselbe folgt auch aus (37) und (50). Hieraus folgt:

$$(77)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,u_{\mathfrak{b}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} - \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u).$$

Nun ist doch nach (74):

$$(78)\qquad \varphi_{\mathfrak{a}}^{(2)}(u;v) = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b},\mathfrak{e}=1}^{r} \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}\,\omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{e}}(u)\,v_{\mathfrak{c}}\,v_{\mathfrak{e}},$$

also wird nach (76) und (77):

$$\varphi_\mathfrak{a}^{(2)}(u; u) = 0 \tag{79}$$

und in Folge dessen nach (74) allgemein $\varphi_\mathfrak{a}^{(m)}(u; u) = 0$. Hieraus folgt aber, dass;

$$\varphi_\mathfrak{a}(at, at') = a_\mathfrak{a}(t + t'), \tag{80}$$

wodurch unsere Behauptung ganz direct bewiesen ist; ist $t' = -t$, so ergiebt die Aufeinanderfolge dieser beiden Transformationen die Identität, oder die eine ist die Umkehrung der andern. Wir haben nunmehr den folgenden Satz bewiesen:

Satz 5. *Ist die Parametergruppe einer r-gliedrigen Transformationsgruppe auf ihre canonische Form gebracht, so bilden alle diejenigen Transformationen derselben, deren Parameter $u_\mathfrak{a} = a_\mathfrak{a} t$ man den unendlich vielen Werthen von t entsprechend erhält, eine eingliedrige Untergruppe, d. h. es ist $\varphi_\mathfrak{a}(at, at') = a_\mathfrak{a}(t + t')$. Die Gruppe selbst hat dann die Form*

$$f_\mathfrak{a}(x; u) = x_\mathfrak{a} + \sum_{m=1}^{\infty} f_\mathfrak{a}^{(m)}(x; u), \tag{IX}$$

wo:

$$f_\mathfrak{a}^{(1)}(x; u) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \xi_\mathfrak{a}^\mathfrak{c}(x)\, u_\mathfrak{c}, \tag{X}$$

und:

$$f_\mathfrak{a}^{(m+1)}(x; u) = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} \frac{\partial f_\mathfrak{a}^{(m)}(x; u)}{\partial x_\mathfrak{c}} f_\mathfrak{c}^{(1)}(x; u). \tag{XI}$$

Sind umgekehrt die $\xi_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x)$ als in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen gegeben, welche den Bedingungen des Satzes 2 genügen, so sind die sich aus (IX) ergebenden Functionen $f_\mathfrak{a}(x; u)$ ebenfalls in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen, welche eine r-gliedrige Transformationsgruppe darstellen, deren Transformationen sich zu je zweien als inverse ordnen).*

§ 5.

Ansatz zur Bestimmung aller Untergruppen.

Es wird nunmehr die Frage nahe liegen nach allen Untergruppen einer gegebenen Gruppe, die Frage also, ob es in der r-fachen Mannigfaltigkeit der Parameter derselben solche p-fache Untermannig-

*) Vergl. Transf. Theorem 24, p. 158.

faltigkeiten geben kann, dass die je zwei Stellen derselben entsprechenden Transformationen eine Transformation ergeben, deren Parameter einer Stelle derselben Untermannigfaltigkeit zugehören. Wir denken uns diese Mannigfaltigkeit gegeben in der Form:

$$u_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}}(t_1, t_2, \ldots, t_p), \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, r) \tag{81}$$

wo wir im Besonderen noch annehmen wollen, dass dieselbe den Nullpunkt enthalte, dass also etwa: $a(0) = 0$; wir werden später einsehen, bis zu welchem Grade diese Annahme nothwendig ist*). Gehört nun zwei Stellen $t_{\mathfrak{b}}$ und $s_{\mathfrak{b}}$ dieser Mannigfaltigkeit unserer Voraussetzung gemäss die Stelle $t_{\mathfrak{b}}' = \varkappa_{\mathfrak{b}}(t; s)$ zu, so muss sein:

$$a_{\mathfrak{a}}\big(\varkappa(t; s)\big) = \varphi_{\mathfrak{a}}\big(a(t); a(s)\big). \tag{82}$$

Ehe wir darauf eingehen, hieraus die Functionen $\varkappa_{\mathfrak{b}}(t; s)$ zu bestimmen, bemerken wir, dass dieselben jedenfalls wieder eine Parametergruppe bestimmen. Aus:

$$\varphi_{\mathfrak{a}}\Big(\varphi\big(a(t); a(s)\big);\ a(q)\Big) = \varphi_{\mathfrak{a}}\Big(a(t);\ \varphi\big(a(s); a(q)\big)\Big) \tag{83}$$

folgt nämlich:

$$\varphi_{\mathfrak{a}}\Big(a\big(\varkappa(t; s)\big); a(q)\Big) = \varphi_{\mathfrak{a}}\Big(a(t);\ a\big(\varkappa(s; q)\big)\Big), \tag{84}$$

oder:

$$a_{\mathfrak{a}}\Big(\varkappa\big(\varkappa(t; s); q\big)\Big) = a_{\mathfrak{a}}\Big(\varkappa\big(t; \varkappa(s; q)\big)\Big), \tag{85}$$

also, wenn anders die $a_{\mathfrak{a}}(t)$ wirklich von p Veränderlichen abhängen sollen:

$$\varkappa_{\mathfrak{b}}\big(\varkappa(t; s); q\big) = \varkappa_{\mathfrak{b}}\big(t; \varkappa(s; q)\big). \tag{86}$$

Um nun die Componenten der infinitesimalen Transformationen dieser p-gliedrigen Parametergruppe zu finden, differentiiren wir (82) nach $s_{\mathfrak{b}}$; wir erhalten so:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{p} \frac{\partial a_{\mathfrak{a}}\big(\varkappa(t; s)\big)}{\partial \varkappa_{\mathfrak{c}}(t; s)} \frac{\partial \varkappa_{\mathfrak{c}}(t; s)}{\partial s_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}\big(a(t); a(s)\big)}{\partial a_{\mathfrak{c}}(s)} \frac{\partial a_{\mathfrak{c}}(s)}{\partial s_{\mathfrak{b}}}. \tag{87}$$

Setzen wir daher:

$$\frac{\partial a_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial s_{\mathfrak{b}}} = a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}, \tag{88}$$

und

$$\frac{\partial \varkappa_{\mathfrak{a}}(t; 0)}{\partial s_{\mathfrak{b}}} = \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t), \tag{89}$$

---

*) Vergl. § 7.

so folgt:

$$(90)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{p} \frac{\partial a_{\mathfrak{a}}(t)}{\partial t_{\mathfrak{c}}} \lambda_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(t) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}} \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}\big(a(t)\big).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $t_{\mathfrak{d}}$, so folgt:

$$(91)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{p} \left\{ \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{a}}(t)}{\partial t_{\mathfrak{c}} \partial t_{\mathfrak{d}}} \lambda_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(t) + \frac{\partial a_{\mathfrak{a}}(t)}{\partial t_{\mathfrak{c}}} \frac{\partial \lambda_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(t)}{\partial t_{\mathfrak{d}}} \right\} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}=1}^{r} a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}} \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(a(t))}{\partial a_{\mathfrak{e}}(t)} \frac{\partial a_{\mathfrak{e}}(t)}{\partial t_{\mathfrak{d}}}.$$

Setzt man daher:

$$(92)\qquad \frac{\partial \lambda_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial t_{\mathfrak{d}}} - \frac{\partial \lambda_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{d}}(0)}{\partial t_{\mathfrak{b}}} = \gamma_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}},$$

so folgt hieraus:

$$(93)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{p} a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}} \gamma_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}=1}^{r} a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{d}} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}.$$

Sollen die $\gamma_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ hierdurch bestimmt sein, so dürfen offenbar nicht alle Determinanten p^{ter} Ordnung der Matrix $\|a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\|$ verschwinden; dies folgt auch schon aus (90), weil sonst, da ja sicher nicht alle Determinanten p^{ter} Ordnung der Matrix:

$$\left\| \frac{\partial a_{\mathfrak{a}}(t)}{\partial t_{\mathfrak{b}}} \right\|$$

identisch verschwinden dürfen, zwischen den Componenten der infinitesimalen Transformationen der Untergruppe Relationen von der Form (VI) bestehen würden, dieselbe also weniger als p-gliedrig wäre. Wir können daher die Matrix $\|a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\|$ zu einer nicht verschwindenden Determinante r^{ter} Ordnung $|a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}|$ ergänzen und dann durch die Gleichungen:

$$(94)\qquad u_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} s_{\mathfrak{b}}$$

die neuen Parameter $s_{\mathfrak{b}}$ einführen. Sind die Parameter $u_{\mathfrak{a}}$ so gewählt, dass die Componenten der infinitesimalen Transformationen $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ in ihrer canonischen Form erscheinen, so gilt dasselbe von den transformirten Componenten $u_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(s)$; denn zwischen ihnen besteht die (90) analoge Gleichung:

$$(95)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}} \mu_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(s) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}} \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u);$$

multiplicirt man dieselben mit $s_{\mathfrak{b}}$ und summirt über $\mathfrak{b}$, so ergiebt sich auch für die $\mu_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(s)$ die für die canonische Form charakteristische Gleichung (76). Aber die Grössen $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ gehen nunmehr in andere $\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ über

auf Grund der Gleichungen, die man aus (93) erhält, wenn man auf der linken Seite die Summe von 1 bis r nimmt. Wir werden daher jede Verwandlung der Parameter einer Transformationsgruppe dadurch bewerkstelligen können, dass wir erstens eine solche wie (45) ausführen, welche die $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ nicht ändert, und zweitens eine homogene lineare Transformation, welche die canonische Form bestehen lässt.

Ist nun in diesen neuen Parametern die der Untergruppe entsprechende Mannigfaltigkeit in der Form: $s_{\mathfrak{a}} = b_{\mathfrak{a}}(t)$ gegeben, so ist offenbar:

$$\frac{\partial b_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial t_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Wir können daher die Parameter von vornherein so gewählt denken, dass $a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, wodurch die Gleichungen (93) in die folgenden übergehen:

(96) $\gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d} \leqq p$, und: $0 = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$, wenn $\mathfrak{b}, \mathfrak{d} \leqq p$, $\mathfrak{a} > p$.

Hieraus sieht man, dass die $\gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$ wirklich den Bedingungen (VII) genügen, wenn man in ihnen nur bis p summirt, dass also die $\gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$ wirklich die Zusammensetzung einer p-gliedrigen Gruppe bilden. Denkt man sich ferner sowohl $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ wie $\lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(t)$ in ihrer canonischen Form, so ergiebt sich aus (III) leicht, dass:

$$(97)\quad \begin{cases} \lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(t) = \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(t_1, t_2, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0) \\ \qquad\qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \leqq p) \\ \text{und:} \\ 0 = \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(t_1, t_2, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0); \\ \qquad\qquad (\mathfrak{a} > p,\ \mathfrak{b} \leqq p) \end{cases}$$

denn haben die Indices $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m$ nur die Zahlen von 1 bis p zu durchlaufen, so fallen von selbst diejenigen Glieder fort, für welche $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_{m-1}$ einen der Werthe $p+1, p+2, \ldots, r$ hat. Hieraus ergiebt sich auf Grund des Satzes 5, dass:

$$(98)\quad \begin{cases} x_{\mathfrak{a}}(t, t) = \varphi_{\mathfrak{a}}(t_1, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0;\ s_1, \ldots, s_p, 0, \ldots, 0) \\ \qquad\qquad (\mathfrak{a} \leqq p) \\ \text{und:} \\ 0 = \varphi_{\mathfrak{a}}(t_1, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0;\ s_1, \ldots, s_p, 0, \ldots, 0). \\ \qquad\qquad (\mathfrak{a} > p) \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $a_{\mathfrak{a}}(t) = t_{\mathfrak{a}}$, wenn $\mathfrak{a} \leqq p$, und $= 0$, wenn $\mathfrak{a} > p$. In dem zuerst angenommenen allgemeinen Falle sind daher die $a_{\mathfrak{a}}(t)$ homogene lineare Functionen, deren Coefficienten $a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}$ den Bedingungen zu genügen haben, die sich aus (93) ergeben; dieselben stellen sich dar in der Form einer Reihe von Determinanten, die von den $\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$ frei sind, sodass das Problem der Bestimmung aller Untergruppen

einer gegebenen Gruppe auf algebraische Untersuchungen hinauskommt*). Aus (98) geht noch hervor, dass jedem solchen Systeme von Coefficienten $a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ wirklich eine Untergruppe der gegebenen Gruppe entspricht.

Wir erhalten daher das Resultat:

Satz 6. *Ist die Parametergruppe einer Transformationsgruppe in ihrer canonischen Form vorgelegt, so erhält man alle p-gliedrigen Untergruppen derselben, wenn man:*

$$u_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{p} a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} t_{\mathfrak{b}}$$

setzt, wo die $a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ so zu wählen sind, dass die Gleichungen:

$$\text{(XII)} \qquad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{p} a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{d}} \gamma_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{d}} = \sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{e}=1}^{r} a_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{d}} a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{e}} c_{\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}}^{\mathfrak{a}}$$

$$(\mathfrak{b},\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, p)$$

durch geeignete $\gamma_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{d}}$ befriedigt werden können.

§ 6.

Bestimmung der Componenten der infinitesimalen Transformationen aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung.

Unter einer transitiven Gruppe verstehen wir eine solche, welche einen Punkt allgemeiner Lage in jeden benachbarten überführt, woraus folgt, dass dann $n \leq r$ sein muss. Ist der Punkt $x_{\mathfrak{a}} = 0$ ein solcher Punkt allgemeiner Lage, so folgt weiter, dass nicht alle n-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\| \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) \|$$

verschwinden dürfen. Hieraus folgt, dass man immer solche Parameter einführen kann, dass:

$$\text{(99)} \qquad \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Führen wir nämlich die neuen Parameter durch die Gleichungen (94) ein, so gehen die $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ über in:

$$\text{(100)} \qquad \left(\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x; u)}{\partial s_{\mathfrak{c}}}\right)_{s=0} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)\, a_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}.$$

Setzen wir daher $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = b_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$, so ergeben sich für die $a_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ die Bedingungen:

*) S. Transf. Theorem 33, S. 210.

$$(101)\qquad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{d}} a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}, \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n \\ \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

welche unter der oben gemachten Voraussetzung stets erfüllt werden können; nehmen wir z. B. an, dass die Determinante

$$|b_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}| \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, n)$$

von Null verschieden ist, so können wir die Grössen $a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}$, wo $\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, r$ und $\mathfrak{d} = n+1, n+2, \ldots, r$, noch insoweit willkürlich annehmen, dass nicht alle $(r-n)$-gliedrigen Determinanten der betreffenden Matrix $\| a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}} \|$ verschwinden, und es werden dann die übrigen $a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}$ dadurch so bestimmt sein, dass die Determinante des Systems (94) nicht verschwindet. Denn resultirte eine verschwindende Determinante $|a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}|$, so müssten entweder alle $b_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ oder alle $\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$ verschwinden, was ausgeschlossen. Wir können uns daher die Parameter immer so gewählt denken, dass die Gleichungen (99) erfüllt sind.

Soll nunmehr die Zusammensetzung unserer Gruppe, d. h. sollen die Grössen $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ gegeben sein, so folgt aus den Differentialgleichungen (IV):

$$(102)\qquad \begin{cases} c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = \dfrac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial x_{\mathfrak{b}_1}} - \dfrac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(0)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} & (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \leqq n), \\[2ex] c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}} = \dfrac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(0)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} & (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \leqq n, \mathfrak{b}_1 > n), \\[2ex] c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}} = 0. & (\mathfrak{a} \leqq n, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 > n). \end{cases}$$

Die letzten Gleichungen besagen offenbar, dass unsere Gruppe eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe enthalten muss. Enthält umgekehrt die Gruppe eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe, so müssen sich nach dem letzten Paragraphen die $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}$ immer in eine solche Form setzen lassen, dass $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}} = 0$, falls $\mathfrak{a} \leqq n$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 > n$; die aus den Gleichungen (XII) durch Ausdehnung der Summation über $\mathfrak{d}$ von 1 bis r entstehenden Gleichungen dienen dazu.

Um nun das System (IV) zu integriren, setzen wir wieder:

$$(103)\qquad \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\, C_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m}^{\mathfrak{a}}\, x_{\mathfrak{b}_1} x_{\mathfrak{b}_2} \cdots x_{\mathfrak{b}_m};$$

$$\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, n\}$$

dann ergiebt sich zunächst:

$$(104)\qquad \begin{cases} C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} - C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}, & (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \leqq n) \\ \qquad\quad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}. & (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1 \leqq n, \mathfrak{b} > n) \end{cases}$$

Ferner:

$$(105)\qquad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} - C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{1}{(m-p-1)!\,p!} \Big\{ C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}$$

$$- C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}} \Big\},$$

$$\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \ldots, m\}$$

wenn $\mathfrak{b} \leqq n$, und:

$$(106)\qquad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{1}{(m-p-1)!\,p!} \Big\{ C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}$$

$$- C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}} \Big\},$$

$$\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \ldots, m\}$$

wenn $\mathfrak{b} > n$, endlich:

$$(107)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=n+1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m}$$

$$=\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{1}{(m-p-1)!\,p!} \Big\{ C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}$$

$$- C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}} \Big\},$$

$$\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \ldots, m\}$$

wenn $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1 > n$. Es lässt sich nun genau wie im dritten Paragraphen zeigen, dass die Gleichungen (VII) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das widerspruchslose Bestehen dieser Gleichungen sind. Bezeichnet man nämlich mit $v^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}(x)$ die linke Seite von (IV), so ergeben sich als solche Bedingungen wieder die, dass die Gleichungen:

$$(108)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial \xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\, v^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}(x) + \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_1}\, v^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}(x) = 0$$

identisch befriedigt sind, und zwar hat das Verschwinden der Coefficienten aller Glieder $(l-2)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension das wider-

spruchslose Bestehen der Gleichungen (105) bis (107) für alle m von 1 bis l zur Folge, und umgekehrt. Da man aber dann die $C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m}$ so bestimmen kann, dass in (IV) die Coefficienten aller Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension verschwinden, so gilt dasselbe für die Gleichungen (108), also bestehen die Gleichungen (105) bis (107) auch widerspruchslos für $m = l + 1$.

Nimmt man in der That an, man kenne alle $C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m}$, wenn m alle Werthe von 1 bis l hat, so lehren die Gleichungen (106) diese selben Grössen für $m = l + 1$ und $\mathfrak{b} > n$ kennen, während die Gleichungen (105) die Differenzen derselben für $m = l + 1$ und $\mathfrak{b} \leqq n$ liefern.

Diese Grössen werden also wiederum vollständig bekannt sein, wenn wir noch festsetzen, dass:

$$(109)\quad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m} + C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_m,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\dots\mathfrak{b}_{m-1}} + \cdots + C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\dots\mathfrak{b}_m\mathfrak{b}} = 0. \qquad (\mathfrak{b} \leqq n)$$

Wir erhalten dann wieder die folgenden Recursionsformeln:

$$(110)\quad (m+1)\,C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-1)!}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1},\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_3}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \dots, m\}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{1}{(m-p)!\,p!}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p+1}}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}},$$

$$\{p = 1, 2, \dots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \dots m\}$$

wenn $\mathfrak{b} \leqq n$, und:

$$(111)\quad m\,C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-1)!}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1},\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_3}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \dots, m\}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c}=1} \frac{1}{(m-p)!\,p!}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p+1}}\dots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}},$$

$$\{p = 1, 2, \dots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \dots, m\}$$

wenn $\mathfrak{b} > n$. Hieraus lassen sich die Coefficienten $C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\dots\mathfrak{b}_m}$ vollständig bestimmen. Man findet so:

$$(112)\quad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = \frac{1}{2}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} \quad \text{oder} \quad = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}},$$

je nachdem $\mathfrak{b} \leqq n$ oder $> n$; ferner:

$$(113)\quad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} = \frac{1}{12}\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n}\left(c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_1}\right) + \frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{c}=n+1}^{r}\left(c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_1}\right),$$

wenn $\mathfrak{b} \leqq n$, und:

(114) $$C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c}=n+1}^{r}\left(c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2}c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_1}\right),$$

wenn $\mathfrak{b} > n$. Man erhält so den Formeln (54) durchaus gleichgebildete Ausdrücke für die $C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}$ mit dem einzigen Unterschiede, dass die dort stehende einzige Summe durch mehrere mit verschiedenen Coefficienten λ_m behaftete Summen zu ersetzen ist, die sich ihrerseits von einander dadurch unterscheiden, dass in den verschiedenen Summen über einige der Indices $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_{m-1}$ von 1 bis n über die andern von $n+1$ bis r zu summiren ist. Die vollständige Entwickelung dieser Ausdrücke ist zu complicirt, als dass sie mehr liefern könnte als die Recursionsformeln (110) und (111). Wir verzichten daher auf diese Entwickelung, zumal wir die Convergenz unserer Reihe auch ohne dieselbe beweisen können.

Ersetzen wir nämlich die Grössen $c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ wieder durch die positive Grösse g, wo $|c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}| \leqq g$, so ist leicht zu sehen, dass für $m = 1$ und 2:

(115) $$\left|C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}\right| \leqq g^m r^{m-1} m!.$$

Nehmen wir daher an, diese Ungleichung sei für alle m von 1 bis $l-1$ bewiesen, so folgt aus (110) für $\mathfrak{b} \leqq n$

(116) $$\left|C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_l}\right| \leqq \frac{1}{l+1} g^l r^{l-1}\Big(l(l-1)! + l_1(l-1)! + l_2(l-2)!\,2! + l_3(l-3)!\,3! + \cdots + l_{l-2}2!\,(l-2)! + l_{l-1}(l-1)!\Big),$$

wo $l_1, l_2, \ldots, l_{l-1}$ die Binomialcoefficienten; dieselbe Formel erhält man aus (111) für $\mathfrak{b} > n$, nur dass rechts der Nenner l steht. Es gilt also die Ungleichung (115) auch für $m = l$. Hieraus folgt wiederum, dass:

(117) $$|\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)| \leqq 1 + \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty}(gr)^m(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^m,$$

sodass unsere Reihen sicher convergiren, so lange:

(118) $$|x_1| + |x_2| + \cdots |x_n| < \frac{1}{rg}.$$

Um nun festzustellen, ob die so gefundenen Componenten $\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ der infinitesimalen Transformationen wirklich eine r-gliedrige Gruppe bestimmen, müssen wir noch untersuchen, ob Relationen von der Form (VI) bestehen können. Aus (99) ergiebt sich nun, dass dann sicher

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

sein muss. Es frägt sich also, ob die folgenden Relationen bestehen können:

$$\sum_{\mathfrak{b}=n+1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = 0; \tag{119}$$

hieraus folgt im Besonderen:

$$\sum_{\mathfrak{b}=n+1}^{r} a_{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} = 0, \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1 = 1, 2, \ldots, n). \tag{120}$$

Nach (106) müsste demnach sein:

$$\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}=n+1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m} = 0, \tag{121}$$

woraus wieder im Besonderen folgt:

$$\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}=n+1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}} = 0. \tag{120}$$

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 = 1, 2, \ldots, n).$$

So weiter schliessend findet man, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Relationen (119) die Gleichungen sind:

$$\sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}_1,\ldots,\mathfrak{d}_m=n+1}^{r} a_{\mathfrak{d}}\, c^{\mathfrak{d}_1}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}_1}\, c^{\mathfrak{d}_2}_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_2} \cdots c^{\mathfrak{d}_{m-1}}_{\mathfrak{d}_{m-2},\mathfrak{b}_{m-1}}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d}_{m-1},\mathfrak{b}_m} = 0. \tag{121}$$

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, n).$$

Nur also, wenn es Grössen $a_{\mathfrak{b}}$ giebt, welche alle diese unendlich vielen Gleichungen befriedigen, hängt unsere Gruppe von weniger als r Parametern ab. Man wolle bemerken, dass die letzten Entwickelungen unabhängig von dem Bestehen der Gleichungen (109) sind, also für alle Lösungssysteme der Differentialgleichungen (IV) gelten, die den Anfangsbedingungen (99) genügen.

Wir erhalten diese allgemeinsten Lösungen wieder aus dem entwickelten speciellen Systeme durch Einführung neuer Veränderlicher vermittelst der Gleichungen:

$$z_{\mathfrak{a}} = h_{\mathfrak{a}}(x), \quad x_{\mathfrak{a}} = H_{\mathfrak{a}}(z), \tag{122}$$

wo:

$$h_{\mathfrak{a}}(0) = 0$$

und

$$\frac{\partial h_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}};$$

dieselben sind:

(123)
$$\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial h_{\mathfrak{a}}(H(z))}{\partial H_{\mathfrak{c}}(z)} \, \xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}\big(H(z)\big).$$

Wir brauchen diese mit den Entwickelungen auf S. 176 und 177 fast identischen Schlüsse nicht besonders auszuführen. Führt man endlich hierin vermittelst einer linearen Substitution neue Veränderliche ein, so erhält man die Componenten der infinitesimalen Transformationen der allgemeinsten transitiven r-gliedrigen Transformationsgruppe des Raumes von n Dimensionen von gegebener Zusammensetzung $(c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})$ und gegebener Zurückführung dieser Grössen auf die den letzten der Gleichungen (102) entsprechende Form.

Wir können die Resultate dieses Paragraphen in folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 7. *Ist ein System von Constanten $\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ gegeben, welche den Gleichungen:*

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left(\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} \gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}} + \gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2} \gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} + \gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}} \gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}}\right) = 0$$

genügen, so findet man folgendermassen die Componenten der infinitesimalen Transformationen der allgemeinsten zugehörigen transitiven, r-gliedrigen Transformationsgruppe des Raumes von n Dimensionen: Nachdem man die Constanten $\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ auf jede mögliche Art mit Hülfe der Substitution:

(XIII)
$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} a^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a}} \, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}=1}^{r} a^{\mathfrak{d}}_{\mathfrak{c}} \, a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{e}} \, \gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e},\mathfrak{c}},$$

wo die Determinante $|a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}|$ von Null verschieden sein muss, auf eine solche Form gebracht hat, dass erstens $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = 0$, sobald $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} > n$ und $\mathfrak{c} \leq n$, und zweitens nicht solche von Null verschiedene Grössen $a_{\mathfrak{d}}$ gefunden werden können, dass die sämmtlichen Gleichungen:

(XIV)
$$\sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2,\ldots,\mathfrak{d}_m=n+1}^{r} a_{\mathfrak{d}} \, c^{\mathfrak{d}_1}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}_1} \, c^{\mathfrak{d}_2}_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_2} \cdots c^{\mathfrak{d}_{m-1}}_{\mathfrak{d}_{m-2},\mathfrak{b}_{m-1}} \, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d}_{m-1},\mathfrak{b}_m} = 0,$$

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, n)$$

wenn m alle Werthe von 1 bis ∞ hat, erfüllt werden können, nachdem man ferner die Coefficienten der in der Nähe des Nullpunktes convergenten Reihen:

$$\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} C_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}^{\mathfrak{a}} x_{\mathfrak{b}_1} x_{\mathfrak{b}_2} \cdots x_{\mathfrak{b}_m}$$

$$\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, n\}$$

den Anfangsbedingungen (112) *und den Recursionsformeln* (110) *und* (111) *gemäss bestimmt hat, sodass:*

$$\text{(XV)} \qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} x_{\mathfrak{b}} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = x_{\mathfrak{a}}, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n),$$

so wähle man irgend eine Transformation

$$x_{\mathfrak{a}} = H_{\mathfrak{a}}(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

deren Umkehrung $z_{\mathfrak{a}} = h_{\mathfrak{a}}(x)$; *alsdann sind die:*

$$\text{(XVI)} \qquad \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(z) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial h_{\mathfrak{a}}(H(z))}{\partial H_{\mathfrak{c}}(z)} \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}\big(H(z)\big) \qquad \left\{\begin{matrix} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n \\ \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r \end{matrix}\right\}$$

*die verlangten Componenten.**)

Die Bestimmung aller r-gliedrigen *intransitiven* Transformationsgruppen des Raumes von n Dimensionen von gegebener Zusammensetzung $(c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}})$ kann auf die der transitiven Gruppen zurückgeführt werden. Sie verlangt aber dann die Kenntniss nicht nur des gegebenen Systems von Constanten $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$, sondern aller solcher Systeme, welche die Gleichungen (VII) befriedigen; wir glauben desshalb auf dies Problem hier noch nicht eingehen zu dürfen.

§ 7.

Ueber die identische Transformation.

Wir haben bisher immer nur solche Transformationsgruppen betrachtet, welche die identische Transformation enthalten; in der That lässt sich der allgemeinere Fall auf diesen zurückführen. Haben wir nämlich die durch die Gleichung:

$$(124) \qquad f_{\mathfrak{a}}\big(f(x; u); v\big) = f_{\mathfrak{a}}\big(x; \varphi(u; v)\big)$$

charakterisirte Gruppe, so mögen die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x; u)$ und $\varphi_{\mathfrak{b}}(u; v)$

---

*) Vergl. Transf. Kap. 19 und 22; man wolle aber bemerken, dass bei Herrn Lie die Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung immer nur gelöst ist unter der Voraussetzung, dass *eine* solche Gruppe bekannt sei. Was die Theorie der Aehnlichkeit r-gliedriger Gruppen betrifft, so sei darauf hingewiesen, dass unser Satz den Satz 3 in Transf. S. 359 umfasst.

etwa zunächst für gewisse Umgebungen (x), (u), (v) von resp. $x_\mathfrak{a} = 0$, $u_\mathfrak{b} = 0$, $v_\mathfrak{c} = 0$ sich nach Potenzen der $x_\mathfrak{a}$, $u_\mathfrak{b}$, $v_\mathfrak{c}$ entwickeln lassen. Wenn dann die Transformation:

$$(125) \qquad y_\mathfrak{a} = f_\mathfrak{a}(x; 0) = f_\mathfrak{a}(x)$$

als den dem Bereiche (x) entsprechenden Bereich keinen in diesen hineinfallenden Bereich (y) liefert, so müssen, sollen die Gleichungen (124) überhaupt Bedeutung haben, die nach Potenzen von

$$y_\mathfrak{a} - b_\mathfrak{a} = y_\mathfrak{a} - f_\mathfrak{a}(0)$$

fortschreitenden Reihen $f_\mathfrak{a}(y; u)$ jedenfalls analytische Fortsetzungen der um den Nullpunkt convergenten Reihen $f_\mathfrak{a}(x; u)$ sein. Liegen auch die Punkte des dem Bereiche (u) auf Grund der Gleichung:

$$(126) \qquad s_\mathfrak{b} = \varphi_\mathfrak{b}(u; 0) = \varphi_\mathfrak{b}(u)$$

entsprechenden Bereiches (s) nicht in (u), so müssen auch die nach Potenzen von $s_\mathfrak{b} - c_\mathfrak{b} = s_\mathfrak{b} - \varphi_\mathfrak{b}(0)$ fortschreitenden Reihen $f_\mathfrak{a}(x; s)$ und $\varphi_\mathfrak{b}(s; v)$ analytische Fortsetzungen der in der Nähe der Nullpunkte convergenten Reihen $f_\mathfrak{a}(x; u)$ und $\varphi_\mathfrak{a}(u; v)$ sein.

Wir machen weiter die Annahme, die man durch Einführung neuer Parameter wird realisiren können, dass die Gleichungen (125) umkehrbar seien, also:

$$(127) \qquad x_\mathfrak{a} = F_\mathfrak{a}(y);$$

nehmen wir im Besonderen noch an, dass diese Umkehrung in der Nähe des Nullpunktes $x_\mathfrak{a} = 0$ möglich sei, so werden die $F_\mathfrak{a}(y)$ zunächst als nach Potenzen der $y_\mathfrak{a} - b_\mathfrak{a}$ fortschreitende Reihen definirt sein, die sich aber auch in nach Potenzen von $y_\mathfrak{a} - f_\mathfrak{a}(b')$ fortschreitende Reihen müssen fortsetzen lassen, wo die Stelle $b_\mathfrak{a}'$ in beliebiger Nähe von $b_\mathfrak{a}$ liegt. Setzen wir daher:

$$(128) \qquad f_\mathfrak{a}(x; u) = f_\mathfrak{a}\big(F(y); u\big) = g_\mathfrak{a}(y; u) = g_\mathfrak{a}\big(f(x); u\big),$$

so gilt dasselbe von den Functionen $g_\mathfrak{a}(y; u)$ bezüglich der $y_\mathfrak{b}$; was die $u_\mathfrak{b}$ betrifft, so sind die $g_\mathfrak{a}(y; u)$ zunächst ebenso wie die $f_\mathfrak{a}(x; u)$ als nach Potenzen der $u_\mathfrak{b}$ fortschreitende Reihen definirt, die sich aber in nach Potenzen der $s_\mathfrak{b} - c_\mathfrak{b}$ fortschreitende Reihen fortsetzen lassen.

Aus (124) folgt nun zunächst für $v = 0$:

$$(129) \qquad f_\mathfrak{a}\big(f(x; 0)\big) = f_\mathfrak{a}(x; s) = g_\mathfrak{a}(y; s);$$

es ist daher:

$$(130) \qquad f_\mathfrak{a}\big(f(x; u); v\big) = g_\mathfrak{a}\Big(f\big(f(x; u)\big); v\Big) = g_\mathfrak{a}\big(g(y; s); v\big).$$

Andrerseits ist:

$$(131) \qquad f_\mathfrak{a}\big(x; \varphi(u; v)\big) = g_\mathfrak{a}\big(y; \varphi(u; v)\big) \qquad = g_\mathfrak{a}\big(y; \psi(s; v)\big).$$

wenn:

(132) $$u_\mathfrak{b} = \Phi_\mathfrak{b}(s)$$

und:

(133) $$\varphi_\mathfrak{b}(u;v) = \varphi_\mathfrak{b}\bigl(\Phi(s);\,v\bigr) = \psi_\mathfrak{b}(s;v)$$

gesetzt wird; denn durch Einführung der neuen Parameter können wir auch die Umkehrbarkeit der Gleichungen (126) erreichen. Wir erhalten daher die Gleichungen:

(134) $$g_\mathfrak{a}\bigl(g(y;s);\,v\bigr) = g_\mathfrak{a}\bigl(y;\,\psi(c;v)\bigr);$$

dieselben sind zunächst bewiesen, so lange als die $y_\mathfrak{a}$ in der Nähe von $b_\mathfrak{a}$, die $s_\mathfrak{b}$ in der Nähe von $c_\mathfrak{b}$ und die $v_\mathfrak{b}$ in der Nähe von Null liegen. Nun ist aber die linke Seite jener Gleichungen auch definirt, wenn die $y_\mathfrak{a}$ in der Nähe von $b_\mathfrak{a}$, die $s_\mathfrak{b}$ und $v_\mathfrak{b}$ in der Nähe von Null liegen und zwar durch die Fortsetzung obiger nach Potenzen der $s_\mathfrak{b} - c_\mathfrak{b}$ fortschreitenden Reihen; dasselbe gilt daher von der ihr jedesmal gleichen rechten Seite. Denn denkt man sich die Fortsetzung links und rechts für einen geeigneten Punkt $s_\mathfrak{b} = d_\mathfrak{b}$ des ursprünglichen Bereiches in in der Nähe von $s_\mathfrak{b} = c_\mathfrak{b}$ gemacht so, dass die linke Seite über diesen Bereich hinaus convergirt, so gilt dasselbe von der rechten Seite, da die Coefficienten der einzelnen Potenzen der $s_\mathfrak{b} - d_\mathfrak{b}$ auf der linken und rechten Seite unabhängig von den $s_\mathfrak{b}$ einander gleich sind.

Es ist demnach durch die Gleichungen (128), (133) und (134) eine Gruppe charakterisirt, welche die identische Transformation enthält; denn aus (128) folgt sofort:

(135) $$g_\mathfrak{a}(y;0) = f_\mathfrak{a}(x;0) = y_\mathfrak{a}.$$

Wir erhalten daher jede Transformation der ursprünglichen Gruppe, wenn wir erst die Transformation (125) und dann eine Transformation:

(136) $$y_\mathfrak{a}' = g_\mathfrak{a}(y;u)$$

der von uns behandelten Art von Gruppen ausführen. Was nun die Transformation (125) betrifft, so folgt aus (130) leicht, dass:

(137) $$f_\mathfrak{a}(y) = g_\mathfrak{a}(y;c),$$

dass diese Transformation also die analytische Fortsetzung einer Transformation der Gruppe (136) ist. Es ist also auch jede Transformation der ursprünglichen Gruppe eine analytische Fortsetzung einer Transformation dieser Gruppe. In der That ist:

(138) $$g_\mathfrak{a}\bigl(g(y;c);\,v\bigr) = g_\mathfrak{a}\bigl(y;\,\psi(c;v)\bigr) = f_\mathfrak{a}\bigl(x;\,\psi(c;v)\bigr) = f_\mathfrak{a}\bigl(x;\,\varphi(0;v)\bigr)$$
$$= f_\mathfrak{a}\bigl(f(x;0);\,v\bigr) = f_\mathfrak{a}(y;v),$$

oder:

(139) $$f_\mathfrak{a}(y;v) = g_\mathfrak{a}\bigl(y;\,\psi(c;v)\bigr).$$

Diese Gleichung zeigt uns nun auch, wie die identische Transformation, welche eigentlich jede endliche Transformationsgruppe enthält, bei einer

bestimmten analytischen Darstellung derselben gewissermassen latent werden kann: Man führe in die Gruppe $y_a' = g_a(y; u)$ durch die Gleichungen $u_b = \psi_b(c; v)$ neue Parameter ein; geht $g_a(y; u)$ hierdurch in $f_a(y; v)$ über, so ist es sehr wohl möglich, dass diese nach Potenzen von v_b fortschreitenden Reihen nicht in denjenigen Punkt $v_b = c_b'$ fortsetzbar sind, welcher durch die Gleichungen $\psi_b(c; c') = 0$ bestimmt ist. Ist dem wirklich so, so enthält die durch die Functionenelemente $y_a' = f_a(y; v)$ definirte Transformationsgruppe die identische Transformation nicht, sie kann aber durch Einführung geeigneter Parameter immer in eine solche mit der identischen Transformation übergeführt werden. Wir erhalten demnach das Resultat:

Satz 8. *Jede endliche Transformationsgruppe, welche im Bereiche der Fortsetzungen der sie definirenden Functionenelemente die identische Transformation nicht enthält, kann durch Einführung geeigneter Parameter in eine die identische Transformation enthaltende Gruppe übergeführt werden.**)

Hiermit ist auch die Berechtigung der von uns in § 5 gemachten Annahme nachgewiesen, dass jede Untergruppe die identische Transformation enthalte.

Dorpat, im April 1889.

*) Vergl. Transf. Theorem 26, S. 163.

Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung.

Nach Vorlesungen von F. Klein.

ausgearbeitet von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

Die folgenden Entwickelungen knüpfen an Vorlesungen an, welche Herr F. Klein im Wintersemester 1887/88 in Göttingen gehalten hat.

Dieselben verfolgen in erster Linie den Zweck, eine Reihe von Gesichtspunkten, welche sich für die Theorie der elliptischen Functionen als fruchtbringend erwiesen haben, auf die hyperelliptischen Functionen I. Ordnung zu übertragen. Es wird daher, nach einer Einleitung, welche eine Reihe von Begriffen aus der Theorie der Integrale recapitulirt, zunächst eine gewisse Classification hyperelliptischer Functionen gegeben, welche sich enge an die entsprechende Classification („Stufeneintheilung") der elliptischen Functionen anschliesst; es folgen dann Anwendungen der entwickelten Principien auf speciellere Probleme, insbesondere auf die der Theilung und der Transformation. Dabei ist vor allem Gewicht darauf gelegt worden, die leitenden Gesichtspunkte in volle Beleuchtung zu rücken; Ausführung von Einzelheiten bleibt anderen Arbeiten überlassen, für welche durch diese „Grundzüge" der Boden geebnet sein soll.

Nach einer bestimmten Seite hin bieten, wie sogleich an dieser Stelle hervorgehoben sei, diese Entwickelungen in so fern eine Lücke dar, als darauf verzichtet wurde, das wesentlichste Hilfsmittel specieller Theorien, nämlich die *Thetafunctionen,* in die Systematik einzuordnen: eine Einordnung, die zwar durchaus zur Vollendung der Systematik erforderlich, aber mit eigenthümlichen Schwierigkeiten verbunden zu sein scheint, so dass dieselbe einstweilen zurückgestellt werden musste. —

Der Herausgeber hat sich bei aller Freiheit, die er sich in der Durchführung der Einzelheiten gestatten zu sollen glaubte, vor allem bestrebt, die Ausführungen seines hochverdienten Lehrers möglichst getreu ihrem Inhalte nach wiederzugeben. Dabei hatte er sich vielfach

der Unterstützung desselben zu erfreuen, wofür ihm auch an dieser Stelle verbindlichsten Dank auszusprechen gestattet sei.*)

Einleitung.

Vorbegriffe aus der Theorie der hyperelliptischen Integrale.

§ 1.

Das zu Grunde gelegte algebraische Gebilde und die zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit 6 Verzweigungspunkten.

Jedes algebraische Gebilde vom Geschlechte $p = 2$ (jedes hyperelliptische Gebilde I. Ordnung) kann bekanntlich durch umkehrbar eindeutige Transformation bezogen werden auf eine *doppelt überdeckte Gerade* mit 6 Verzweigungspunkten (sommets). Die Hinzunahme der complexen Stellen des Gebildes bedingt die Erweiterung der Geraden zur *zweiblättrigen Riemann'schen Fläche*, deren Blätter dann ebenfalls in 6 Verzweigungspunkten mit einander zusammenhängen. Diese Fläche, bezw. die doppelt überdeckte Gerade, aus welcher sie hervorgegangen, erscheint sonach als *die canonische Form des hyperelliptischen Gebildes;* an sie sollen alle folgenden Entwickelungen anknüpfen.

Die einzelnen Punkte der Geraden sollen von einander unterschieden werden durch Einführung von homogenen binären Coordinaten:

$$x_1 : x_2;$$

von *homogenen* Coordinaten, indem die denselben zu Grunde liegende *projective* Vorstellungsweise die ganze Darstellung beherrschen soll. Ueber die Auswahl der Fundamentalpunkte dieser Coordinatenbestimmung soll keinerlei specielle Voraussetzung getroffen werden, vielmehr sollen alle allgemeinen Untersuchungen unter der Voraussetzung ganz willkürlicher Lage dieser Punkte geführt werden. Dadurch bleibt zugleich die Freiheit gewahrt, falls die Natur eines zu behandelnden speciellen Problems etwa eine besondere Wahl derselben als zweckmässig erscheinen lassen sollte, solchen Gründen der Zweckmässigkeit in jedem einzelnen Falle nachzugeben.

---

*) Indem die Ausarbeitung des Herrn Burkhardt in den Annalen zum Abdruck gelangt, darf ich nicht unterlassen, von mir aus ausdrücklich hervorzuheben, wie viel Arbeit von seiner Seite in derselben enthalten ist. In der That hatte Herr Burkhardt nicht nur den in meiner Vorlesung gegebenen Stoff zu sichten, neu anzuordnen und in druckfertige Form zu bringen, sondern er hatte auch manche Punkte, betreffs deren ich mich auf blosse Andeutungen beschränkte, tiefer zu ergründen und selbständig klarzulegen. So finden sich in den folgenden Paragraphen verschiedentlich über meine Vorlesungen hinausgehende Entwickelungen; ich nenne in dieser Hinsicht insbesondere Stücke der §§ 8, 23, 24, 40, 52, 54.

F. Klein.

Ebenso wird ein etwa wünschenswerther Uebergang zu unhomogener Schreibweise durch die Substitution

$$x = x_1 : x_2$$

in jedem Falle ohne Schwierigkeit erfolgen können.

Die ebenfalls homogenen Coordinaten der 6 Verzweigungspunkte seien mit:

$$\alpha_1^0 : \alpha_2^0, \quad \alpha_1^1 : \alpha_2^1, \quad \alpha_1^2 : \alpha_2^2, \quad \alpha_1^3 : \alpha_2^3, \quad \alpha_1^4 : \alpha_2^4, \quad \alpha_1^5 : \alpha_2^5$$

bezeichnet, während die entsprechenden oberen Indices 0, 1 ... 5 zugleich als Namen dieser Verzweigungspunkte gebraucht werden mögen. Es sei jedoch im Gegensatz zu sonst üblichen Festsetzungen ausdrücklich hervorgehoben, dass die Vertheilung dieser 6 Indices auf die 6 Verzweigungspunkte als eine durchaus willkürliche — keineswegs etwa durch die Grössenfolge ihrer Coordinaten bedingte — anzusehen ist; vielmehr werden diese Grössen als frei veränderlich zu gelten haben, und *die Untersuchung der Abhängigkeit der auftretenden Functionen auch von ihnen bildet einen wesentlichen Theil des Programms*, dessen Grundzüge hier skizzirt werden sollen. Es werden jedoch dabei diejenigen Fälle stets eine Ausnahmestellung einnehmen und einer besonderen Untersuchung bedürfen, in welchen zwei oder gar mehrere Verzweigungspunkte zusammenfallen. *Wo solche besondere Untersuchung nicht geführt ist, sollen diese Fälle im folgenden stets als stillschweigend ausgeschlossen gelten.*

Die 6 Verzweigungspunkte werden wir im folgenden zunächst nicht als einzeln gegeben voraussetzen, sondern nur durch ihre symmetrischen Functionen, also etwa durch die Coefficienten der Gleichung 6. Grades:

$$(1) \quad f(x_1, x_2) \equiv a_0 x_1^6 + 6 a_1 x_1^5 x_2 + 15 a_2 x_1^4 x_2^2 + 20 a_3 x_1^3 x_2^3 + \cdots + a_6 x_2^6 = 0$$

oder unhomogen geschrieben:

$$f(x) \equiv a_0 x^6 + 6 a_1 x^5 + \cdots + a_6 = 0,$$

deren Wurzeln sie sind.

Es ist dann auch $\sqrt{f(x_1, x_2)}$ eine *eindeutige* Form ($\sqrt{f(x)}$ eine eindeutige Function) auf der Fläche, welche durch ihre Werthe zwei *„conjugirte"* Stellen derselben unterscheidet; und es bestehen die beiden Sätze:

Jede eindeutige algebraische Function einer Stelle der Fläche ist rational darstellbar durch x und $\sqrt{fx}$.

Jede eindeutige algebraische Form einer Stelle der Fläche ist rational und ganz darstellbar durch x_1, x_2, $\sqrt{f(x_1, x_2)}$.

Durch die Werthe von x und $\sqrt{f(x)}$ ist die einzelne Stelle des Gebildes unzweideutig festgelegt.

§ 2.

Die canonischen Querschnittsysteme und die Integrale I. Gattung.

Auf der Riemann'schen Fläche werde nun ein System von $2p = 4$ Querschnitten:

$$A_1, A_2; \quad B_1, B_2,$$

welche die Fläche nicht zerstücken, in folgender Weise gezogen: Die vier Paare von Querschnitten

$$A_1 A_2, \qquad B_1 B_2, \qquad A_1 B_2, \qquad A_2 B_1$$

sollen *keinen* gemeinsamen Punkt besitzen; dagegen sollen A_1 und B_1 sich in einem und nur einem Punkte schneiden, ebenso A_2 und B_2. Der *Sinn* dieser Querschnitte sei wie bei Riemann (ges. W. p. 123) so festgelegt, dass der Querschnitt A_k den Querschnitt B_k „von links nach rechts“, also B_k den A_k „von rechts nach links“ überschreite. Ein Querschnittsystem, welches diesen Bedingungen genügt, soll *canonisch* genannt werden.

Auch hier ist es für die *allgemeinen* Untersuchungen weder erforderlich noch auch nur zweckmässig weitere specielle Voraussetzungen über die Auswahl des zu Grunde gelegten canonischen Querschnittsystems zu machen.

Die Perioden, welche zwei von einander linear unabhängige Integrale erster Gattung, etwa:

$$(2) \qquad w_1 = \int \frac{x_1(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}}, \quad w_2 = \int \frac{x_2(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}}$$

an den Querschnitten eines solchen canonischen Systems (d. h. bei Ueberschreitung derselben) besitzen, sollen mit:

(3)

	A_1	A_2	B_1	B_2
u_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
u_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

bezeichnet werden; dieselben sind bekanntlich nicht von einander unabhängig, sondern durch die bilineare Gleichung:

$$(4) \qquad \omega_{11}\omega_{23} - \omega_{13}\omega_{21} + \omega_{12}\omega_{24} - \omega_{14}\omega_{22} = 0$$

mit einander verknüpft; und ausserdem sind ihre reellen und imaginären Bestandtheile an gewisse Ungleichungen gebunden, deren explicite Aufstellung hier nicht erforderlich ist.

§ 3.

Die Periodendeterminanten, die transcendent-normirten Integrale I. Gattung und die Thetamoduln.

Die Unterdeterminanten der Matrix $\|\omega_{ik}\|$, $i=1,2,\ k=1,2,3,4$, welche mit:

(5) $$p_{ik} = \omega_{1i}\,\omega_{2k} - \omega_{2i}\,\omega_{1k}$$

bezeichnet werden sollen, sind endlich und von Null verschieden, solange die Verzweigungspunkte alle von einander verschieden sind; das folgt daraus, dass es sonst nicht möglich sein würde, Integrale I. Gattung mit vorgeschriebenen Perioden am i^{ten} und k^{ten} Querschnitt zu bilden, die doch einem Riemann'schen Existenztheorem zu Folge existiren müssen.*) Es wird daher auch insbesondere möglich sein *„Normalintegrale I. Gattung"*

$$v_1,\ v_2$$

zu bilden, welche an den Querschnitten I. Art A beziehungsweise die Perioden:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

besitzen, während ihre Perioden an den Querschnitten II. Art B mit:

$$\begin{matrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{matrix}$$

bezeichnet und ihrer hauptsächlichen Verwendung wegen *„Thetamoduln"* genannt werden. Zwischen diesen neuen Grössen und den bereits eingeführten bestehen dann die Beziehungen:

(6) $$w_1 = \omega_{11} v_1 + \omega_{12} v_2, \quad w_2 = \omega_{21} v_1 + \omega_{22} v_2,$$

und umgekehrt:

(7) $$v_1 = \frac{\omega_{22} w_1 - \omega_{12} w_2}{p_{12}}, \quad v_2 = \frac{-\omega_{21} w_1 + \omega_{11} w_2}{p_{12}}$$

ferner:

(8) $$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{p_{32}}{p_{12}}, & \tau_{12} &= \frac{p_{42}}{p_{12}}, \\ \tau_{21} &= \frac{p_{13}}{p_{12}}, & \tau_{22} &= \frac{p_{14}}{p_{12}}, \end{aligned}$$
$$\mathfrak{t} = \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 = \frac{p_{34}}{p_{12}}.$$

*) Wegen des Beweises dieses Existenztheorems vgl. man den Math. Ann. Bd. 21, p. 157 abgedruckten Brief von Herrn H. A. Schwarz an Herrn F. Klein und die daran anknüpfenden Noten des Herrn Ascoli, Ist. Lomb. Rendic. ser. 2, t. 18, sowie die 2. Auflage des Werkes von Herrn C. Neumann über Abel'sche Functionen.

Die Bilinearrelation $p_{13} + p_{24} = 0$ (Gl. 4) geht damit über in:

$$\tau_{12} = \tau_{21}, \tag{9}$$

während die § 2 a. E. erwähnten Ungleichungen sich dahin zusammenfassen, dass die binäre quadratische Form:

$$b_{11} m_1^2 + 2 b_{12} m_1 m_2 + b_{22} m_2^2, \tag{10}$$

deren Coefficienten b_{ik} die imaginären Bestandtheile der τ_{ik} sind, *definit und positiv* sein muss. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hiefür sind bekanntlich:

$$\begin{aligned} b_{11} &> 0, \\ b_{11} b_{22} - b_{12}^2 &> 0 \end{aligned} \tag{11}$$

(also auch $b_{22} > 0$).

§ 4.

Uebergang von einem canonischen Querschnittsystem zu einem andern; Abel'sche Substitutionen.

Die in § 2 eingeführten Perioden waren definirt unter Zugrundelegung eines ganz bestimmten, wenn auch willkürlichen canonischen Querschnittsystems. Wird dasselbe durch ein anderes ersetzt, so treten an die Stelle der ω andere Perioden, die mit ω' bezeichnet werden sollen. Da aber unsere Integrale keine von den ω unabhängigen Perioden besitzen, so werden*) diese neuen Perioden lineare Functionen der alten mit ganzzahligen Coefficienten sein, welche folgendermassen geschrieben werden mögen:

$$\begin{aligned} \omega'_{i1} &= a_1 \omega_{i1} + a_2 \omega_{i2} + a_3 \omega_{i3} + a_4 \omega_{i4}, \\ \omega'_{i2} &= b_1 \omega_{i1} + b_2 \omega_{i2} + b_3 \omega_{i3} + b_4 \omega_{i4}, \\ \omega'_{i3} &= c_1 \omega_{i1} + c_2 \omega_{i2} + c_3 \omega_{i3} + c_4 \omega_{i4}, \\ \omega'_{i4} &= d_1 \omega_{i1} + d_2 \omega_{i2} + d_3 \omega_{i3} + d_4 \omega_{i4}, \end{aligned} \tag{12}$$

Da die Relation (4) auch von den neuen Perioden erfüllt werden muss, und da auch die alten Perioden ganzzahlige Functionen der neuen sein müssen, so müssen**) zwischen den Coefficienten der Substitution (12) sechs Relationen bestehen, welche kurz:

$$\begin{aligned} &[a, b] = 0, \quad [a, c] = 1,^{***)} \quad [a, d] = 0, \\ &[b, c] = 0, \quad [b, d] = 1,^{***)} \quad [c, d] = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

geschrieben werden sollen, indem zur Abkürzung:

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = [a, b]$$

---

*) Hermite, sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes, § II. (C. R. t. 40, 1855).

**) a. a. O. § 3.

***) Dass hier $+1$ und nicht -1 steht, ist durch die § 2 a. E. erwähnten Ungleichungen bedingt.

gesetzt ist. Damit wird die Auflösung der Substitutionen (12) in der Form erhalten:

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
\omega_{i1} &= c_3\omega'_{i1} + d_3\omega'_{i2} - a_3\omega'_{i3} - b_3\omega'_{i4},\\
\omega_{i2} &= c_4\omega'_{i1} + d_4\omega'_{i2} - a_4\omega'_{i3} - b_4\omega'_{i4},\\
\omega_{i3} &= - c_1\omega'_{i1} - d_1\omega'_{i2} + a_1\omega'_{i3} + b_1\omega'_{i4},\\
\omega_{i4} &= - c_2\omega'_{i1} - d_2\omega'_{i2} + a_2\omega'_{i3} + b_2\omega'_{i4}
\end{aligned}
$$

und den Relationen (13) treten, wenn zur Abkürzung:

$$[1, 2] = a_1c_2 - a_2c_1 + b_1d_2 - b_2d_1$$

gesetzt wird, die folgenden an die Seite:

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
&[1, 2] = 0, \quad [1, 3] = 1, \quad [1, 4] = 0,\\
&[2, 3] = 0, \quad [2, 4] = 1, \quad [3, 4] = 0,
\end{aligned}
$$

welche mit jenen vollständig äquivalent sind.

Eine lineare Substitution, deren Coefficienten den Bedingungen (13) resp. (15) genügen wird nach Herrn C. Jordan*) *„Abel'sche Substitution“* genannt. Wo im folgenden von *linearer Periodentransformation* die Rede ist, soll stets darunter verstanden werden, dass dieselbe durch eine Abel'sche Substitution geschehe.

§ 5.

Lineare Transformation der Normalintegrale und der Thetamoduln.

Zu dem in § 4 eingeführten „neuen“ Querschnittsystem, auf welches sich die gestrichenen Perioden beziehen, gehören auch neue Normalintegrale und Thetamoduln. Zwischen diesen und den „alten“ Normalintegralen und Thetamoduln besteht eine grosse Anzahl von Beziehungen, von welchen in den Anwendungen der allgemeinen Theorie auf specielle Probleme beständig Gebrauch zu machen ist. Da diese Beziehungen von verschiedenen Autoren**) abgeleitet sind, welche sich verschiedener Bezeichnungen bedient haben, so ist eine Zusammenstellung einer Reihe solcher Beziehungen in gleichmässiger Bezeichnungsweise vielleicht nicht überflüssig; es soll daher an dieser Stelle eine solche gegeben werden.

---

*) Traite des subst. p. 171. Uebrigens nennt Herr C. Jordan auch solche Substitutionen „abéliennes“, welche durch Bedingungen charakterisirt sind, in denen rechts statt wie in (13) und (15) eine 1, eine beliebige ganze Zahl k steht.

**) Vgl. z. B. Hermite a. a. O.; Thomae, die allg. Transformation der Θ-Functionen (Diss. Gött. 1864); Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen (Leipzig 1865); Königsberger, Cr. J. Bd. 65, p. 344 ff.; Witting, Ueber eine Configuration im Raume (Diss. Gött. abgedr. in Schlömilch's Zeitschr. 1887); sowie die zusammenfassende Darstellung bei Krause, Die Transformation der hyperell. Fct. I. O. (Leipzig 1886) p. 69 ff.

Die zu den *alten* Querschnitten gehörenden Normalintegrale v besitzen an den Querschnitten des *neuen* Systems Perioden, welche mit:

	A_1'	A_2'	B_1'	B_2'
v_1	A_1	B_1	C_1	D_1
v_2	A_2	B_2	C_2	D_2

bezeichnet werden sollen;*) den Formeln (12) entsprechend ist dann:

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
A_1 &= a_1 + a_3\tau_{11} + a_4\tau_{12}, & A_2 &= a_2 + a_3\tau_{21} + a_4\tau_{22},\\
B_1 &= b_1 + b_3\tau_{11} + b_4\tau_{12}, & B_2 &= b_2 + b_3\tau_{21} + b_4\tau_{22},\\
C_1 &= c_1 + c_3\tau_{11} + c_4\tau_{12}, & C_3 &= c_2 + c_3\tau_{21} + c_4\tau_{22},\\
D_1 &= d_1 + d_3\tau_{11} + d_4\tau_{12}, & D_3 &= d_2 + d_3\tau_{21} + d_4\tau_{22}.
\end{aligned}
$$

Die zu den *neuen* Querschnitten gehörenden Normalintegrale $v_1' v_2'$ besitzen an eben diesen Querschnitten die Perioden:

	A_1'	A_2'	B_1'	B_2'
v_1'	1	0	τ'_{11}	τ'_{12}
v_2'	0	1	τ'_{21}	τ'_{22}

Die Vergleichung der Perioden an den beiden ersten Querschnitten liefert die Ausdrücke der v durch die v':

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
v_1 &= A_1 v_1' + B_1 v_2',\\
v_2 &= A_2 v_1' + B_2 v_2'
\end{aligned}
$$

und mit Hilfe dieser Ausdrücke liefert die Vergleichung der Perioden an den beiden andern Querschnitten die Relationen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetamoduln:

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
C_1 &= A_1\tau'_{11} + B_1\tau'_{21}, & C_2 &= A_2\tau'_{11} + B_2\tau'_{21},\\
D_1 &= A_1\tau'_{12} + B_1\tau'_{22}, & D_2 &= A_2\tau'_{12} + B_2\tau'_{22}.
\end{aligned}
$$

Werden ebenso die Perioden der *neuen* Normalintegrale an den *alten* Querschnitten bezeichnet mit:

$$
(16\mathrm{a})\qquad
\begin{aligned}
III_c &= c_3 - a_3\tau'_1 - b_3\tau'_{12}, & III_d &= d_3 - a_3\tau'_{21} - b_3\tau'_{22},\\
IV_c &= c_4 - a_4\tau'_{11} - b_4\tau'_{12}, & IV_d &= d_4 - a_4\tau'_{21} - b_4\tau'_{22},\\
I_c &= -c_1 + a_1\tau'_{11} + b_1\tau'_{12}, & I_a &= -d_1 + a_1\tau'_{21} + b_1\tau'_{22},\\
II_c &= -c_2 + a_2\tau'_{11} + b_2\tau'_{12}, & II_d &= -d_2 + a_2\tau'_{21} + b_2\tau'_{22}
\end{aligned}
$$

*) Die doppelte Bedeutung der Buchstaben A, B wird nicht stören.

so werden die zu (17) und (18) analogen Relationen erhalten:

$$(17\text{a})\qquad \begin{aligned} v_1' &= III_c v_1 + IV_c v_2, \\ v_2' &= III_d v_1 + IV_d v_2 \end{aligned}$$

und:

$$(18\text{a})\qquad \begin{aligned} I_c &= III_c \tau_{11} + IV_c \tau_{21}, & I_d &= III_d \tau_{11} + IV_d \tau_{21}, \\ II_c &= III_c \tau_{12} + IV_c \tau_{22}, & II_d &= III_d \tau_{12} + IV_d \tau_{22} \end{aligned}$$

Die Relationen (17), (18) und (17a), (18a) enthalten rechts noch die Grössen beider Systeme; durch Elimination können aber aus ihnen andere erhalten werden, welche die Grössen des einen Systems durch die des andern ausdrücken. Um diese Relationen bequem schreiben zu können, mögen die Abkürzungen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} (ab)_{12} &= (a_1 b_2 - a_2 b_1); \\ N &= A_1 B_2 - A_2 B_1 \\ &= (ab)_{12} + (ab)_{32}\tau_{11} + \big((ab)_{13} + (ab)_{42}\big)\tau_{12} + (ab)_{14}\tau_{22} + (ab)_{34}\mathfrak{t}, \\ N' &= III_c IV_d - IV_c III_d \\ &= (cd)_{34} - (ad)_{34}\tau_{11}' + \big(-(bd)_{34} + (ac)_{34}\big)\tau_{12}' + (bc)_{34}\tau_{22}' + (ab)_{34}\mathfrak{t}' \end{aligned}$$

eingeführt werden*); dann wird erhalten:

$$(20)\qquad \begin{aligned} N v_1' &= B_2 v_1 - B_1 v_2, & N v_2' &= -A_2 v_1 + A_1 v_2, \\ N\tau_{11}' &= B_2 C_1 - B_1 C_2, & N\tau_{21}' &= -A_2 C_1 + A_1 C_2, \\ N\tau_{12}' &= B_2 D_1 - B_1 D_2; & N\tau_{22}' &= -A_2 D_1 + A_1 D_2; \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$(20\text{a})\qquad \begin{aligned} N' v_1 &= IV_d v_1' - IV_c v_2', & N' v_2 &= -III_d v_1' + III_c v_2', \\ N'\tau_{11} &= IV_d I_c - IV_c I_d, & N'\tau_{21} &= -III_d I_c + III_c I_d, \\ N'\tau_{12} &= IV_d II_c - IV_c II_d; & N'\tau_{22} &= -III_d II_c + III_c I_d. \end{aligned}$$

Die Vergleichung der Ausdrücke für τ_{12}' und τ_{21}', bezw. τ_{12} und τ_{21} liefert die Bilinearrelationen je für die Normalintegrale des einen und die Querschnitte des andern Systems in der Form:

$$(21)\qquad \begin{aligned} A_1 C_2 - A_2 C_1 + B_1 D_2 - B_2 D_1 &= 0, \\ I_c III_d - I_d III_c + II_c IV_d - IV_d II_c &= 0, \end{aligned}$$

deren entwickelte Formen:

$$(22)\qquad \begin{aligned} &[1,2] + [3,2]\,\tau_{11} + ([1,3] + [4,2])\,\tau_{12} + [1,4]\,\tau_{22} + [3,4]\,\mathfrak{t} = 0, \\ &[a,b] + [c,b]\,\tau_{11}' + ([a,c] + [d,b])\,\tau_{12}' + [a,d]\,\tau_{22}' + [c,d)\,\mathfrak{t}' = 0 \end{aligned}$$

als Zusammenfassung der Relationen (13) und (15) angesehen werden können.

---

*) Herr Witting schreibt N' statt N.

Es mögen noch einige einfache Relationen angeführt werden, welche die zur Abkürzung eingeführten Grössen verbinden. Bestimmt man die Perioden der alten Integrale an den alten Querschnitten aus (17) mit Hilfe von (16a), so findet man:

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
1 &= A_1 III_c + B_1 III_d, & 0 &= A_2 III_c + B_2 III_d,\\
0 &= A_1 III_c + B_1 IV_d, & 1 &= A_2 IV_c + B_2 IV_d,\\
\tau_{11} &= A_1 I_c \;\; + B_1 I_d \;\;, & \tau_{21} &= A_2 I_c \;\; + A_2 I_d \;\;,\\
\tau_{12} &= A_1 II_c + B_1 II_d \;, & \tau_{22} &= A_2 II_c + B_2 II_d
\end{aligned}
$$

und ebenso aus (16) und (17a):

$$
(23a)\qquad
\begin{aligned}
1 &= A_1 III_c + A_2 IV_c, & 0 &= A_1 III_d + A_2 IV_d,\\
0 &= B_1 III_c + B_2 IV_c, & 1 &= B_1 III_d + B_2 IV_d,\\
\tau'_{11} &= C_1 III_c + C_2 IV_c, & \tau'_{21} &= C_1 III_d + C_2 IV_d,\\
\tau'_{12} &= D_1 III_c + D_2 IV_c, & \tau'_{22} &= D_1 III_d + D_2 IV_d.
\end{aligned}
$$

Die Vergleichung der in diesen beiden Formelgruppen enthaltenen verschiedenen Ausdrücke für dieselben Grössen führt noch zu den Identitäten:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
A_1 III_c &= B_2 IV_d\,, & A_1 II_c \; + B_1 II_d &= A_2 I_c \;\; + B_2 I_d,\\
A_2 IV_c &= B_1 III_d, & C_1 III_d + C_2 IV_d &= D_1 III_c + D_2 IV_d;
\end{aligned}
$$

endlich liefert der Multiplicationssatz der Determinantentheorie die Relation:

$$
(25)\qquad NN' = 1
$$

welche übrigens auch unmittelbar daraus folgt, dass, wie eine einfache Ueberlegung zeigt:

$$
(26)\qquad N = \frac{p'_{12}}{p_{12}}, \quad N' = \frac{p_{12}}{p'_{12}}
$$

ist.

§ 6.

Gleichzeitige Vermehrung der ursprünglichen und der transformirten Integrale um Vielfache der Perioden. Die Elementarcharakteristiken und ihre Transformation.

Ist ein bestimmtes System von canonischen Perioden:

$$
\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4
$$

gegeben (der Kürze wegen seien die *ersten* Indices weggelassen), so erscheint jede andere Periode desselben Integrals als homogene lineare Function derselben, mit ganzzahligen Coefficienten:

$$
(27)\qquad h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 + h_4\omega_4\,,
$$

oder wenn man bei der herkömmlichen Schreibweise stehen bleiben will:

$$h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + g_1\omega_3 + g_2\omega_4. \tag{28}$$

Ueberhaupt kann, wie leicht zu sehen, jedes Werthepaar u_1, u_2 auf eine und nur eine Weise in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} u_1 &= h_1\omega_{11} + h_2\omega_{12} + h_3\omega_{13} + h_4\omega_{14}, \\ u_2 &= h_1\omega_{21} + h_2\omega_{22} + h_3\omega_{23} + h_4\omega_{24}, \end{aligned} \tag{29}$$

wenn die h (zwar nicht mehr ganze, aber doch) *reelle* Zahlen bedeuten sollen. Ein solcher Complex von 4 reellen Zahlen, wie er hier dem einzelnen Paare zusammengehöriger Integralwerthe zugeordnet ist:

$$\begin{pmatrix} h_3 & h_4 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder:} \quad \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$$

soll im Folgenden eine *Elementarcharakteristik**) heissen; insbesondere wird von solchen Elementarcharakteristiken die Rede sein, deren Elemente ganze Zahlen oder ganze Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind.

Die Elementarcharakteristiken sind definirt mit Zugrundelegung eines bestimmten Periodensystems; wie werden sie sich ändern, wenn man die Perioden einer linearen Transformation unterwirft? Die Antwort auf diese Frage ergiebt sich daraus, dass identisch sein muss:

$$h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 + h_4\omega_4 = h_1'\omega_1' + h_2'\omega_2' + h_3'\omega_3' + h_4'\omega_4'. \tag{30}$$

Der Inhalt dieser Gleichung kann unter Benutzung eines in der Invariantentheorie üblichen Ausdrucks folgendermassen ausgesprochen werden:

Die Transformation der Elementarcharakteristiken vollzieht sich in der Weise, dass ihre Elemente als zu den Perioden contragrediente Variable auftreten;

oder ausführlicher:

Die Substitution, welche die Elemente der alten Elementarcharakteristik durch die der neuen ausdrückt, geht durch Vertauschung der Zeilen mit den Colonnen der Coefficientenmatrix aus derjenigen Substitution hervor, welche die neuen Perioden durch die alten ausdrückt — und gleiches gilt bei Vertauschung der Worte „alt“ und „neu“.

Ausführlich geschrieben lauten die Substitutionsformeln der Elementarcharakteristiken folgendermassen:

$$\begin{aligned} h_1 &= a_1 h_1' + b_1 h_2' + c_1 h_3' + d_1 h_4', \\ h_2 &= a_2 h_1' + b_2 h_2' + c_2 h_3' + d_2 h_4', \\ h_3 &= a_3 h_1' + b_3 h_2' + c_3 h_3' + d_3 h_4', \\ h_4 &= a_4 h_1' + b_4 h_2' + c_4 h_3' + d_4 h_4'; \end{aligned} \tag{31}$$

*) Später (§ 27) wird auch von „Primcharakteristiken“ die Rede sein.

und umgekehrt:

$$(31\text{a})\qquad \begin{aligned} h_1' &= c_3 h_1 + c_4 h_2 - c_1 h_3 - c_2 h_4, \\ h_2' &= d_3 h_1 + d_4 h_2 - d_1 h_3 - d_2 h_4, \\ h_3' &= - a_3 h_1 - a_4 h_2 + a_1 h_3 + a_2 h_4, \\ h_4' &= - b_3 h_1 - b_4 h_2 + b_1 h_3 + b_2 h_4. \end{aligned}$$

Hieran mögen noch einige Formeln angereiht werden, welche auf einander entsprechende Perioden der Normalintegrale $v_1 v_2$ einerseits, $v_1' v_2'$ andererseits sich beziehen. Werden die v um simultane Perioden:

$$(32)\qquad \begin{aligned} T_1 &= h_1 + h_3 \tau_{11} + h_4 \tau_{22}, \\ T_2 &= h_2 + h_3 \tau_{21} + h_4 \tau_{22} \end{aligned}$$

vermehrt, so sind die v' gleichzeitig um die Perioden:

$$(32\text{a})\qquad \begin{aligned} T_1' &= h_1' + h_3' \tau_{11}' + h_4' \tau_{12}', \\ T_2' &= h_2' + h_3' \tau_{11}' + h_4' \tau_{22}' \end{aligned}$$

zu vermehren; die h, h' bedeuten dabei nun wieder ganze Zahlen, welche durch die Relationen (31), (31a) verbunden sind.

Für diese T, T' erhält man nun die Relationen: aus (16) und (16a):

$$(33)\qquad \begin{aligned} T_1 &= h_1' A_1 + h_2' B_1 + h_3' C_1 + h_4' D_1, \\ T_2 &= h_1' A_2 + h_2' B_2 + h_3' C_4 + h_4' D_1, \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$(33\text{a})\qquad \begin{aligned} T_1' &= h_1 III_c + h_2 IV_c + h_3 I_c + h_4 II_c, \\ T_2' &= h_1 III_d + h_2 IV_d + h_3 I_d + h_4 II_d, \end{aligned}$$

welche (in ähnlicher Weise wie (30)) als Zusammenfassung der Relationen (31) und (31a) gelten können; ferner aus (17) und (17a):

$$(34)\qquad T_1 = A_1 T_1' + B_1 T_2', \qquad T_2 = A_2 T_1' + B_2 T_2'$$

und umgekehrt:

$$(34\text{a})\qquad T_1' = III_c T_1 + IV_c T_2, \qquad T_2' = III_d T_1 + IV_d T_2;$$

endlich aus (20) und (20a):

$$(35)\qquad N T_1' = B_2 T_1 - B_1 T_2, \qquad N T_2' = - A_2 T_1 + A_1 T_2$$

und umgekehrt:

$$(35\text{a})\qquad N' T_1 = IV_d T_2' - IV_c T_1', \qquad N' T_2 = - III_d T_1' + III_c T_2'.$$

§ 7.

Elementare Modificationen des Schnittsystems. Zusammensetzung aller Abel'schen Substitutionen aus 4 Erzeugenden.

Als *nothwendige* Bedingungen dafür, dass eine lineare ganzzahlige Substitution geeignet sei, ein canonisches Querschnittsystem in ein anderes überzuführen, sind oben (§ 5) die Relationen (13) bezw. (15)

gefunden worden. Es entsteht nun die Frage ob diese Bedingungen auch hinreichend sind, m. a. W. die Frage:

Wenn irgend ein Querschnittsystem gegeben ist, kann man dann immer zu ihm ein zweites so finden, dass die zu den beiden Systemen gehörenden Perioden durch die Gleichungen (12) *bezw.* (14) *verbunden sind, wenn die in diesen Gleichungen auftretenden ganzen Zahlen den Bedingungen* (13) *bezw.* (15) *genügen, im übrigen aber willkürlich gegeben sind?*

Der Beweis dafür, dass diese Frage zu bejahen ist, zerfällt in zwei Theile, einen geometrischen und einen zahlentheoretischen. Zuerst wird nämlich gezeigt, wie alle überhaupt möglichen Querschnittsänderungen aus 4 einfachsten solchen Aenderungen sich zusammensetzen lassen; dann wird gezeigt, wie aus den jenen 4 Querschnittsänderungen entsprechenden Substitutionen alle diejenigen sich zusammensetzen lassen, welche den Bedingungen (13) bezw. (15) genügen.

Der erste, geometrische Theil des Beweises beruht auf folgenden Ueberlegungen, welche im Wesentlichen von Herrn Thomae*) entwickelt worden sind.

Zunächst kann man die Benennungen der beiden Querschnittspaare $(A_1 B_1)$ und $(A_2 B_2)$ mit einander vertauschen; das liefert eine Substitution:

(D) **) $\quad \omega_1' = \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1, \quad \omega_3' = \omega_4, \quad \omega_4' = \omega_3.$

Zu dieser Substitution gehören die folgenden Umsetzungen der Normalintegrale und der Thetamoduln:

$$\begin{gathered} v_1' = v_2, \qquad v_2' = v_1, \\ \tau_{11}' = \tau_{22}, \qquad \tau_{12}' = \tau_{12}, \qquad \tau_{22}' = \tau_{11}. \\ N = N' = 1. \end{gathered} \tag{36}$$

Zweitens kann man aber auch die beiden Querschnitte eines Paares unter sich vertauschen, wenn man dabei den Sinn des einen ändert. Von den hierin begriffenen Vertauschungen braucht nur eine, etwa die von A_1 mit B_1, berücksichtigt zu werden, da die andere vermöge (D) aus ihr hervorgeht. Ihr entspricht die Substitution:

(B) $\quad \omega_1' = -\omega_3, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_2, \quad \omega_4' = \omega_4$

mit den Umsetzungen der Normalintegrale und Thetamoduln:

---

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 12; auch Cr. J. Bd. 75, p. 230 ff. Herr Thomae hat noch eine grössere Anzahl elementarer Aenderungen.

**) Die Buchstaben für die Erzeugenden wie bei Krazer, ann. di mat. ser. II. t. XII p. 296.

$$
(37)\quad
\begin{aligned}
N &= -\tau_{11}, & v_1' &= -\frac{v_1}{\tau_{11}}, & v_2' &= \frac{-\tau_{21}v_1 + \tau_{11}v_2}{\tau_{11}},\\
\tau'_{11} &= -\frac{1}{\tau_{11}}, & \tau'_{12} &= \frac{\tau_{12}}{\tau_{11}}, & \tau'_{22} &= \frac{-\tau_{11}\tau_{22} + \tau_{12}^2}{\tau_{11}};\\
N' &= \tau'_{11}, & v_1 &= \frac{v_1'}{\tau'_{11}}, & v_2 &= \frac{-\tau'_{21}v'_1 + \tau'_{11}v'_2}{\tau'_{11}},\\
\tau_{11} &= -\frac{1}{\tau'_{11}}, & \tau_{12} &= -\frac{\tau'_{12}}{\tau_{11}}, & \tau_{22} &= \frac{-\tau'_{11}\tau'_{22} + \tau'^2_{12}}{\tau'_{11}}.
\end{aligned}
$$

Es ist klar, dass aus den beiden Operationen (D) und (B) jede andere Aenderung des Querschnittssystems abgeleitet werden kann, welche auf eine blosse Aenderung der Bezeichnung sich zurückführen lässt. Weitere Querschnittänderungen können also nur noch erhalten werden dadurch, dass man einen der Querschnitte durch irgend eine Combination der andern erweitert und diese Operation — immer unter Berücksichtigung der für ein canonisches Querschnittsystem festgesetzten Regeln — eventuell an verschiedenen Querschnitten nach einander vornimmt. Nun sind wir aber vermöge (B) und (D) im Stande, jeden Querschnitt an irgend eine Stelle zu bringen; es wird also genügen zu untersuchen, wie wir etwa den Querschnitt B_1 erweitern können. Wir können ihn erweitern um den zugehörigen Querschnitt A_1; wir können ihn ferner erweitern um einen der Querschnitte des andern Paares, etwa um B_2. Die Vermehrung von B_1 und A_2 besonders zu betrachten, ist nicht erforderlich, da A_2 und B_2 vertauscht werden können, ohne dass B_1 seinen Platz wechselt.

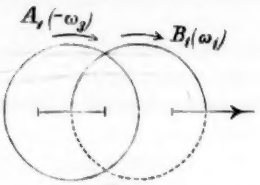

Fig. 1.

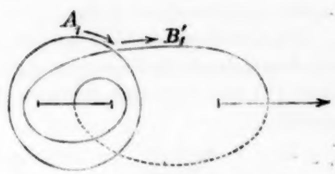

Fig. 2.

Wir erweitern also *drittens* B_1 um A_1 (vgl. die vorstehende Figur); das giebt die Substitution:

(A) $\omega_1' = \omega_1 - \omega_3,\quad \omega_2' = \omega_2,\quad \omega_3' = \omega_3,\quad \omega_4' = \omega_4$

mit den Umsetzungen der v und τ:

$$
(38)\quad
\begin{aligned}
N &= 1 - \tau_{11}, & v_1' &= \frac{v_1}{1-\tau_{11}}, & v_2' &= \frac{\tau_{12}v_1 + (1-\tau_{11})v_2}{1-\tau_{11}},\\
\tau'_{11} &= \frac{\tau_{11}}{1-\tau_{11}}, & \tau'_{12} &= \frac{\tau_{12}}{1-\tau_{11}}, & \tau'_{22} &= \frac{\tau_{22} - (\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2)}{1-\tau_{11}};\\
N' &= 1 + \tau'_{11}, & v_1 &= \frac{v_1'}{1+\tau'_{11}}, & v_2 &= \frac{-\tau'_{12}v'_1 + (1+\tau'_{11})v'_2}{1+\tau'_{11}};\\
\tau_{11} &= \frac{\tau'_{11}}{1+\tau'_{11}}, & \tau_{12} &= \frac{\tau'_{12}}{1+\tau'_{11}}, & \tau_{22} &= \frac{\tau'_{22} + (\tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'^2_{12})}{1+\tau'_{11}}.
\end{aligned}
$$

Viertens endlich erweitern wir B_1 um B_2; dann wird aber B_1' von A_2 getroffen, was nicht sein soll. Um dem abzuhelfen, müssen wir A_2 so erweitern, dass es B_1' noch einmal im entgegengesetzten Sinne trifft, also um $(-A_1)$. So erhalten wir die Substitution:

$$\text{(C)} \qquad \omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_3, \quad \omega_4' = \omega_4 - \omega_3$$

mit den Umsetzungen der v und τ:

$$(39) \quad \begin{aligned} N = 1, \quad v_1' = v_1, \quad v_2' = v_2 - v_1, \quad \tau_{11}' = \tau_{11}, \quad \tau_{12}' = \tau_{12} - \tau_{11}, \\ \tau_{22}' = \tau_{22} - 2\tau_{12} + \tau_{11}; \\ N' = 1, \quad v_1 = v_1', \quad v_2 = v_2' + v_1', \quad \tau_{11} = \tau_{11}', \quad \tau_{12} = \tau_{12}' + \tau_{11}'; \\ \tau_{22} = \tau_{22}' + 2\tau_{12}' + \tau_{11}'. \end{aligned}$$

Damit ist der Kreis der elementaren Operationen geschlossen und wir können das Resultat aussprechen:

Jede Aenderung unseres canonischen Querschnittsystems, welche dasselbe wieder in ein canonisches System überführt, und nur eine solche kann aus den 4 erzeugenden Operationen A, B, C, D zusammengesetzt werden.

Nun haben die Herren Clebsch und Gordan*), andererseits Hr. Kronecker**) auf arithmetischem Wege gezeigt, dass in der That jede Substitution, deren Coefficienten den Bedingungen (13) bezw. (15) genügen, aus jenen 4 Erzeugenden zusammengesetzt werden kann. Aus diesem Satze und dem vorhergehenden ergiebt sich dann das schliessliche Resultat als Antwort auf die zu Anfang des Paragraphen aufgeworfene Frage:

Die Gleichungen (13) *resp.* (15) *sind nicht nur nothwendige, sondern auch hinreichende Bedingungen dafür, dass eine lineare Substitution der Form* (12) *resp.* (14) *eine zulässige Aenderung unseres Querschnittsystems darstellt.*

§ 8.

Monodromie der Verzweigungspunkte.

An die im vorigen Paragraphen discutirte Frage knüpft sich nun eine weitere, welche für die Entwicklung der Theorie nicht minder fundamental ist.

Wie bereits § 1 hervorgehoben, erfordert eine vollständige Durchbildung der Theorie durchaus, *die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche als frei veränderliche Grössen zu betrachten.* Die Perioden erscheinen dann als Functionen dieser Veränderlichen; sollen sie *stetige* Functionen derselben bleiben, so muss man die durch ihre Aenderung

*) Abel'sche Functionen p. 304.
**) In Vorlesungen, vgl. Berl. Ac. Monatsber. 1866 (abgedr. Cr. J. Bd. 68, p. 273).

bedingte Deformation der Riemann'schen Fläche und des auf derselben verzeichneten Querschnittsystems als in der Weise vor sich gehend sich vorstellen, dass die Verzweigungspunkte die Querschnitte vor sich herschieben*). (Rückt z. B. in der Figur der Verzweigungspunkt a nach a', so ist das Stück ced des Querschnitts bis etwa zu der Form $ce'd$ auszudehnen.)

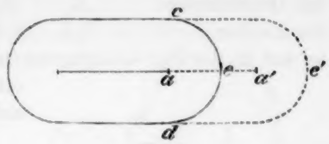

Fig. 3.

Diese Deformation der Fläche kann man nun — immer unter Vermeidung des Zusammenfallens von Verzweigungspunkten — solange fortsetzen, bis schliesslich jeder Verzweigungspunkt wieder eine Stelle einnimmt, welche schon in der ursprünglichen Gestalt der Fläche von einem solchen Punkte — sei es demselben, sei es einem andern — eingenommen war. Dann ist schliesslich die hyperelliptische Irrationalität wieder die ursprüngliche geworden, aber das Querschnittsystem hat eine Aenderung erlitten — natürlich unter Beibehaltung seiner Eigenschaft, ein canonisches System zu sein. Von einem solchen neuen Querschnittsystem soll nun unter Benutzung eines Terminus des Herrn Hermite**) gesagt werden: *es gehe durch Monodromie der Verzweigungspunkte aus dem ursprünglichen hervor.*

Die in Aussicht gestellte Frage ist dann diese:

*Lassen sich alle canonischen Querschnittsänderungen durch Monodromie der Verzweigungspunkte erzielen, oder zerfallen vielleicht die sämmtlichen Querschnittsysteme in eine Anzahl getrennter Classen derart, dass nur die je derselben Classe angehörenden Systeme durch Monodromie der Verzweigungspunkte in einander übergeführt werden können?****)

Um zu zeigen, dass in der That ersteres der Fall ist, dass also alle canonischen Querschnittsysteme in diesem Sinne zu einer und derselben Classe gehören, wird man an irgend ein passend zu wählendes Ausgangssystem anknüpfen dürfen: denn kann man von diesem zu jedem andern gelangen, so ist auch zwischen diesen andern der Uebergang möglich. Als solches Ausgangssystem möge das folgende (auch sonst schon mehrfach benutzte) gewählt werden:†)

Die Verzweigungspunkte 0 und 1, 2 und 3, 4 und 5 mögen

*) Vgl. die Figuren aus Riemann's Nachlass, ges. W. p. 404.

**) C. R. Bd. 32 (1851).

***) Für die folgenden Entwicklungen vergleiche man die des Hrn. C. Jordan, tr. des subst. p. 357 ff. Dort leidet nur die Uebersicht darunter, dass die Frage mit der viel specielleren des Theilungsproblems verquickt und von dem anschaulichen Hilfsmittel der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche kein Gebrauch gemacht ist.

†) Das von Herrn Weierstrass und seinen Schülern benutzte Periodensystem wird aus dem im Texte gewählten dadurch erhalten, dass man A_2, B_2 durch B_2, $-A_2$ ersetzt.

durch Verzweigungsschnitte verbunden sein, von welchen keiner den andern trifft. Dann mögen

die Querschnitte:	A_1	A_2	B_1	B_2
die Punkte	0, 1	3, 4	1, 2	4, 5

in der in der Fig. 4 angegebenen Weise umschliessen (im obern Blatt verlaufende Linien sind ausgezogen, im untern verlaufende punktirt).

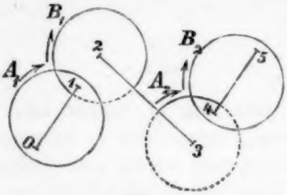

Fig. 4.

Durchlaufung der Querschnitte in positivem Sinne liefert dann*) die Perioden:

$$(40)\quad \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\ -\omega_3 & -\omega_4 & +\omega_1 & +\omega_2. \end{array}$$

Man kann nun leicht 4 Monodromien der Verzweigungspunkte angeben, deren Einfluss auf dieses Querschnittsystem gerade durch die erzeugenden Substitutionen A, B, C, D des § 7 dargestellt wird.

Lässt man nämlich *erstens* die Punkte 0 und 1 ihre Plätze wechseln, indem man den sie verbindenden Querschnitt um $+180^0$ um seine Mitte dreht, so nimmt das Querschnittssystem, wenn man gleichzeitig die übrigen Punkte in für die Zeichnung bequemer, sonst aber irrelevanter Weise verschiebt, die folgende Gestalt an:

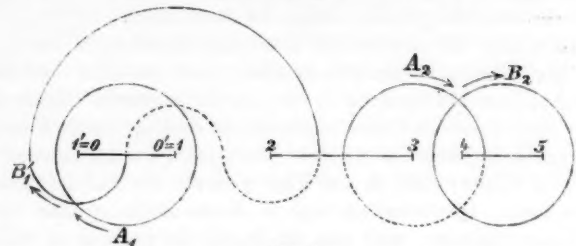

Fig. 5.

und man erhält aus dieser Figur, wie leicht zu übersehen, die folgenden Beziehungen zwischen den alten und neuen Perioden:

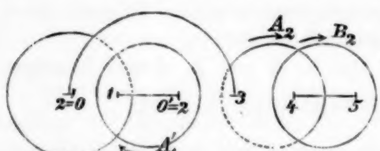

Fig. 6.

$$\omega_1' = \omega_1 + \omega_3, \quad \omega_2' = \omega_2,$$
$$\omega_3' = \omega_3, \quad \omega_4' = \omega_4$$

— also genau die Substitution A.

Lässt man *zweitens* die Punkte 0 und 2 ihre Plätze wechseln, indem man beide den Punkt 1 so umgehen lässt, dass er links von ihren Wegen bleibt, so gelangt man zu Figur 6, welche die

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 32, p. 392.

Relationen: $\omega_1' = -\omega_3, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_1, \quad \omega_4' = \omega_4$ zwischen den alten und neuen Perioden liefert — m. a. W. die Substitution B.

Lässt man *drittens* durch Vertauschung der Punkte 0 mit 1, 2 mit 3, 4 mit 5 das Querschnittsystem sich so verzerren, dass es die nachfolgende Gestalt erhält:

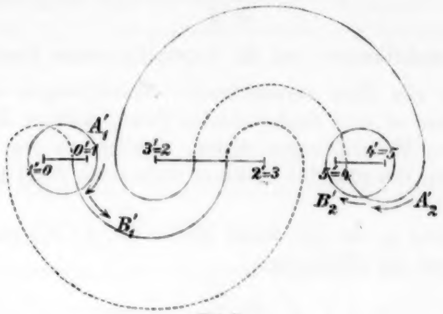

Fig. 7.

so erhält man folgende Substitution:

$$\omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_3, \quad \omega_4' = \omega_4 - \omega_3,$$

welche in § 7 mit C bezeichnet war.

Viertens endlich wird die Substitution D oder:

$$\omega_1' = \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1, \quad \omega_3' = \omega_4, \quad \omega_4' = \omega_3$$

erhalten durch Vertauschung von 0 mit 3, 1 mit 4, 2 mit 5 in der Weise dass die Figur in die folgende übergeht:

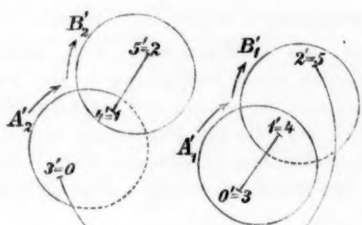

Fig. 8.

Es können also alle 4 *erzeugenden Substitutionen durch Monodromie der Verzweigungspunkte erreicht werden.* Nun haben wir aber in § 7 gesehen, dass jede lineare Periodentransformation aus diesen 4 Er-

zeugenden zusammengesetzt werden kann; also ergiebt sich in der That als Antwort auf die zu Beginn dieses Paragraphen aufgeworfene Frage der folgende Satz des Herrn C. Jordan*):

*Jede canonische Querschnittsänderung kann durch Monodromie der Verzweigungspunkte erzielt werden***).

§ 9.

Das Umkehrtheorem und die hyperelliptischen Functionen.

Nachdem alle diese vorbereitenden Betrachtungen erledigt sind, wenden wir uns zu dem fundamentalen Satze, welcher die Grundlage aller folgenden Entwicklungen bildet, nämlich zu dem *Jacobi'schen Umkehrtheorem*, das zunächst in seiner einfachsten Form ausgesprochen werden möge:

Sind u_1 und u_2 mit den beiden Stellen $(x, \sqrt{f(x)})$ und $(y, \sqrt{f(y)})$ verbunden durch die Gleichungen:

$$(41)\qquad \begin{aligned} w_1 &= \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_a^y \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \\ w_2 &= \int_a^x \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_a^y \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}}, \end{aligned}$$

*in welchen unter a ein Verzweigungspunkt der Riemann'schen Fläche verstanden ist (von dessen Auswahl die Werthe der Integrale unabhängig sind), so sind die symmetrischen Functionen jener beiden Stellen eindeutige vierfach periodische Functionen von w_1 und w_2****).

Unter symmetrischen Functionen sind dabei zunächst die rationalen symmetrischen Verbindungen beider Stellen, wie $x' + x''$ oder $\sqrt{fx'} + \sqrt{fx''}$ verstanden, des Weiteren aber auch bestimmte Categorien algebraischer Functionen dieser Verbindungen. Die letzteren sind durch mannigfache algebraische Relationen mit einander verknüpft, und die Theorie der vierfach periodischen Functionen besitzt eine Reihe von Mitteln, um solche Relationen in systematischer Weise abzuleiten und mit einander in Beziehung zu setzen. Man gelangt so durch die

*) Tr. des subst. p. 360.

**) Obwohl die Betrachtung hyperelliptischer Functionen höherer Ordnung ausserhalb des Rahmens dieser Vorlesungen liegt, so sei es doch an dieser Stelle gestattet ausdrücklich hervorzuheben, dass zwar die Entwicklungen von § 7, nicht aber die von § 8 für hyperelliptische Functionen von höherem p gültig bleiben; es soll dies an anderer Stelle ausgeführt werden (vgl. auch C. Jordan a. a. O. p. 364, art. 497).

***) Ueber eine allgemeinere Wahl der unteren Grenzen vergl. § 42.

Theorie dieser *transcendenten* Functionen hindurch zu einer tiefergehenden Erkenntniss bestimmter Classen *algebraischer* Relationen. So erscheint als eine Hauptaufgabe unserer Theorie:

Aufsuchung und Behandlung derjenigen algebraischen Probleme, in deren Natur man durch den Besitz der vierfach periodischen Functionen Einblick erhält. —

Solche Probleme sind es, welche den Gegenstand der folgenden Entwicklungen bilden; ihre genauere Bezeichnung kann erst im weiteren Verlauf gegeben werden.

I. Abschnitt.

Hyperelliptische Functionen und Formen; Gruppe.

§ 10.

Algebraische Definition hyperelliptischer Functionen.

Wir knüpfen zunächst an an das in § 9 aufgestellte Umkehrtheorem, indem wir damit beginnen, dass wir dasselbe in eine verallgemeinerte Form bringen. An Stelle der Gleichungen (41) schreiben wir nämlich die folgenden:

$$(42) \qquad v_i = \int_{y'}^{x'} dv_i + \int_{y''}^{x''} dv_i + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} dv_i, \qquad i = 1, 2$$

indem wir 2ν von einander unabhängige Stellen $(x, \sqrt{f(x)})$ und $(y, \sqrt{f(y)})$ der Riemann'schen Fläche einführen und statt der allgemeinen Integrale I. Gattung w die Normalintegrale v benutzen. Die vierfach periodischen Functionen von v_1 und v_2 gehen dann über in rationale Functionen dieser Stellen; dieselben werden ausserdem noch abhängen von den Coefficienten a der Function $f(x)$, und wir wollen dahin übereinkommen, *dass wir für's erste* (d. h. in diesem Abschnitt) *nur solche Functionen in Betracht ziehen, welche auch von diesen Coefficienten in rationaler Weise abhängen.*

Die so erhaltenen Functionen der x, y, a sollen also zunächst *hyperelliptische* Functionen heissen.

Dieselben besitzen zwei charakteristische Eigenschaften. *Erstens* nämlich bringt eine lineare Transformation des zu Grunde liegenden algebraischen Gebildes keine Aenderung der v, τ mit sich. Die hyperelliptischen Functionen ändern sich also nicht, wenn man die x, y linear transformirt und gleichzeitig die a durch die Coefficienten derjenigen Function f ersetzt, in welche f durch jene Transformation übergeht; m. a. W.:

Hyperelliptische Functionen sind Covarianten der Function f und der Stellen $x' \dots x^{(\nu)}$, $y' \dots y^{(\nu)}$.

Zweitens aber bleiben unsere Functionen ungeändert, wenn man die Stellen x, y so durch andere ersetzt, dass die v_1, v_2 ungeändert bleiben. Wenn aber die 2ν Stellen x, y mit den 2ν Stellen $\xi' \dots \xi^{(\nu)}$; $\eta' \dots \eta^{(\nu)}$ durch die beiden Gleichungen:

$$(43)\quad \int_{y'}^{x'} dv_i + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} dv_i = \int_{\eta'}^{\xi'} dv_i + \cdots + \int_{\eta^{(\nu)}}^{\xi^{(\nu)}} dv_i, \qquad (i = 1, 2)$$

verbunden sind, so existirt nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems eine rationale Function $R(x)$ auf der Fläche, welche nur an den Stellen x und η Null und nur an den Stellen y und ξ unendlich gross wird (wobei etwa mehrfach auftretende Stellen in bekannter Weise zu berücksichtigen sind). Man nennt nun zwei Punktgruppen der Art, dass die Punkte der einen Gruppe Nullstellen, die der andern Unendlichkeitsstellen derselben rationalen Function auf der Fläche sein können, zu einander „corresidual" oder „äquivalent"; und die erwähnte zweite Eigenschaft hyperelliptischer Functionen kann in der Weise ausgesprochen werden, dass man sagt:

Die hyperelliptischen Functionen bleiben ungeändert, wenn man die x, y durch andere Stellen ξ, η der Fläche ersetzt, welche die Eigenschaft haben, dass die x mit den η zusammen eine zu den y und den ξ äquivalente Punktgruppe bilden.

Es ist vielleicht gestattet die Definition der Aequivalenz auf Doppelgruppen der hier bezeichneten Art in der Weise auszudehnen, dass man die Doppelgruppe der x, y zu der Doppelgruppe der ξ, η dann äquivalent nennt, wenn die x mit den η zusammen zu den ξ und y im ursprünglichen Sinne äquivalent sind.

Beide charakteristischen Eigenschaften zusammen liefern dann die folgende algebraische Definition:

Hyperelliptische Functionen sind rationale Covarianten der Function f, welche von einer Doppelgruppe von Stellen $x', x'' \dots x^{(\nu)}$, $y', y'' \dots y^{(\nu)}$ in der Weise abhängen, dass sie sich nicht ändern, wenn man diese Doppelgruppe durch eine äquivalente Doppelgruppe ersetzt.

Insbesondere müssen sie also ungeändert bleiben, wenn man die x für sich oder die y für sich durch eine äquivalente einfache Gruppe ersetzt. Hieher gehört als einfachster Specialfall derjenige, in welchem die beiden äquivalenten einfachen Gruppen dieselben Stellen in veränderter Reihenfolge erhalten: *die hyperelliptischen Functionen sind symmetrisch in den x und symmetrisch in den y.*

§ 11.

Erweiterungen der Definition durch Heranziehung des formentheoretischen Gesichtspunkts und durch Einführung von Hilfspunkten.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellte Definition soll nun nach zwei Seiten hin erweitert werden.

Bereits in der Einleitung sind die einzelnen Stellen der Riemann'schen Fläche durch homogene Coordinaten definirt und die Coefficienten von f in homogener Weise eingeführt worden: in der grundsätzlichen Benutzung solcher homogener Veränderlicher soll die erste Erweiterung unserer Definition bestehen. Die bisher eingeführten Functionen werden dann *homogene Functionen nullter Dimension* der neuen Variabeln und die Consequenz der erweiterten Auffassung besteht nun eben darin, dass auch homogene Functionen von *anderer* Dimension betrachtet werden. *Solche homogene Functionen von anderer als der nullten Dimension sollen, wie es in der Algebra allgemein üblich ist, im folgenden kurz als Formen bezeichnet werden:* die Veränderung in der Auffassung der Fragestellungen, welche der Gebrauch von homogenen Variabeln mit sich bringt, lässt sich dann kurz in die Worte zusammenfassen:

Nicht allein Functionen, sondern auch Formen sollen Gegenstand der Untersuchung sein.

Die *zweite* Erweiterung unserer Definition knüpft an eine Auffassung der Grundbegriffe der Invariantentheorie, von welcher zwar in invariantentheoretischen Schriften gelegentlich Gebrauch gemacht worden ist, die aber trotz ihrer fundamentalen Bedeutung in die einleitenden Capitel der Lehrbücher, wohin sie gehört, noch keine Aufnahme gefunden hat.

Es handelt sich nämlich darum, dass man stets auch solche Formen mit in den Kreis der Betrachtung zu ziehen hat, welche ausser von den durch die jedesmalige Aufgabe bedingten Variabeln noch von gewissen Hilfsgrössen in beliebiger Anzahl abhängen. Diese Hilfsgrössen sind als zu den bereits vorhandenen cogrediente Veränderliche aufzufassen; ihre Einführung bedeutet also die Herbeiziehung von Covarianten mit einer noch grösseren Anzahl von Variabelnreihen, als sie an und für sich schon durch die Aufgabestellung bedingt ist.

Diese Einführung von Hilfsgrössen scheint auf den ersten Blick nur eine unnöthige Beschwerung der Formeln mit sich zu bringen; aber sie gewährt einen nicht geringen Vortheil. Es hindert nämlich nichts — und das ist der Gesichtspunkt, welcher hier hervorgehoben werden sollte — *den Nullpunkt, den Unendlichkeitspunkt und den Einheitspunkt des benutzten Coordinatensystems selbst als solche cogrediente*

Hilfspunkte einzuführen. Dadurch bekommen alle Rechnungen, welche an das Coordinatensystem anknüpfen, an sich invariantentheoretische Bedeutung. So erreichen wir mit viel geringeren Mitteln dieselben Vortheile, die man sonst wohl von der Einführung sogenannter „typischer" Coordinatensysteme erwartet.*)

Für unsere gegenwärtige Untersuchung bedingt diese Auffassung, dass wir *die symmetrischen Verbindungen der x und die Coefficienten von f* direct als die einfachsten hyperelliptischen Functionen auffassen dürfen.

§ 12.

Erste transcendente Definition hyperelliptischer Functionen; natürlicher Bereich der transcendenten Variabeln.

Neben die in den beiden vorigen Paragraphen erläuterte *algebraische* Definition der hyperelliptischen Functionen stellt sich nun eine zweite, welche als *transcendente* Definition bezeichnet werden soll. Sie beruht darauf, dass man statt der Stellen x, y des hyperelliptischen Gebildes und der Coefficienten a von f die durch Glchg. (42) definirten Normalintegrale v und ihre Thetamoduln τ als unabhängige Veränderliche ansieht. Die hyperelliptischen Functionen werden dadurch zu *eindeutigen Functionen der fünf Grössen:*

$$(44) \qquad v_1,\ v_2,\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22},$$

welche ungeändert bleiben, wenn man v_1, v_2 durch

$$(44\text{a}) \qquad \begin{aligned} &v_1 + h_1 + h_3\tau_{11} + h_4\tau_{12}, \\ &v_2 + h_2 + h_3\tau_{12} + h_4\tau_{22} \end{aligned}$$

ersetzt, unter h_1, h_2, h_3, h_4 beliebige ganze Zahlen verstanden.

Die fünf Grössen (44), welche als *„transcendente Argumente"* bezeichnet werden mögen, während die x, $\sqrt{f(x)}$ und a *„algebraische Argumente"* heissen sollen, sind nun ihrer ursprünglichen Entstehung zufolge auf einen *natürlichen Bereich* beschränkt: *die v können nur endliche Werthe annehmen, die τ nur solche, für welche die Ungleichungen* (11) *erfüllt sind.* Die Umkehrung des Abel'schen Theorems lehrt dann, dass *unsere hyperelliptischen Functionen im Innern dieses natürlichen Bereiches keine wesentlich singuläre Stelle***) *besitzen.*

Unendlich grosse Werthe der v hingegen und diejenigen Werthe der τ, für welche eine jener Ungleichungen in eine Gleichung über-

*) Functionen, welche von solchen Hilfspunkten frei sind, werden wir wohl als *reine* Invarianten und Covarianten bezeichnen, ohne damit einen besonderen Vorzug derselben ausdrücken zu wollen. — Die „typischen" Coordinatensysteme behalten natürlich ihre Bedeutung für specielle Probleme.

**) Vgl. Weierstrass, Abh. zur Funct.-Lehre p. 130.

geht, sind als *Grenzstellen* des natürlichen Bereichs der Variabeln zu betrachten; in ihnen werden die hyperelliptischen Functionen wesentliche Singularitäten besitzen. Welcher Art aber diese Singularitäten sind, darüber ist bisher nur sehr wenig bekannt; und noch weniger weiss man darüber, ob jede Function der v und τ, welche die erwähnten Eigenschaften hat, wirklich eine hyperelliptische Function im Sinne der algebraischen Definition des § 10 ist. Es scheint daher vorläufig am zweckmässigsten zu sein, diese Frage ganz bei Seite zu lassen und der transcendenten Definition der hyperelliptischen Functionen die folgende Fassung zu geben:

Hyperelliptische Functionen im Sinne des § 10 *sind solche eindeutige Functionen der transcendenten Argumente, welche in den algebraischen Argumenten rational sind.*

§ 13.

Einführung des formentheoretischen Gesichtspunkts in die transcendente Definition.

Die zu Anfang von § 11 vorgenommene Einführung des formentheoretischen Gesichtspunkts in die algebraische Definition bedingt nun auch für die transcendente Definition eine analoge Umgestaltung. Um dieselbe zu erhalten, müssen wir zunächst von den Normalintegralen und Thetamoduln, die ja absolute Invarianten sind, wieder zurückgehen zu den ursprünglichen Integralen w und ihren Perioden. Wir haben dann die beiden Reihen von je fünf Veränderlichen:

$$(45)\qquad \begin{array}{ccccc} w_1 & \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14}, \\ w_2 & \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24}; \end{array}$$

die hyperelliptischen Formen werden homogene Functionen dieser Veränderlichen, deren Eigenschaften nun näher anzugeben sind.

Werden zunächst die x_1, x_2 linear transformirt, was der algebraischen Definition zufolge auf unsere Functionen ohne Einfluss ist, so transformiren sich auch die w und ω linear, sodass etwa:

$$w_1\ ,\ w_2 \text{ durch } \alpha w_1 + \beta w_2\ ,\ \gamma w_1 + \delta \omega_2$$

und gleichzeitig:

$$\omega_{i1},\ \omega_{i2} \text{ durch } \alpha\omega_{i1} + \beta\omega_{i2},\ \gamma\omega_{i1} + \delta\omega_{i2}$$

ersetzt werden. Bezeichnet man diese Operation als *Combination* der beiden Variabelnreihen (45), eine Form auf welche dieselbe keinen Einfluss hat, als eine *Combinante*, so kann man diese Eigenschaft so aussprechen:

Wir betrachten jetzt hyperelliptische Formen; dieselben sind Combinanten der beiden Variabelnreihen (45).

Nach den ersten Sätzen der Invariantentheorie setzen sich alle Combinanten von zwei Variabelnreihen aus den einfachsten derselben,

den *zweigliedrigen Determinanten* zusammen. Solcher Determinanten treten hier 10 auf, nämlich die sechs bereits in § 3 als p_{ik} eingeführten, und ausserdem vier von der Form:

$$\mathrm{v}_i = \omega_{2i} w_1 - \omega_{1i} w_2 \qquad (i=1,2,3,4). \tag{46}$$

Diese 10 Grössen sind durch eine Reihe von Identitäten mit einander verbunden, von welchen drei unabhängige z. B. sind:

$$\begin{aligned} p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} &= 0, \\ p_{12}\mathrm{v}_3 + p_{23}\mathrm{v}_1 + p_{31}\mathrm{v}_2 &= 0, \\ p_{12}\mathrm{v}_4 + p_{24}\mathrm{v}_1 + p_{41}\mathrm{v}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Ausserdem besteht noch die Relation (4):

$$p_{13} + p_{24} = 0.$$

Hyperelliptische Formen sind also eindeutige homogene Functionen dieser so verknüpften zehn Determinanten.

Zeichnet man eines der p_{ik}, etwa p_{12}, aus und dividirt mit ihm die übrigen Determinanten, so erhält man wieder die v und τ. Indem man die Identitäten (47) dazu verwendet, v_3, v_4, p_{34} durch diese Grössen auszudrücken, gelangt man zur Formulirung des Satzes:

*Hyperelliptische Formen sind Functionen von $v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, multiplicirt mit einer Potenz von p_{12}**).

§ 14.

Benutzung von Hilfsgrössen bei der transcendenten Definition.

Wie für die algebraische Definition (§ 11) kann es auch bei Benutzung der transcendenten Definition zweckmässig sein, auch solche Functionen in Betracht zu ziehen, welche von geeignet gewählten *Hilfsgrössen* abhängen. Soll insbesondere das Analoge zu dem erreicht werden, was dort die Auffassung der Grundpunkte des Coordinatensystems als cogredienter Hilfspunkte erzielte, so wird man hier solche Grössen einzuführen haben, dass man die w selbst als Combinanten auffassen kann. Dies wird am bequemsten dadurch erreicht, dass man die Coefficienten in den Ausdrücken der w durch die v, also die *vier Perioden erster Art*, **) selbst als solche Hilfsgrössen einführt. So gelangt man zu der folgenden erweiterten Bestimmung:

---

*) Ganz ebenso gelangt man im Falle der elliptischen Functionen dazu, die ganzen Invarianten $\wp$, $\wp'$, g_2, g_3 als Product je einer Potenz von ω_1 in eine Function von v und τ aufzufassen.

**) Vgl. z. B. auch Staude, diese Ann. Bd. 24, p. 288ff., wo die α_{ik} eben unsere ω_{ik} sind.

*Hyperelliptische Formen sind doppelt binäre Formen von ω_{11}, ω_{12} einerseits, ω_{21}, ω_{22} andererseits, deren Coefficienten eindeutige Functionen von v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} sind.**)

§ 15.

Die Hauptgruppe.

Es bleibt noch übrig, die unter (44a) gegebenen Eigenschaften der hyperelliptischen Functionen auf die Formen zu übertragen und dadurch die Definition derselben zu vervollständigen. Dazu müssen wir beachten, einmal, dass unsere algebraischen Argumente ungeändert bleiben bei Vermehrung der w um gleiche Vielfache ihrer entsprechenden Perioden; dann aber auch, dass jene Argumente unabhängig sind von der Art, wie die Querschnitte auf der Riemann'schen Fläche gezogen sind. Beides fassen wir zusammen in die Aussage:

Die hyperelliptischen Formen bleiben ungeändert, wenn ihre Variabeln vermöge folgender Gleichungen durch neue ersetzt werden:

$$(48)\qquad \begin{aligned} w' &= w + h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 + h_4\omega_4, \\ \omega_1' &= a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4, \\ \omega_2' &= b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4, \\ \omega_3' &= c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_4\omega_4, \\ \omega_4' &= d_1\omega_1 + d_2\omega_2 + d_3\omega_3 + d_4\omega_4. \end{aligned}$$

Die h, sowie die a, b, c, d bedeuten dabei ganze Zahlen; die letzteren müssen überdies den Bedingungen (13) bezw. (15) genügen. Zur Abkürzung sind die Indices der w und die *ersten* Indices der ω weggelassen.

Werden zwei Substitutionen der Form (48) nach einander angewendet, so hat die resultirende Substition ebenfalls dieselbe Form; m. a. W.:

Alle in der Form (48) *enthaltenen Operationen bilden eine Gruppe.*

Diese Gruppe soll im folgenden kurz als *„die Hauptgruppe"* bezeichnet werden; die transcendente Definition hyperelliptischer Formen nimmt dann folgende Gestalt an:

Hyperelliptische Formen sind eindeutige analytische Invarianten der Hauptgruppe (welche in den algebraischen Argumenten rational sind).

---

*) Hier zeigt sich der Theorie der elliptischen Functionen gegenüber insofern ein bemerkenswerther Unterschied, als man bei letzteren nicht im Stande ist, die Coefficienten von f_4 in ähnlicher Weise, wie dies im Texte mit denjenigen von f_6 geschehen ist, als Functionen der transcendenten Variabeln aufzufassen; man muss dort vielmehr bei den „reinen" Invarianten stehen bleiben, weil man eben den v, τ nur eine Periode ω_1 hinzufügen kann, die gerade ausreicht, um überhaupt zu Formen zu gelangen.

Diejenigen hyperelliptischen Formen und Functionen welche die x, y, bezw. die w nicht enthalten, sondern allein von den a, bezw. den ω abhängen, sollen im Folgenden, analog der im Gebiete der elliptischen Functionen eingebürgerten Terminologie, als *hyperelliptische Modulformen und Modulfunctionen* von den *eigentlichen hyperelliptischen Formen und Functionen* unterschieden werden, welche von *beiden* Classen von Argumenten abhängen.

II. Abschnitt.

Untergruppen und Stufen.

§ 16.

Algebraische Functionen der algebraischen Argumente; Untergruppen von endlichem Index.

Neben den rationalen Functionen der algebraischen Argumente sollen nunmehr auch *solche algebraische Functionen der algebraischen Argumente* betrachtet werden, *welche eindeutige Functionen der transcendenten Argumente sind.*

Diese Functionen werden nun nicht mehr allen Operationen der Hauptgruppe (46) gegenüber sich invariant verhalten, sondern sie werden, wenn man alle diese Operationen auf sie anwendet, eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen. Da alle jene Operationen, welche einen Werth einer solchen Function ungeändert lassen, eine Untergruppe bilden, deren Index gleich ist der Anzahl der verschiedenen Werthe der Function, so folgt, dass *jede der neuen Functionen als Invariante zu einer Untergruppe von endlichem Index der Hauptgruppe* (46) *gehört.*

Bleibt andererseits eine Function bei allen Operationen einer solchen Untergruppe ungeändert, so wird sie, wenn alle Operationen der Hauptgruppe auf sie angewendet werden, nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen, nämlich so viele, als der Index der Untergruppe beträgt. Die symmetrischen Functionen dieser verschiedenen Werthe werden daher bei allen Operationen der Hauptgruppe ungeändert bleiben, d. h. sie werden, falls sie den pag. 221 angedeuteten Bedingungen genügen, hyperelliptische Functionen im Sinne des ersten Abschnitts sein.

Die eingeführte erweiterte Definition hyperelliptischer Functionen erweist sich also als identisch mit der folgenden:

Hyperelliptische Functionen sind eindeutige Functionen der transcendenten Argumente, welche einer in der Hauptgruppe (46) *enthaltenen Untergruppe von endlichem Index gegenüber sich invariant verhalten und dabei von den algebraischen Argumenten algebraisch abhängen.*

Es würde daher eine erste Hauptaufgabe einer systematischen Theorie der hyperelliptischen Functionen sein:

Alle in der Hauptgruppe enthaltenen Untergruppen von endlichem Index aufzuzählen.

Die entsprechende Hauptaufgabe in der Theorie der elliptischen Functionen kann insofern als gelöst angesehen werden, als man im Stande ist, die zugehörigen „Fundamentalpolygone" in der Ebene der complexen Grösse τ anzugeben.

Soll diese Theorie auf hyperelliptische Functionen übertragen werden, so würde vor allem nöthig sein, dass Analogon zum „Fundamentaldreieck" der τ-Ebene, den Fundamentalbereich im sechsfach ausgedehnten Gebiete der drei complexen Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen. Auf die fundamentale Bedeutung dieser Frage sei deshalb hier nachdrücklich hingewiesen.

§ 17.

Congruenzuntergruppen und Stufen.*)

Die bis jetzt allein bekannten Untergruppen besitzen eine gemeinsame Eigenschaft, (welche keineswegs allen überhaupt möglichen Untergruppen zukommt, wie man aus dem Verhalten der elliptischen Functionen schliessen darf): die Operationen jeder dieser Untergruppen lassen sich dadurch von allen übrigen Operationen der Hauptgruppe trennen, dass ihre Coefficienten gewissen Congruenzen in Bezug auf einen Zahlenmodul n genügen.

Jede solche Untergruppe, deren Operationen sich durch Congruenzen modulo n definiren lassen, welchen ihre Coefficienten genügen, soll „Congruenzuntergruppe n^{ter} Stufe" heissen.

Das Wort „Stufe" wird dann von den Gruppen auf die zu ihnen gehörenden Functionen übertragen; wir sprechen von *hyperelliptischen Functionen n^{ter} Stufe* als von solchen, *welche bei den Operationen einer Congruenzuntergruppe n^{ter} Stufe ungeändert bleiben.*

Eine besonders erwähnenswerthe Art von Congruenzuntergruppen sind die *Principaluntergruppen*, welche folgendermassen zu definiren sind. *Eine Substitution der Hauptgruppe heisst modulo n zur Identität congruent, wenn in ihr alle Coefficienten bis auf a_1, b_2, c_3, d_4 der Null, diese vier aber der Eins congruent sind.* Zwei solche Substitutionen nach einander angewandt, liefern wieder eine Substitution derselben Eigenschaft; man kann daher sagen:

Alle Substitutionen, welche mod. n zur Identität congruent sind, bilden eine Gruppe, welche die zum Modul n gehörende Principaluntergruppe heissen soll.

*) Vgl. hier und im folgenden: Klein, zur Theorie der ell. Modulfunct., diese Ann. Bd. 17, p. 62.

Zwei Substitutionen, deren entsprechende Coefficienten nach dem Modul n congruent sind, sollen selbst nach diesem Modul congruent heissen. Nun kann man leicht zeigen: Zwei Substitutionen, deren eine durch Zusammensetzung mit einer zur Identität congruenten Substitution aus der andern hervorgeht, sind nach demselben Modul zu einander congruent; und umgekehrt: sind zwei Substitutionen zu einander congruent, so kann jede durch Zusammensetzung der andern mit einer nach demselben Modul zur Identität congruenten Substitution erhalten werden. Daraus folgt aber weiter: wenn man eine zur Identität congruente Substitution durch irgend eine Substitution der Hauptgruppe transformirt, erhält man wieder eine zur Identität congruente Substitution; m. a. W.:

Die Principaluntergruppen sind in der Hauptgruppe ausgezeichnet enthalten.

Der *Index der zum Modul n gehörenden Principaluntergruppe*, also die Anzahl der modulo n verschiedenen Substitutionen bestimmt sich*) für primzahlige Moduln folgendermassen:

Die Zahlen a in (12) können alle (mod. n) verschiedene Werthsysteme annehmen, mit Ausnahme des Systems:

$$a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv 0 \pmod{n}$$

(mit welchem die Gleichung $[a, c] = 1$ nicht befriedigt werden könnte), im ganzen also $n^4 - 1$ Werthsysteme. Sind die a bestimmt, so können drei von den c noch willkürlich angenommen werden, was auf n^3 Arten möglich ist; das vierte ist dann durch $[a, c] = 1$ bestimmt. Sind die a und c fixirt, so müssen die b den Gleichungen $[a, b] = 0$, $[b, c] = 0$ genügen, was durch n^2 mod. n verschiedene Werthsysteme geschehen kann; von diesen ist aber wieder dasjenige unbrauchbar, in welchem alle b durch n theilbar sind. Die d können dann noch auf n Arten den drei übrigen Gleichungen (12) gemäss bestimmt werden.

Beschränkt man sich also auf Modulfunctionen, so hat man das Resultat:

Ist n eine Primzahl, so beträgt der Index der Principaluntergruppe n^{ter} Stufe innerhalb der Abel'schen Gruppe:

$$N = (n^4 - 1) \cdot n^3 \,.\, (n^2 - 1) \cdot n. \tag{49}$$

Werden auch die h in Betracht gezogen, welche n^4 mod. n verschiedene Werthe annehmen können, so folgt:

Der Index der Principaluntergruppe n^{ter} Stufe innerhalb der Hauptgruppe beträgt, wenn n Primzahl:

$$n^4 N. \tag{50}$$

*) C. Jordan, traité des subst. p. 176.

§ 18.

Der n^{ten} Stufe adjungirte Functionen.

Die Untersuchung derjenigen Functionen, welche im Sinne des § 15 zu einer bestimmten Stufe gehören, wird häufig dadurch erleichtert, dass man gleichzeitig mit ihnen noch gewisse andere Functionen betrachtet, welche bei den Operationen der zugehörigen Congruenzgruppe zwar nicht völlig ungeändert bleiben, aber doch nur einfache leicht angebbare Aenderungen erfahren. Insbesondere gilt das von denjenigen Functionen, bei welchen diese Aenderungen nur in dem Hinzutreten multiplicativer Einheitswurzeln bestehen. Diese werden daher mit einem besonderen Namen versehen, indem man definirt:

Aendert sich eine Function bei den Operationen einer Congruenzuntergruppe n^{ter} Stufe nur um multiplicative m^{te} Wurzeln der Einheit, so wird sie „in Bezug auf m^{te} Einheitswurzeln zur n^{ten} Stufe adjungirt“ genannt.

Diejenige Untergruppe, zu welcher eine solche Function wirklich gehört, braucht dabei keineswegs eine Congruenzuntergruppe zu sein.

Bisher wurde daran festgehalten, dass nur *eindeutige* Functionen der transcendenten Variabeln in Betracht gezogen werden sollten. Dadurch würden alle diejenigen Formen ausgeschlossen werden, bei welchen die in dem Satze pag. 222 erwähnte Potenz von p_{12} keinen ganzzahligen Exponenten besitzt, also alle Formen von gebrochener Dimension in den transcendenten Argumenten. Gleichwohl drängen sich solche Formen vielfach der Untersuchung auf, und es scheint daher ihre Ausschliessung nicht gerechtfertigt. Es möge daher der Kreis der zu untersuchenden Functionen durch die folgende Festsetzung erweitert werden:

Neben den eindeutigen Formen der w, ω sollen auch solche mehrdeutige Formen derselben beigezogen werden, welche durch Multiplication mit einer gebrochenen Potenz von p_{12} in eindeutige Functionen der Normalintegrale und Thetamoduln übergehen.

Solche Functionen werden sich, wenn die Variabeln geschlossene Wege durchlaufen, um Einheitswurzeln ändern können, die man nur zu bestimmen im Stande ist, wenn man die Wege kennt, welche die einzelnenen homogenen Variabeln durchlaufen haben (nicht nur den Weg ihres Verhältnisses).

Wie aber sind — so wird man fragen müssen — Formen dieser Art in die Stufeneintheilung einzuordnen? Das wird offenbar dadurch geschehen können, dass man die niedrigste Potenz der betreffenden Form bildet, welche von ganzzahliger Dimension und somit in den ω eindeutig ist. Gehört diese Potenz überhaupt nicht in die Stufentheorie,

so wird die Form selbst um so weniger dahin gehören; bleibt die Potenz aber bei einer Congruenzuntergruppe n^{ter} Stufe ungeändert, so wird man berechtigt sein, die Form selbst als dieser Stufe adjungirt zu betrachten.

Diese Ueberlegungen mögen zusammengefasst werden in die Formulirung:

Im weiteren Sinne sollen auch solche Formen der n^{ten} Stufe adjungirt heissen, welche bei den Operationen dieser Stufe sich um multiplicative Einheitswurzeln ändern, die durch Angabe der Operation allein, ohne Angabe des Weges, auf welchen die ursprünglichen Werthe der homogenen Variabeln in die neuen übergeführt werden, sich nicht bestimmen lassen.

§ 19.

Rationalitätsbereiche, volle Formensysteme, volle Relationensysteme.

Durch die Stufeneintheilung ist nun den weiteren Entwickelungen ein bestimmtes Programm vorgezeichnet.

In erster Linie wird man verlangen, alle Functionen der einzelnen Stufe zu kennen. Das wird dann als erreicht angesehen werden können, wenn man eine endliche Anzahl solcher Functionen kennt, durch welche sich alle andern derselben Stufe rational darstellen lassen; oder um die gebräuchlichen Ausdrücke zu benutzen: es wird sich darum handeln, *den der einzelnen Stufe zugeordneten Rationalitätsbereich durch ein volles System associirter Formen festzulegen.*

Es wird dann weiter erforderlich sein, die *algebraischen Relationen* aufzusuchen, welche die Formen dieses Systems einerseits unter sich, andererseits mit den Formen der niedrigeren Stufen, besonders der ersten, verbinden. Diese Relationen besitzen bestimmte algebraische Eigenthümlichkeiten, über deren Natur eben der Umstand Aufklärung verschafft, dass man im Stande ist, alle in ihnen auftretenden Grössen derart als eindeutige Functionen unabhängiger Veränderlicher darzustellen, dass die Relationen identisch (für alle zulässigen Werthe dieser Variabeln) erfüllt werden. Damit ist dann zugleich, bestimmter als es schon in § 9 geschehen ist, den *algebraischen Anwendungen der* Theorie der Weg gewiesen: es wird sich darum handeln, *die algebraischen Eigenschaften derjenigen Relationen zu charakterisiren, in deren Natur man dadurch Einsicht erhält, dass man im Stande ist, sie durch Einsetzen hyperelliptischer Functionen von unabhängigen Veränderlichen identisch zu befriedigen*, oder wie man es häufig auszudrücken pflegt „*welche man durch hyperelliptische Functionen zu lösen im Stande ist.*“

Die Einführung des *formentheoretischen* Gesichtspunkts modificirt beide Fragestellungen. Man wird sein Augenmerk darauf richten können, alle *Formen* der einzelnen Stufe aufzustellen; und man wird

dies dadurch zu erreichen streben, dass man nach einer endlichen Anzahl von Formen fragt, durch welche sich alle Formen derselben Stufe *rational und ganz* darstellen lassen.

Dass ein solches endliches volles Formensystem in jedem Falle existirt, wird man aus den Untersuchungen des Herrn Hilbert*) schliessen dürfen; man wird dann die Aufgabe folgendermassen zu formuliren haben:

Für jede Stufe ist ein zugehöriges volles Formensystem aufzustellen.

Dem ganz entsprechend würde die zweite Fragestellung zu modificiren sein. Man würde alle auftretenden Relationen so zu schreiben haben, dass sie aussagen: bestimmte ganze Functionen der Formen des Systems sind identisch Null. Man würde dann nur solche Relationen dieser Art als selbständig aufzufassen haben, deren linke Seiten sich nicht aus den linken Seiten einfacherer Relationen mit ganzen Functionen als Coefficienten rational und ganz zusammensetzen lassen, und man würde eine erschöpfende Aufzählung aller solcher selbständigen Relationen verlangen können; m. a. W. die Aufgabe würde sein, *dem vollen Formensystem ein volles Relationensystem an die Seite zu stellen.*

Uebrigens sind diese Fragen nach den vollen Systemen bei der gegenwärtigen Entwicklung der Theorie keineswegs von unmittelbarer Bedeutung: für diejenigen Fragen der Anwendung, welche zur Zeit allein in Betracht kommen, genügt stets die Kenntniss aller derjenigen Formen u. bezw. Relationen, *deren Grad eine bestimmte Grenze nicht überschreitet.* Deren erschöpfende Aufzählung aber kann in den meisten Fällen mit weit einfacheren Mitteln geleistet werden. —

Alle diese Aufgaben nun, die hier für die ganze Stufe, m. a. W. für die Principaluntergruppe, ausgesprochen sind, werden in gleicher Weise für die übrigen Untergruppen der Stufe sich formuliren lassen.

Im Folgenden wird es sich nun keineswegs darum handeln, diese Aufgaben, sei es allgemein, sei es für specielle Untergruppen, zu lösen oder auch nur systematisch in Angriff zu nehmen. Vielmehr sollen alle diese allgemeinen Formulirungen zunächst nur dazu dienen, den folgenden Einzeluntersuchungen bestimmte anzustrebende Zielpunkte anzuweisen und die Stellen zu bezeichnen, an welchen die erhaltenen Einzelresultate in einer systematischen Entwicklung Platz finden würden.

---

*) Gött. Nachr. 1888, p. 450.

III. Abschnitt.

Specielle Discussion der ersten und der zweiten Stufe.

§ 20.

Hyperelliptische Formen I. Stufe.

Zum Zwecke der Aufstellung der hyperelliptischen Formen I. Stufe möge zurückgegriffen werden auf die algebraische Definition der §§ 10, 11. Zunächst handelt es sich um die Aufzählung der *Modulformen I. Stufe*: das sind nach den Erörterungen a. a. O. keine andern als die *sieben Coefficienten der Grundform f*.

Von eigentlichen hyperelliptischen Formen I. Stufe mögen hier allein diejenigen Erwähnung finden, welche von nur *zwei* Stellen $x'x''$ des algebraischen Gebildes abhängen. Für solche reducirt sich die in § 11 geforderte Eigenschaft, für alle corresidualen Werthsysteme denselben Werth anzunehmen, einfach auf die Symmetrie in x' und x''; denn ein allgemeines Punktepaar des hyperelliptischen Gebildes vom Geschlechte 2 ist nur mit sich selbst äquivalent. Alle *Functionen* dieser Art im erweiterten Sinne des § 11 werden sich, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, rational ausdrücken lassen durch die folgenden vier:

$$(51)\quad X_1 = x' + x'',\ X_2 = x' \cdot x'',\ X_3 = \sqrt{f(x')}\sqrt{f(x'')},\ Y = \sqrt{f(x')} + \sqrt{f(x'')}.$$

Aus diesen lassen sich an Formen gewinnen einmal die folgenden vier:

$$(52)\qquad \mathsf{X}_1 = x_1'x_1'',\quad \mathsf{X}_2 = x_1'x_2'' + x_2'x_1'',\quad \mathsf{X}_3 = x_2'x_2'',$$
$$\mathsf{X}_4 = \sqrt{f(x_1', x_2')} \cdot \sqrt{f(x_1'', x_2'')};$$

Dann aber noch (an Stelle des einen Y) vier weitere der Form:

$$(53)\quad \mathsf{Y}_\alpha = x_1'^{\alpha} x_2'^{3-\alpha} \sqrt{f(x_1'', x_2'')} + x_1''^{\alpha} x_2''^{3-\alpha} \sqrt{f(x_1', x_2')},\quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

welche auch unter Einführung eines Hilfspunkts zu:

$$(54)\qquad \mathsf{Y}_t = (x't)^3 \sqrt{f(x_1'', x_2'')} + (x''t)^3 \sqrt{f(x_1', x_2')}$$

zusammengezogen werden können und erst *diese* 8 *Formen werden zusammen mit den* 7 *Coefficienten* $a_0, a_1 \ldots a_6$ *das volle Formensystem I. Stufe darstellen.*

Diese Functionen und Formen sind nun durch eine Reihe Relationen verbunden. Die 7 Coefficienten a zwar sind von einander unabhängig; aber die vier Functionen (51) hängen von nur zwei unabhängigen Veränderlichen ab und müssen daher durch zwei Relationen mit einander verbunden sein. Solche zwei Relationen erhält man leicht in der Gestalt:

$$(55)\qquad X_3^2 = G_6(X_1, X_2);\qquad Y^2 = G_6'(X_1, X_2) + 2X_3$$

indem G_6, G_6' ganze Functionen 6. Grades von X_1, X_2 bedeuten, deren Coefficienten sich rational (und ganz) aus den a zusammensetzen lassen.

§ 21.

Die Kummer'sche Fläche, bezogen auf ein rationales Coordinatensystem.

Statt der ersten Gleichung (55) kann auch eine Gleichung erhalten werden, welche nur vom 4. Grade ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur statt X_3 eine andere Function:

$$(56) \qquad \overline{X}_3 = \frac{\sqrt{f(x')}\sqrt{f(x'')} + F(x', x'')}{(x' - x'')^2}$$

einzuführen, welche mit Y_3 durch eine umkehrbar eindeutige Beziehung mit in X_1, X_2 rationalen Coefficienten verbunden, also X_3 vollständig zu vertreten geeignet ist. Unter $F(x', x'')$ ist dabei eine ganze symmetrische Function von x' und x'' verstanden, welche in jeder dieser Grössen vom 3. Grade ist und für $x' = x''$ mit $f(x')$ identisch wird. Die verlangte Gleichung wird sofort erhalten, wenn man aus der Definition von $\overline{X}_3$ die Wurzeln entfernt; man findet zunächst:

$$(57) \qquad \overline{X}_3^2 - 2\overline{X}_3 \cdot \frac{F(x', x'')}{(x' - x'')^2} + \frac{F(x', x'')^2 - f(x') \cdot f(x'')}{(x' - x'')^4} = 0.$$

Nun ist $(x' - x'')^2$ eine ganze Function 2. Grades, $F(x', x'')$ eine solche 3. Grades von X_1 und X_2; ferner ist $F(x', x'')^2 - f(x') \cdot f(x'')$ durch $x' - x''$, also wegen der Symmetrie in x' und x'' auch durch $(x' - x'')^2$ theilbar, und der Quotient ist eine ganze Function 4. Grades von X_1 und X_2. Wird also die Gleichung (57) mit $(x' - x'')^2$ multiplicirt, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(58) \qquad \overline{X}_3^2 \cdot G_2(X_1 X_2) + \overline{X}_3 \cdot G_3(X_1, X_2) + G_4(X_1, X_2) = 0,$$

in welcher G_2, G_3, G_4 ganze Functionen der angegebenen Grade bezeichnen.

Diese Gleichung (58), welche die erwähnte reducirte Gestalt der ersten Gleichung (55) vorstellt, ist vom vierten Grade in den drei Variabeln X_1, X_2, $\overline{X}_3$. Deutet man diese als Punktcoordinaten im dreidimensionalen Raume, so stellt Gleichung (58) eine Fläche vierten Grades dar, welche wir eine *Kummer'sche Fläche**) nennen wollen, indem wir den Nachweis ihrer Identität mit der gewöhnlich so genannten Fläche auf später verschieben**).

---

*) Dies ist offenbar die einfachste Definition der Kummer'schen Fläche. Man vergleiche übrigens, was die Beziehung derselben zu den hyperelliptischen Functionen angeht, die zusammenfassende Darstellung bei Reichardt. (Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen, Leipz. Diss. 1887, auch Nova acta Leop. Bd. 50).

**) Vgl. p. 241, Fussnote.

Die Werthe von X_1 und X_2 bestimmen vier Punktepaare des hyperelliptischen Gebildes, die etwa (vgl. z. B. diese Ann. Bd. 27, p. 446) mit:

$$x', x'', \quad \bar{x}', \bar{x}'', \quad x', \bar{x}'', \quad \bar{x}', x''$$

bezeichnet werden mögen. Wird noch der Werth von X_3 oder $\overline{X}_3$ hinzugenommen, so werden von diesen vier Punktepaaren die beiden letzten ausgeschlossen, während die beiden ersten bleiben. Dass kann aber folgendermassen ausgedrückt werden:

Jedem Punktepaare des hyperelliptischen Gebildes entspricht ein und nur ein Punkt der Kummer'schen Fläche, aber jedem Punkte der Kummer'schen Fläche entsprechen im allgemeinen zwei und nur zwei Punktepaare des hyperelliptischen Gebildes.

Die Trennung dieser beiden Punktepaare geschieht nun dadurch, dass man noch die Function Y mit heranzieht, welche für das eine jener Punktepaare den entgegengesetzten Werth annimmt wie für das andere. Das legen wir uns auf Grund der zweiten Gleichung (55) dahin aus, dass wir uns die Kummer'sche Fläche als doppelt überdeckt vorstellen; und wir erhalten so das Resultat:

„*Die Punktepaare des hyperelliptischen Gebildes entsprechen im allgemeinen in umkehrbar eindeutiger Weise den Punkten der doppelt überdeckten Kummer'schen Fläche.*“

Was die in den beiden letzten Sätzen beigefügten Worte „im allgemeinen“ betrifft, so sind dieselben dahin zu präcisiren, dass nur *eine* Ausnahme besteht, indem *dem unendlich fernen Punkte der Fläche auf der $\overline{X}_3$-Axe* (für welchen also $\overline{X}_3 = \infty$, X_1 und X_2 endlich), *die Gesammtheit der specialisirten Punktepaare des Gebildes entspricht*, d. h. derjenigen Punktepaare, für welche $x' = \bar{x}''$ ist. Weitere Ausnahmen aber sind nicht vorhanden.

Die doppelte Ueberdeckung der Fläche ist übrigens über derselben *unverzweigt*, indem $Y^2 = 0$ eine *Berührungsfläche* der Kummer'schen Fläche vorstellt.

Will man die Gleichung der Kummer'schen Fläche in homogener Form haben, so muss man, um den Nenner von $\overline{X}_3$ zu beseitigen, die übrigen Coordinaten mit $(x'x'')^2$ multipliciren. Man würde also an Stelle der vier Formen (52) die vier folgenden zu Grunde zu legen haben:

$$(59)\quad \begin{aligned} \overline{\mathsf{X}}_1 &= (x'x'')^2 x_1' x_1''; & \overline{\mathsf{X}}_2 &= (x'x'')^2 (x_1' x_2'' + x_2' x_1''); \\ \overline{\mathsf{X}}_3 &= (x'x'')^2 x_2' x_2''; & \mathsf{X}_4 &= \sqrt{f(x')}\,\sqrt{f(x'')} + F(x', x''). \end{aligned}$$

Die Gleichung der Kummer'schen Fläche nimmt dann die Gestalt an:

$$(60)\quad \overline{\mathsf{X}}_4^{\,2} \cdot G_2(\overline{\mathsf{X}}_1, \overline{\mathsf{X}}_2, \overline{\mathsf{X}}_3) + \overline{\mathsf{X}}_4 \cdot G_3(\overline{\mathsf{X}}_1, \overline{\mathsf{X}}_2, \overline{\mathsf{X}}_3) + G_4(\overline{\mathsf{X}}_1, \overline{\mathsf{X}}_2, \overline{\mathsf{X}}_3) = 0$$

in welcher unter den G ganze homogene Functionen der Grade 2, 3, 4

zu verstehen sind. Der Ausnahmepunkt von welchem soeben die Rede war, hat in diesem homogenen Systeme die Coordinaten:

(61) $$\overline{\mathsf{X}}_1 = 0, \quad \overline{\mathsf{X}}_2 = 0, \quad \overline{\mathsf{X}}_3 = 0, \quad \overline{\mathsf{X}}_4 \gtrless 0;$$

er ist also ein Knotenpunkt und:

$$G_2(\overline{\mathsf{X}}_1, \overline{\mathsf{X}}_2, \overline{\mathsf{X}}_3) = 0$$

ist die Gleichung des Tangentialkegels, welchen die Fläche in ihm besitzt.

Die doppelte Ueberdeckung der Fläche stellt sich in diesem homogenen Systeme durch irgend eine der Gleichungen:

(62) $$\overline{\mathsf{Y}}_t^2 = G_6(\overline{\mathsf{X}}_1, \overline{\mathsf{X}}_2, \overline{\mathsf{X}}_3, \overline{\mathsf{X}}_4)$$

dar, welche als Analoga zu der zweiten Gleichung (55) erhalten werden, wenn:

(63) $$\overline{\mathsf{Y}}_t = (x'x'')^3 (t't'')^3 \mathsf{Y}_t$$

gesetzt wird. Welche von diesen Gleichungen gewählt wird, ist gleichgültig; denn man zeigt leicht, dass auch Gleichungen der Form bestehen:

(64) $$\overline{\mathsf{Y}}_t \cdot \overline{\mathsf{Y}}_{t'} = G_6(\overline{\mathsf{X}}_1, \overline{\mathsf{X}}_2, \overline{\mathsf{X}}_3, \overline{\mathsf{X}}_4),$$

sodass also die verschiedenen $\overline{\mathsf{Y}}$ sich rational durch einander ausdrücken und die den verschiedenen Werthe von t entsprechenden Gleichungen (62) dieselbe Irrationalität auf der Fläche definiren. Wir haben sonach eine ganze Schaar Berührungsflächen 6. Ordnung, welche alle dieselbe Irrationalität auf der Kummer'schen Fläche definiren.

Das *Coordinatensystem*, auf welches die Kummer'sche Fläche in den Gleichungen (58) oder (60) bezogen erscheint, kann als ein *rationales* bezeichnet werden, insofern die Coefficienten mit deren Hilfe sich die Coordinaten der einzelnen Punkte als rationale Functionen der Punktepaare des algebraischen Gebildes ausdrücken, rational von den Coefficienten der Grundform f abhängen. Wollte man aber von der — etwa in einem ganz beliebigen Coordinatensystem gegebenen — Kummer'schen Fläche ausgehen, so würde man zur *Einführung* unseres Coordinatensystems allerdings einer Irrationalität bedürfen, da der durch (61) bestimmte Knotenpunkt der Fläche von einer solchen abhängt.*)

*) Wollte man Gewicht darauf legen, keine entbehrlichen Hilfspunkte zu benutzen, wie es in den Formeln des Textes die Grundpunkte des Coordinatensystems sind (vgl. § 11), so würde man in den Formen $\overline{\mathsf{X}}_1\ \overline{\mathsf{X}}_2\ \overline{\mathsf{X}}_3$ die bilinearen Factoren, welche nach Abtrennung des Determinantenquadrats übrig bleiben, zu ersetzen haben durch Polaren von irgend drei quadratischen Covarianten von f, etwa l_x^2, m_x^2, n_x^2 *) und die Form F durch eine Polare von f selbst, sodass man erhielte:

*) Vgl. Clebsch, binäre Formen p. 296.

§ 22.

Hyperelliptische Modulformen II. Stufe.

Die Untersuchung der hyperelliptischen Formen II. Stufe soll in den folgenden Paragraphen in der Weise geführt werden, dass mit der gruppentheoretischen Untersuchung der Principaluntergruppe II. Stufe begonnen wird. Daran wird sich die Aufstellung eines Systems von hyperelliptischen Formen schliessen, die bei den Operationen dieser Gruppe ungeändert bleiben. Jede einzelne dieser Formen, und ebenso bestimmter Combinationen derselben, wird aber auch noch bei andern Operationen ungeändert bleiben; und dadurch werden wir zu einer Reihe weiterer Untergruppen II. Stufe gelangen.

Diese Untersuchung möge begonnen werden mit einer Reihe von Sätzen des Herrn C. Jordan, für deren Beweis auf dessen traité des substitutions verwiesen werde:

I. *Jede Monodromieänderung der Verzweigungspunkte, welche jeden einzelnen derselben in seine Anfangslage zurückführt, kann zusammengesetzt werden aus einer Anzahl elementarer Aenderungen, welche darin bestehen, das jedesmal ein Verzweigungspunkt einen andern umkreist.**)

II. *Jede solche elementare Aenderung bewirkt eine Transformation der Perioden, welche modulo 2 zur Identität congruent ist.***)

Aus diesen beiden Sätzen folgt:

III. *Jede Monodromieänderung der Verzweigungspunkte, welche jeden einzelnen derselben in seine Anfangslage zurückführt, bewirkt eine Transformation der Perioden, welche mod. 2 zur Identität congruent ist.****)

IV. *Die Principaluntergruppe II. Stufe entsteht aus folgenden fünf erzeugenden Substitutionen.*†)

$$\mathrm{X}_1 = (x'x'')^2\, l_{x'}\, l_{x''}, \qquad \mathrm{X}_2 = (x'x'')^2\, m_{x'}\, m_{x''}, \qquad \mathrm{X}_3 = (x'x'')^2\, n_{x'}\, n_{x''},$$

$$\mathrm{X}_4 = \sqrt{f(x')\, f(x'')} + a_{x'}^3\, a_{x''}^3.$$

(Vgl. auch diese Ann. Bd. 27, p. 463) Die Coefficienten in der Gleichung der Kummer'schen Fläche werden dann rationale ganze Functionen der vier geraden Fundamentalinvarianten A, B, C, D der Form 6. Ordnung (vgl. etwa Clebsch, a. a. O. p. 451 ff.) wo die betr. Rechnung für $x = x'$ durchgeführt ist. Dagegen kann eine Form der Art wie Υ überhaupt nicht ohne Einführung mindestens eines Hilfspunktes gebildet werden, da die Form 6. Ordnung keine Covariante entsprechender Natur mit nur zwei Reihen von Variabeln besitzt. Man würde also immer genöthigt sein eine Form wie etwa das Υ_t des Textes zu benutzen.

*) a. a. O. p. 357 f.

**) a. a. O. p. 361, Z. 8.

***) a. a. O. p. 361, Z. 10.

†) a. a. O. p. 360.

$$
(65)\quad \begin{array}{llll}
S_1: \omega_1' = \omega_1 + 2\omega_3, & \omega_2' = \omega_2, & \omega_3' = \omega_3, & \omega_4' = \omega_4, \\
S_2: \omega_1' = \omega_1, & \omega_2' = \omega_2, & \omega_3' = \omega_3 - 2\omega_1, & \omega_4' = \omega_4, \\
S_3: \omega_1' = \omega_1, & \omega_2' = \omega_2 + 2\omega_4, & \omega_3' = \omega_3, & \omega_4' = \omega_4, \\
S_4: \omega_1' = \omega_1, & \omega_2' = \omega_2, & \omega_3' = \omega_3, & \omega_4' = \omega_4 - 2\omega_2, \\
S_5: \omega_1' = \omega_1 - 2\omega_2, & \omega_2' = \omega_2, & \omega_3' = \omega_3, & \omega_4' = \omega_4 + 2\omega_3.\text{*)}
\end{array}
$$

V. *Jede dieser fünf Substitutionen kann durch Monodromie der Verzweigungspunkte in der Weise erzielt werden, dass jeder einzelne Verzweigungspunkt in seine Anfangslage zurückkehrt.***)

Aus IV und V ergiebt sich folgende Umkehrung des Satzes III:

VI. *Jede Transformation der Perioden, welche mod.* 2 *zur Identität congruent ist, kann bewirkt werden durch eine Monodromieänderung der Verzweigungspunkte, welche jeden einzelnen derselben in seine Anfangslage zurückführt.*

Den Sätzen III und VI möge noch folgende erweiterte Fassung ertheilt werden:

III a. *Zwei Monodromieänderungen der Verzweigungspunkte, welche dieselben in gleicher Weise permutiren, bewirken nach dem Modul* 2 *congruente Periodentransformationen.*

IV a. *Zwei nach dem Modul* 2 *congruente Periodentransformationen können bewirkt werden durch Monodromieänderungen der Verzweigungspunkte, welche dieselben in gleicher Weise permutiren.*

In der That ist die Anzahl der modulo 2 verschiedenen linearen Periodentransformationen nach (49) $= 15 \,.\, 8 \,.\, 3 \,.\, 2 = 720$, also genau gleich der Anzahl aller möglichen Permutationen der sechs Verzweigungspunkte.

Nun übertragen wir diese Sätze von den Gruppen auf die zugehörigen Functionen; dann sagen sie aus:

Jede rationale Function der Nullstellen von $f(x)$ ist eine hyperelliptische Modulfunction II. Stufe.

Jede hyperelliptische Modulfunction II. Stufe ist eine rationale Function der Nullstellen von $f(x)$.

Daneben bestehen zwei analoge Sätze, welche aus diesen beiden hervorgehen, indem man dem Wort „*rational*“ den Zusatz „*und ganz*“ giebt und für „Modulfunction“ „*Modulform*“ schreibt.

---

*) Die hier als S_5 bezeichnete Substitution ist in der Bezeichnung des Herrn C. Jordan $S_5 S_1 S_4$.

**) a. a. O. p. 360, Z. 21.

§ 23.

Die Richelot'sche Normalform.

Die im vorigen Paragraphen betrachteten Functionen sind invariant in dem erweiterten Sinne des § 11, indem der Uebergang von der Form f_6 selbst zu ihren sechs Linearfactoren die Einführung von fünf Hilfsgrössen bedingt. Will man die Einführung solcher Hilfsgrössen vermeiden, was hier in der That in einfacher Weise möglich ist, so wird man folgendermassen verfahren. Man wird die Form $f(x)$, in ihre linearen Factoren zerlegt, etwa folgendermassen schreiben:

$$(66) \qquad f_x^6 = (\alpha x)(\beta x)(\gamma x)(\delta x)(\varepsilon x)(\zeta x).$$

Dann werden sich alle rationalen Invarianten der sechs Factoren, welche keine Hilfsgrössen enthalten, zusammensetzen lassen aus den 15 Determinanten:

$$(67) \qquad (\alpha\beta),\ (\alpha\gamma), \dots (\alpha\zeta),\ (\beta\gamma) \dots (\varepsilon\zeta).$$

Aber nicht jede Function dieser Determinanten wird eine reine Invariante der Grundform f sein. Diese ändert sich nämlich nicht, wenn man etwa α_1, α_2 durch $m\alpha_1$, $m\alpha_2$ und gleichzeitig β_1, β_2 durch $m^{-1}\beta_1$, $m^{-1}\beta_2$ ersetzt. *Ein Product aus einer Anzahl der Determinanten* (67) *ist daher nur dann eine reine hyperelliptische Modulform — eine Form der Coefficienten von f selbst — wenn es jedes der Symbole $\alpha, \beta \dots \zeta$ ebenso oft enthält als jedes andere.**)

Jede solche Invariante kann aufgefasst werden als das Product aus einer *absoluten* Invariante in eine Potenz irgend einer linearen Invariante. Man wird also im Besitze aller reinen Modulformen II. Stufe sein, sobald man alle absoluten Invarianten der sechs Linearformen (αx), $(\beta x) \dots (\zeta x)$ und ausserdem eine lineare Invariante kennt.

Diese absoluten Invarianten sind nun sämmtlich rationale Functionen der aus den Determinanten (67) zu bildenden *Doppelverhältnisse;* die letzteren aber lassen sich rational aus drei geeigneten unter ihnen zusammensetzen, als welche etwa:

$$(68) \qquad \varkappa^2 = \frac{(\gamma\zeta)(\beta\alpha)}{(\gamma\alpha)(\beta\zeta)},\quad \lambda^2 = \frac{(\delta\zeta)(\beta\alpha)}{(\delta\alpha)(\beta\zeta)},\quad \mu^2 = \frac{(\varepsilon\zeta)(\beta\alpha)}{(\varepsilon\alpha)(\beta\zeta)}$$

gewählt werden mögen. Eine lineare Invariante, welche später noch Verwendung finden wird und deshalb auch hier gleich benutzt werden möge, ist:

$$(69) \qquad E = \frac{(\beta\zeta)^2}{(\alpha\beta)(\alpha\zeta)} \cdot (\gamma\alpha)(\delta\alpha)(\varepsilon\alpha).$$

Damit ist das Resultat erhalten:

Alle reinen Modulfunctionen II. Stufe sind rationale Functionen

*) Auch dieser Punkt sollte in den Lehrbüchern der Invariantentheorie mehr hervorgehoben werden, als es bis jetzt der Fall ist.

von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2; *alle reinen Modulfunctionen II. Stufe sind Producte solcher Functionen in Potenzen von* E.

An diese Modulfunctionen II. Stufe knüpft eine canonische Darstellung des hyperelliptischen Gebildes an, von welcher vielfach Gebrauch gemacht wird und auch im folgenden gelegentlich Gebrauch gemacht werden soll: *die Richelot'sche Normalform.**) Um die allgemeine Form auf diese zurückzuführen, setze man:

(70)
$$(\alpha x) = \frac{\varrho}{(\beta\zeta)}\, y_1,$$
$$(\zeta x) = \frac{\varrho}{(\beta\alpha)}\, y_2;$$

damit wird zugleich erhalten:

$$(\beta x) = \frac{\varrho(\beta\alpha)}{(\zeta\alpha)(\beta\alpha)}\,(y_2 - y_1),$$
$$(\gamma x) = \frac{\varrho(\gamma\alpha)}{(\zeta\alpha)(\beta\alpha)}\,(y_2 - \varkappa^2 y_1),$$
$$(\delta x) = \frac{\varrho(\delta\alpha)}{(\zeta\alpha)(\beta\alpha)}\,(y_2 - \lambda^2 y_1),$$
$$(\varepsilon x) = \frac{\varrho(\varepsilon\alpha)}{(\zeta\alpha)(\beta\alpha)}\,(y_2 - \mu^2 y_1).$$

Soll die Substitutionsdeterminante zu 1 gemacht werden, so ist:

(71) $$\varrho = \sqrt{(\beta\alpha)(\alpha\zeta)(\beta\zeta)}$$

zu setzen. Geschieht dies, so geht die Form f über in:

(72) $$F = E\cdot y_1\cdot y_2\cdot(y_2 - y_1)\cdot(y_2 - \varkappa^2 y_1)\cdot(y_2 - \lambda^2 y_1)\cdot(y_2 - \mu^2 y_1).$$

Wird der Factor E nicht berücksichtigt und unhomogene Schreibweise benutzt, so erhält f diejenige Gestalt, welche als Richelot'sche Normalform bezeichnet zu werden pflegt, nämlich:

(73) $$F = y(1-y)(1-\varkappa^2 y)(1-\lambda^2 y)(1-\mu^2 y).$$

§ 24.

Eigentliche Functionen II. Stufe.

Wir wenden uns nun zur Aufstellung des Systems der eigentlichen hyperelliptischen Functionen II. Stufe. Als eindeutige Functionen der transcendenten Argumente dürfen dieselben über der Riemann'schen Fläche nicht verzweigt sein; *über der x-Ebene dürfen sie daher nur in den Punkten $x = \alpha, \beta, \ldots \zeta$ Verzweigungen besitzen.* Ferner sollen sie nach zweimaliger Durchlaufung eines Periodenwegs zum Anfangswerth zurückkehren; nach einmaliger Durchlaufung eines solchen werden

*) Crelle J. Bd. 16, p. 226.

sie daher eine Aenderung von der Periode zwei erfahren haben. Daraus folgt nach einem bekannten Principe:

Alle hyperelliptischen Functionen II. Stufe lassen sich rational aus solchen Functionen zusammensetzen, welche höchstens das Zeichen wechseln, wenn eines der algebraischen Argumente einen Periodenweg durchläuft.

Sie setzen sich also zusammen aus Ausdrücken der Form:

$$(74)\qquad \sqrt{(\alpha x)},\ \sqrt{(\beta x)},\ \ldots\ \sqrt{(\zeta x)}.$$

Versuchen wir also aus den Ausdrücken dieser Form Functionen aufzubauen, welche unsern sonstigen Bedingungen genügen. Wir erhalten zunächst einmal die folgenden sechs hyperelliptischen Functionen II. Stufe:

$$(75)\qquad \begin{gathered} D_0=\sqrt{(\alpha x')(\alpha x'')},\ D_1=\sqrt{(\beta x')(\beta x'')},\ D_2=\sqrt{(\gamma x')(\gamma x'')},\\ D_3=\sqrt{(\delta x')(\delta x'')},\ D_4=\sqrt{(\varepsilon x')(\varepsilon x'')},\ D_5=\sqrt{(\zeta x')(\zeta x'')}. \end{gathered}$$

Soll dem Homogeneitätsgesetz in Bezug auf die $\alpha, \beta \ldots \zeta$ genügt werden, so sind diese Formen noch mit geeigneten Invarianten zu multipliciren. Dass solche, wenn die Rationalität in den $\alpha, \beta \ldots \zeta$ gewahrt werden soll, nur unter Benutzung von Hülfsgrössen gebildet werden können, stört uns ja nicht.

Aus diesen sechs Formen (75) werden nun alle symmetrischen Formen sich zusammensetzen lassen, welche nur *eine* Quadratwurzel aus einem Producte von Linearfactoren $(\alpha x')$, $(\alpha x'')$ ... enthalten; dieselben können als *gerade* bezeichnet werden, indem sie auch dem Zeichen nach ungeändert bleiben, wenn gleichzeitig x' durch $\bar{x}'$, x'' durch $\bar{x}''$ ersetzt wird. Aber man wird auch *ungerade* Formen der verlangten Art bilden können durch additive Vereinigung zweier solcher Wurzelgrössen, welche bei Vertauschung von x' mit x'' in einander übergehen. Wenn nun eine solche Wurzel einen der Punkte $\alpha \ldots \zeta$ in zwei Factoren enthält, so kann man einen der Factoren $(\alpha x')$, $(\alpha x'')$, D_0 u. s. w. herausheben. Sind alle solchen Factoren beseitigt, so bleibt unter dem Wurzelzeichen ein Product, das jedes der Variabelnpaare $\alpha \ldots \zeta$ einmal enthalten muss; denn sonst könnte es nur durch Hinzufügung solcher Factoren in $\alpha, \beta \ldots \zeta$ homogen gemacht werden, welche als Functionen dieser Grössen noch an andern Stellen als x' und x'' verzweigt wären, was nicht sein darf. Es bleiben also nur Wurzel grössen der folgenden drei Typen:

$$(76)\qquad D_{(1,5)}=\sqrt{(\alpha x')(\beta x'')(\gamma x'')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')};$$

$$(77)\qquad D_{(2,4)}=\sqrt{(\alpha x')(\beta x')(\gamma x'')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')};$$

$$(78)\qquad D_{(3,3)}=\sqrt{(\alpha x')(\beta x')(\gamma x')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')}.$$

Nun geht $D_{(1,5)}$ durch Multiplication mit D_0 über in $(\alpha x')\sqrt{f(x'')}$, und

$D_{(2,4)}$ durch Multiplication mit D_1 in $(\beta x')$. $D_{(1,5)}$ oder durch Multiplication mit D_2 in $(\gamma x'')$ $D_{(3,3)}$; ausser den Formen (75) und rationalen Formen von x (Formen I. Stufe) kommen daher nur die aus (78) entspringenden Formen in Betracht, nämlich:

$$\sqrt{(\alpha x')(\beta x')(\gamma x')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')}+\sqrt{(\alpha x'')(\beta x'')(\gamma x''(\delta x')(\varepsilon x')(\zeta x')}$$

welche, wenn:

$$(79)\qquad (\alpha x)(\beta x)(\gamma x)=\varphi(x),\quad (\delta x)(\varepsilon x)(\zeta x)=\psi(x)$$

gesetzt wird, folgendermassen in Determinantenform geschrieben werden können:

$$(80)\qquad D_{\varphi,\psi}=\begin{vmatrix}\sqrt{\varphi(x')} & \sqrt{\psi(x')}\\ -\sqrt{\varphi(x'')} & \sqrt{\psi(x'')}\end{vmatrix}.$$

Sollen die zehn verschiedenen Formen dieser Art auseinandergehalten werden, so möge mit:

$$D_{\substack{hik\\ lmn}}$$

diejenige bezeichnet werden, für welche:

$$\varphi(x)=(\alpha_h x)(\alpha_i x)(\alpha_k x).\quad \psi(x)=(\alpha_l x)(\alpha_m x)(\alpha_n x)$$

ist.

Wir haben also zunächst das Resultat, dass *alle Formen II. Stufe sich rational aus den Formen I. Stufe und den* 16 *Formen* (75) *und* (80) *zusammensetzen lassen.*

Aber auch die Formen I. Stufe sind rational ausdrückbar durch die D, wie man am bequemsten mit Hilfe der Richelot'schen Normalform erkennt. Für dieselbe wird nämlich:

$$(81)\qquad D_0=\sqrt{y'y''},\quad D_1=\sqrt{(1-y')(1-y'')},\quad D_5=1;$$

man hat also:

$$(82)\qquad \begin{aligned} y'+y''&=D_0^2+D_5^2-D_1^2,\\ y'y''&=D_0^2\end{aligned}$$

und dazu:

$$(83)\qquad \sqrt{F(y')}\sqrt{F(y'')}=D_0D_1D_2D_3D_4D_5;$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass jede *gerade* hyperelliptische Form I. oder II. Stufe sich rational durch die $D_0, D_1 \dots D_5$ allein ausdrücken lässt. Zu diesen Formen gehören auch die Quadrate der Determinanten (80), sowie ihre Producte zu je zweien; in der That ist z. B.:

$$(84)\qquad \begin{aligned} D^2_{\substack{012\\345}}= &\ (\alpha x')(\beta x')(\gamma x')(\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'')\\ &+(\alpha x'')(\beta x'')(\gamma x'')(\delta x')(\varepsilon x')(\zeta x')\\ &+2\sqrt{f(x')}\sqrt{f(x'')};\end{aligned}$$

$$(85)\quad D_{\substack{012\\345}} D_{\substack{024\\135}} = D_1 D_4 \left\{(\alpha x')(\gamma x')(\delta x'')(\zeta x'') + (\alpha x'')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x')\right\}$$
$$+ D_0 D_2 D_3 D_5 \left\{(\beta x')(\varepsilon x'') + (\varepsilon x')(\beta x'')\right\},$$

und die hier noch nicht durch die D ausgedrückten Bestandtheile lassen sich mittelst der Formeln (82) und (83) sofort in dieselben umsetzen.

(In ganz analoger Weise kann nun auch gezeigt werden, dass die ungeraden Formen I. Stufe sich rational durch die D ausdrücken lassen; der Gleichung (42) zufolge genügt es, diesen Nachweis für eine derselben zu führen. So erhält man z. B.:

$$(86)\quad D_{\substack{012\\345}} \cdot \left\{(x't)^3 \sqrt{f(x'')} + (x''t)^3 \sqrt{f(x')}\right\}$$
$$= D_0 D_1 D_2 \left\{(x't)^3 (\delta x'')(\varepsilon x'')(\zeta x'') + (x''t)^3 (\delta x')(\varepsilon x')(\zeta x')\right\}$$
$$+ D_3 D_4 D_5 \left\{(x't)^3 (\alpha x'')(\beta x'')(\gamma x'') + (x''t)^3 (\alpha x')(\beta x')(\gamma x')\right\}$$

und kann auch hier die Klammergrössen sofort in die D_i umsetzen).

Damit ist in der Tat der Satz gewonnen:

Alle hyperelliptischen Formen II. Stufe lassen sich mit Hilfe der 15 *Determinanten* $(\alpha\beta)$ *rational ausdrücken durch* 7 *Formen, nämlich durch die* 6 *Formen* D_i *und irgend eine der* 10 *Formen* $D_{\substack{hik\\lmn}}$.

Man könnte sich demnach auf diese sieben Formen beschränken; dass es sich jedoch aus Symmetriegründen empfiehlt, die 10 $D_{\substack{hik\\lmn}}$ sämmtlich beizubehalten, bedarf keiner weiteren Erörterung.*)

§ 25.

Relationen II. Stufe.

Von den Relationen, welche die Functionen II. Stufe unter sich verbinden, ist eine Anzahl bereits in § 24 zur Sprache gebracht worden. Dieselben sind jedoch nicht die einfachsten, welche es giebt; vielmehr existiren noch einfachere, welche in diesem Paragraphen abgeleitet werden sollen.**) Um dieselben möglichst einfach zu schreiben, werde die Abkürzung:

$$(87)\quad \overline{D}_i = (x'x'')\, D_i$$

eingeführt.

I. Zwischen den Quadraten von je vieren unter den sechs Formen

*) Diese Formen D sind natürlich längst aus der Theorie der Thetafunctionen bekannt.

**) Auch diese Relationen sind aus der Theorie der Thetafunctionen längst bekannt.

D_i (oder auch $\overline{D_i}$) besteht eine homogene lineare Relation. Eine von den 15 so erhaltenen Relationen ist:

$$\begin{vmatrix} D_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ D_1^2 & \beta_1^2 & \beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \\ D_2^2 & \gamma_1^2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_2^2 \\ D_3^2 & \delta_1^2 & \delta_1\delta_2 & \delta_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

$$(88)\quad (\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha)D_3^2 - (\beta\gamma)(\gamma\delta)(\delta\beta)D_0^2 + (\gamma\delta)(\delta\alpha)(\alpha\beta)D_1^2 - (\delta\alpha)(\alpha\beta)(\eta\delta)D_2^2 = 0.$$

II. Die $D_{\substack{hik\\lmn}}$ verschwinden für $x' = \bar{x}''$ und nehmen für $x' = x''$ alle denselben Werth an. Die Differenzen ihrer Quadrate sind also Null sowohl für $x' = x''$, als für $x' = \bar{x}''$, daher durch $(x'x'')$ und als symmetrische Functionen von x' und x'' durch $(x'x'')^2$ theilbar. In der That findet man z. B. aus (84):

$$(89)\qquad (\alpha\gamma)\cdot\left\{D^2_{\substack{012\\345}} - D^2_{\substack{024\\135}}\right\}$$
$$= (\alpha\gamma)(\beta\varepsilon)(x'x'')\left\{(\alpha x')(\gamma x')(\delta x'')(\zeta x'') - (\alpha x'')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x')\right\}.$$

Wird rechts in der Klammer $(\alpha x')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x'')$ addirt und subtrahirt, so geht die rechte Seite über in:

$$(\beta\varepsilon)(x'x'')^2\left\{(\alpha\gamma)(\gamma\delta)(\alpha x')(\zeta x'') + (\alpha\gamma)(\alpha\zeta)(\gamma x'')(\delta x')\right\}$$

und wenn man in der neuen Klammer $(\alpha\zeta)$ $(\gamma\delta)$ $(\alpha x')$ $(\gamma x'')$ addirt und subtrahirt, in:

$$(\beta\varepsilon)\,(x'x'')^2\left\{(\gamma\delta)\,(\gamma\zeta)D_0^2 - (\alpha\delta)\,(\alpha\zeta)D_2^2\right\}.$$

Man erhält somit die Relation:

$$(90)\quad (\alpha\gamma)\left\{D^2_{\substack{012\\345}} - D^2_{\substack{024\\135}}\right\} = (\beta\varepsilon)(\gamma\delta)(\gamma\zeta)\overline{D}_0^2 - (\beta\varepsilon)(\alpha\gamma)(\alpha\zeta)\overline{D}_2^2,$$

welche, wie man leicht abzählt, 90 gleichgebaute Relationen vertritt, die aus ihr durch Vertauschung der Verzweigungspunkte hervorgehen.*)

III. Zu einer dritten Gruppe von Relationen giebt die Reduction der Formen (77) Anlass, indem dieselbe auf verschiedene Weisen geschehen kann. So z. B. hat man, wenn zur Abkürzung:

$$\sqrt{(\alpha x')\,(\beta x')\,(\gamma x'')\,(\delta x'')\,(\varepsilon x'')\,(\zeta x'')} = R_1,$$
$$\sqrt{(\alpha x'')\,(\beta x'')\,(\gamma x')\,(\delta x')\,(\varepsilon x')\,(\zeta x')} = R_2$$

*) Aus den beiden Gruppen von Relationen I und II in Verbindung mit (82), (83), (86) kann man schliessen, dass die Formen X des § 21 sich durch die Quadrate von vier geeigneten unter den Formen $D_{\substack{hik\\lmn}}$ und $\overline{D_i}$ ausdrücken lassen. Auf diesem Wege gelangt man zur Ueberführung der Gleichung der Kummer'schen Fläche aus der Form (60) in die gewöhnlich benutzte, wodurch der pag. 231 Fussn. versprochene Nachweis geliefert ist.

gesetzt wird, die drei Relationen:

$$(91)\qquad \begin{aligned}(\gamma x')R_1 + (\gamma x'')R_2 &= D_2 D_{\substack{012\\345}},\\ (\delta x')R_1 + (\delta x'')R_2 &= D_3 D_{\substack{013\\245}},\\ (\varepsilon x')R_1 + (\varepsilon x'')R_2 &= D_4 D_{\substack{014\\235}},\end{aligned}$$

aus welchen durch Elimination von R_1 und R_2 erhalten wird:

$$(92)\qquad (\gamma\delta)D_4 D_{\substack{014\\235}} + (\delta\varepsilon)D_2 D_{\substack{012\\235}} + (\varepsilon\gamma)D_3 D_{\substack{013\\245}} = 0,$$

— eine von 60 gleichgebauten Relationen.

IV. Endlich lassen sich noch einfache Relationen aus der Formel (85) gewinnen; man erhält z. B., indem man die vier Punkte $\alpha\gamma\delta\zeta$ auf drei Arten in zwei Gruppen von zweien theilt:

$$(93)\qquad \begin{aligned} D_{\substack{012\\345}} \cdot D_{\substack{024\\135}} &= D_1 D_4 \{(\alpha x')(\gamma x')(\delta x'')(\zeta x'') + (\alpha x'')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x')\}\\ &\quad + D_0 D_2 D_3 D_5 \{(\beta x')(\varepsilon x'') + (\beta x'')(\varepsilon x')\};\\ D_{\substack{015\\234}} \cdot D_{\substack{045\\123}} &= D_1 D_4 \{(\alpha x')(\gamma x'')(\delta x'')(\zeta x') + (\alpha x'')(\gamma x')(\delta x')(\zeta x'')\}\\ &\quad + D_0 D_2 D_3 D_5 \{(\beta x')(\varepsilon x'') + (\beta x'')(\varepsilon x')\};\\ D_{\substack{013\\245}} \cdot D_{\substack{034\\125}} &= D_1 D_4 \{(\alpha x')(\gamma x'')(\delta x')(\zeta x'') + (\alpha x'')(\gamma x')(\delta x'')(\zeta x')\}\\ &\quad + D_0 D_2 D_3 D_5 \{(\beta x')(\varepsilon x'') + (\beta x'')(\varepsilon x')\}.\end{aligned}$$

Durch Verbindung dieser Gleichungen zu je zweien erhält man die drei neuen Gleichungen:

$$(94)\qquad \begin{aligned} &D_{\substack{012\\345}} D_{\substack{024\\135}} - D_{\substack{015\\243}} D_{\substack{045\\123}}\\ &= D_1 D_4 \{(\alpha x')(\delta x'') - (\alpha x'')(\delta x')\}\,\{(\gamma x')(\zeta x'') - (\zeta x')(\gamma x'')\}\\ &\qquad = (\alpha\delta)(\gamma\zeta)\overline{D_1}\,\overline{D_4};\\ &D_{\substack{015\\234}} D_{\substack{045\\123}} - D_{\substack{013\\245}} D_{\substack{034\\125}} = (\alpha\gamma)(\zeta\delta)\overline{D_1}\,\overline{D_4};\\ &D_{\substack{013\\245}} D_{\substack{034\\125}} - D_{\substack{012\\345}} D_{\substack{024\\135}} = (\alpha\zeta)(\delta\gamma)\overline{D_1}\,\overline{D_4};\end{aligned}$$

aus welchen sich durch Combination von je zweien derselben die folgende vierte ergiebt:

$$(95)\qquad (\alpha\gamma)(\delta\zeta)D_{\substack{012\\345}} D_{\substack{024\\135}} + (\alpha\delta)(\zeta\gamma)D_{\substack{013\\245}} D_{\substack{034\\125}} + (\alpha\zeta)(\gamma\delta)D_{\substack{015\\234}} D_{\substack{025\\123}} = 0.$$

Solcher Systeme von vier Gleichungen, wie (94) und (95) existiren 15, entsprechend den 15 Paaren von Verzweigungspunkten. —

Dass aus diesen vier Gruppen von Relationen eine grosse Anzahl weiterer durch geeignete Combination sich ableiten lassen, ist von selbst klar. Wir wollen jedoch diesen Punkt nicht weiter verfolgen, sondern uns einer andern Frage zuwenden: der Frage nämlich, welche

von diesen Relationen von einander unabhängig sind. Da die 16 Formen D von drei unabhängigen Veränderlichen X_1, X_2, X_3 (52) abhängen, so können zwischen ihnen nur *dreizehn* unabhängige Relationen bestehen. Um solche aus den Relationen (88)—(95) auszuwählen, kann man folgendermassen verfahren:

Zunächst sind von den 15 Relationen I sicher *drei* solche von einander unabhängig, in welchen drei der auftretenden D_i feste Indices haben, während der vierte Index der Reihe nach die drei übrigen Werthe hat. Aus diesen dreien werden neun von den zwölf übrigen Relationen I dadurch erhalten, dass man je eines der D_i aus je zweien von ihnen, die drei letzten, indem man je zwei D_i aus allen dreien eliminirt; sodass also unter der Gruppe I keine weiteren von einander unabhängigen Relationen vorkommen. Von den 90 Relationen der Gruppe II sind dann sicher *neun* solche von einander und von den Relationen I unabhängig, welche ein und dasselbe $D_{\substack{hik\\lmn}}$ der Reihe nach mit den neun übrigen combinirt enthalten. Durch Elimination des festgehaltenen D aus je zweien von diesen folgen dann 36 weitere Relationen; jede der so erhaltenen 45 Relationen kann mit Hilfe der Relationen I auf zwei Arten in die Gestalt (90) gebracht werden, sodass wir bereits alle 90 Relationen (90) aus den bisher festgestellten unabhängigen erhalten. Um die volle Zahl von dreizehn unabhängigen Relationen zu bekommen, ist es demnach erforderlich noch *eine* Relation aus einer der Gruppen III oder IV hinzuzunehmen.

Aus den so ausgewählten dreizehn Relationen werden sich dann alle übrigen auf *algebraischem* Wege ableiten lassen müssen. Aber es wird nicht immer möglich sein, diese Ableitung in rationaler Weise auszuführen; wie schon daraus hervorgeht, dass z. B. die Relationen der I. und II. Gruppe, sowie die Relation (92) ungestört bleiben, wenn man D_2, D_3, D_4 gleichzeitig im Vorzeichen ändert, ohne die übrigen D zu ändern, während dies bei andern Relationen der III. und IV. Gruppe nicht der Fall ist.*) Es ist eine unerledigte Frage, wie man eine kleinste Zahl von Relationen zwischen den D erhalten kann, aus welchen alle übrigen sich auf rationalem Wege ableiten lassen, welche also zur Charakterisirung des von den D gebildeten algebraischen Gebildes nothwendig und ausreichend sind. Noch weniger ist bekannt, wie viele Relationen zur *ganzen* Darstellung aller übrigen erforderlich sind.

---

*) Vgl. Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel (Leipzig 1882), art. 16 a. E.

§ 26.

Verschiedene Rationalitätsbereiche II. Stufe.

Die Gesammtheit der 16 Formen D und der 15 Determinanten $(\alpha\beta)$ constituirt den Rationalitätsbereich, welcher zu der Principaluntergruppe II. Stufe gehört. Es giebt aber noch engere Rationalitätsbereiche II. Stufe, welche im Gebiete der Modulfunctionen charakterisirt sind durch die *rationalen Functionen der Wurzeln der Gleichung* $f(x) = 0$, im Gebiet der eigentlichen hyperelliptischen Functionen durch gewisse *kleinere aus der Gesammtheit herausgegriffene Systeme von Formen D*. Von diesen sollen im folgenden eine Anzahl Erwähnung finden, welche bei speciellen Problemen bereits vielfach aufgetreten sind.

I. Jedem der einzelnen D_i entspricht eine Wurzel der Gleichung $f_6 = 0$ selbst.

II. Jedem der $D_{\substack{hik\\lmn}}$ entspricht eine Wurzel derjenigen Resolvente 10. Grades, von welcher die Zerspaltungen von f_6 in zwei cubische Factoren abhängen. An den damit gegebenen Rationalitätsbereich knüpft die von Herrn Staude*) in Vorschlag gebrachte Bezeichnung der D an, welche in folgendem besteht. Dasjenige $D_{\substack{hik\\lmn}}$, welches man auszeichnen will, wir wollen annehmen $D_{\substack{024\\135}}$, wird mit D ohne Index bezeichnet; alle übrigen D erhalten je zwei Indices. An Stelle von D_h wird geschrieben D_{ik}, wo i, k die beiden Zahlen sind, welche mit h das eine der beiden Tripel 024, 135 bilden; denjenigen D, welche in der Bezeichnung des § 23 sechs Indices haben, werden je diejenigen beiden Zahlen als Indices beigelegt, durch deren Vertauschung das zugehörige Tripelpaar in das ausgezeichnete Tripelpaar 024, 135 übergeht (also z. B. D_{41} statt $D_{\substack{012\\345}}$ u. s. f.).

In dieser Bezeichnung ist demnach ein D gerade oder ungerade, je nachdem die Summe seiner Indices gerade oder ungerade ist. Die Imprimitivität der Gleichung 9. Grades, in welche die erwähnte Resolvente 10. Grades durch Adjunction einer ihrer Wurzeln übergeht, findet ihren Ausdruck in der folgenden Gruppirung der ungeraden D:

$$\begin{array}{ccc} D_{01} & D_{21} & D_{41}, \\ D_{03} & D_{23} & D_{43}, \\ D_{05} & D_{25} & D_{45}. \end{array} \tag{96}$$

III. Wird *gleichzeitig ein gerades und ein ungerades* D ausgezeichnet, so gelangt man zu demjenigen Rationalitätsbereiche,

*) Staude, dieser Ann. Bd. 24, p. 284. 300.

welcher der Bezeichnungsweise des Herrn Weierstrass zu Grunde liegt.*)

IV. Zugrundelegung der *symmetrischen Functionen der Richelot'schen Moduln* ergiebt einen Rationalitätsbereich, welchem (bei geeigneter Einführung dieser Moduln) auch die symmetrischen Functionen der in je einer Zeile des Schema's (93) stehenden D angehören.

V. Weitere bemerkenswerthe Untergruppen werden von den verschiedenen in § 24 aufgezählten Relationen geliefert, indem immer die in einer solchen auftretenden D zusammen einen Rationalitätsbereich constituiren; noch andere solche Bereiche werden durch gleichzeitige Betrachtung mehrerer solcher Relationen erhalten. Hierher gehören auch diejenigen Rationalitätsbereiche, welche den aus der Theorie der Thetafunctionen bekannten Quadrupeln, Sextupeln etc. von Formen D entsprechen. In Bezug hierauf möge als besonders einfaches Resultat erwähnt werden, dass den 15 sogenannten „Göpel'schen Quadrupeln von 4 geraden Thetafunctionen" die 15 Zerlegungen der f_6 in 3 quadratische Factoren entsprechen. Zu einer solchen Zerlegung gehören nämlich 4 Zerlegungen in zwei cubische Factoren, welche von jedem jener quadratischen Factoren je einen Linearfactor enthalten. So z. B. gehören zu der Zerlegung:

$$f(x) = (\alpha x)(\beta x) \cdot (\gamma x)(\delta x) \cdot (\varepsilon x)(\zeta x)$$

die 4 Formen D:

$$(97) \qquad D_{\substack{024\\135}}, \quad D_{\substack{025\\134}}, \quad D_{\substack{034\\125}}, \quad D_{\substack{035\\124}}$$

oder in der Bezeichnung von Weierstrass:

$$D_5, \quad D_4, \quad D_{23}, \quad D_{01}$$

— in der That ein Göpel'sches Quadrupel.

Es würde auf Grund der Angaben des Herrn C. Jordan (vgl. hierüber § 22, IV. V.) nicht schwierig sein, die zu jedem dieser Rationalitätsbereiche gehörende Untergruppe durch Congruenzen mod. 2 zu definiren; indess soll dies hier nicht näher ausgeführt werden.

§ 27.

Uebergang von den Formen II. Stufe zu den Sigmafunctionen. Die Primcharakteristiken und ihre Transformation.

Aus den Formen D entstehen durch Multiplication mit der Primform $\Omega(x', x'')$ die *Sigmafunctionen***). Diese fallen aus unserer Stufeneintheilung heraus, insofern sie auf der Riemann'schen Fläche unendlich vieldeutig sind: sie sind zwar eindeutige Functionen der transcendenten

*) Vgl. Staude a. a. O.

**) Diese Annalen Bd. 32, p. 363.

Argumente, aber die Operationen unserer Hauptgruppe, bei welchen sie ungeändert bleiben, bilden keine Untergruppe von endlichem Index. Vielmehr tritt zu der einzelnen Sigmafunction, wenn eine der Variabeln einen Querschnitt überschreitet, ein Factor der Form:

$$(98) \qquad (-1)^{g_\alpha} e^{\sum \eta_\alpha \left(w_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)},$$

unter den g_α (*mod.* 2 zu betrachtende) ganze Zahlen verstanden (von deren Bestimmung dieser Ann. Bd. 32 p. 358 ausführlich die Rede ist).

Für einen beliebigen Periodenweg, welcher die Querschnitte:

$$A_1 \quad A_2 \quad B_1 \quad B_2$$

bezw. $\qquad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

mal überschreitet, erhält man mit Rücksicht auf die zwischen den ω und η bestehenden Bilinearrelationen dann als den zu derselben Sigmafunction tretenden Factor:

$$(99) \qquad (-1)^{a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 + a_4 g_4} e^{\sum_\alpha \eta'_\alpha \left(w_\alpha + \frac{1}{2}\omega'_\alpha\right) + \pi i (a_1 a_3 + a_2 a_4)},$$

in welchem zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \omega'_\alpha &= a_1 \omega_{\alpha 1} + a_2 \omega_{\alpha 2} + a_3 \omega_{\alpha 3} + a_4 \omega_{\alpha 4}, \\ \eta'_\alpha &= a_1 \eta_{\alpha 1} + a_2 \eta_{\alpha 2} + a_3 \eta_{\alpha 3} + a_4 \eta_{\alpha 4} \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

gesetzt ist. Indem man dem Factor (99) entsprechende Factoren für alle Querschnitte eines neuen Systems bestimmt, gewinnt man das folgende Resultat:

Werden die Perioden ω vermöge der Substitution (12) *durch neue ersetzt, so treten an Stelle der Zahlen g andere g', welche mit den ursprünglichen durch die Congruenzen verbunden sind:*

$$(100) \quad \begin{cases} g_1' \equiv a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 + a_4 g_4 + a_1 a_3 + a_2 a_4, \\ g_2' \equiv b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3 + b_4 g_4 + b_1 b_3 + b_2 b_4, \\ g_3' \equiv c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 + c_4 g_4 + c_1 c_3 + c_2 c_4, \\ g_4' \equiv d_1 g_1 + d_2 g_2 + d_3 g_3 + d_4 g_4 + d_1 d_3 + d_2 d_4. \end{cases} \quad (\text{mod. } 2)$$

Diese Zahlen g transformiren sich also wesentlich anders als die Elementarcharakteristiken des § 6; sie sollen im Folgenden, da ihre Einführung mit Hilfe der *Primform* Ω geschieht, als *Primcharakteristiken* der Sigmafunctionen sowohl, als der Formen II. Stufe bezeichnet werden, aus welchen jene gebildet sind.*)

*) Die „Elementarcharakteristiken" sind identisch mit den „Gruppencharakteristiken", die „Primcharakteristiken" mit den „eigentlichen Charakteristiken" des Herrn Noether, der den Unterschied beider Arten wiederholt hervorgehoben hat (vgl. dieser Ann. Bd. 16 p. 271; Bd. 26 p. 354). — Die im Text citirten Entwicklungen in Bd. 32 geben übrigens eine allgemeine Regel zur Bestimmung der Primcharakteristik einer vorgelegten Form in Bezug auf ein gegebenes Querschnittsystem.

§ 28.

Vorzüge des Formensystems der II. vor demjenigen der I. Stufe.

Bei consequenter Durchführung des Rationalitätsprincips würden für alle Untersuchungen specieller Fragen die Functionen I. Stufe in den Vordergrund treten müssen: sie würden den Functionen II. Stufe gegenüber Vorzugsrechte ähnlicher Art besitzen, wie sie von demselben principiellen Standpunkte aus im Gebiete der elliptischen Functionen dem $\wp u$ und $\wp' u$ des Herrn Weierstrass gegenüber sin am u etc. zukommen.

Gleichwohl sind die Functionen II. Stufe in mehreren Beziehungen der Untersuchung weit leichter zugänglich.*) Richten wir unser Augenmerk zunächst auf Modulformen, so besitzen diejenigen der II. Stufe den Vorzug, dass sie sich aus 4 *von einander unabhängigen und von Hilfspunkten freien* Formen rational zusammensetzen, während wir bei den Formen I. Stufe nur die Wahl haben, *entweder* mit 7 Formen zu operiren — den Coefficienten von f_6 — die *zwar von einander unabhängig sind*, *aber* 3 *Hilfsvariable enthalten*, *oder* mit den 5 Fundamentalinvarianten, die *von Hilfsvariabeln frei*, *aber durch eine* (*sehr complicirte*) *Relation***) *unter sich verbunden sind.*

Nehmen wir nun die eigentlichen Formen hinzu, so kommen wir zwar auch bei den Formen II. Stufe nicht ganz ohne Hilfsgrössen (bei den D_i) und ohne überzählige Formen aus; allein die Art und Weise wie die Hilfsgrössen in die Formen eingehen, ist eine viel übersichtlichere und die verbindenden Relationen besitzen einen viel einfacheren Charakter als bei den Formen I. Stufe.

Damit hängt ein weiterer Umstand eng zusammen. Die Hilfsmittel, über welche man zur eingehenden Behandlung einzelner Fragen verfügt, werden hauptsächlich von der *Theorie der Thetafunctionen* dargeboten, an welcher sich historisch die ganze Theorie der hyperelliptischen Functionen entwickelt hat und welche die bequemsten analytischen Darstellungen der in dieser auftretenden Functionen liefert. Die Thetafunctionen sind nun zwar ebenso wie die Sigmafunctionen (§ 27) an und für sich nicht in die Stufentheorie einzureihen, stehen aber wie diese zu den Functionen II. Stufe in nächster Beziehung.

Aus allen diesen Erwägungen wird man bei Behandlung specieller Probleme es vorziehen, an die Functionen II. Stufe anzuknüpfen. Für allgemeine Discussionen dagegen ist es oft vortheilhaft, in erster Linie die Functionen I. Stufe in's Auge zu fassen, weil für diese eine Reihe von Fallunterscheidungen wegfallen, die die Verhältnisse bei den

*) Auch die elliptischen Functionen II. Stufe haben vor denjenigen der ersten Stufe analoge, wenn auch nicht so weitgehende, Vorzüge.

**) Clebsch, binäre Formen p. 299.

Functionen II. (und höherer) Stufe compliciren. Sind einmal die allgemeinen Gesichtspunkte an den Functionen I. Stufe gefunden, so bietet die Uebertragung auf Functionen höherer Stufe meist wenig Schwierigkeit.

IV. Abschnitt.

Einleitung in Theilung und Transformation.

§ 29.

Theilung und Transformation als Bruchstücke des allgemeinen Programms.

Mit den Functionen II. Stufe möge die systematische Uebersicht abgebrochen werden, da es für die Functionen höherer Stufen an Vorarbeiten zu einer solchen so gut wie gänzlich mangelt. Dagegen möge ein anderer Gesichtspunkt in den Vordergrund treten: die Frage nach bestimmten Problemen, welche von Functionen niederer zu solchen höherer Stufe führen. Zwei solche Probleme hat die historische Entwicklung der Theorie, anknüpfend an die Theorie der elliptischen Functionen, seit etwa 40 Jahren besonders begünstigt: das Problem der Theilung und das der Transformation. Zwar lässt die Analogie der elliptischen Functionen erwarten, dass hier so wenig als dort das allgemeine Programm durch diese beiden Probleme, selbst wenn man dieselben im weitesten Sinne auffasst, erfüllt werden wird; indessen bieten sie die günstigsten Angriffspunkte, und so soll desshalb im Folgenden ausschliesslich von ihnen die Rede sein. Um sie aber mit den Erörterungen der beiden letzten Abschnitte in Verbindung zu setzen und deren Resultate für sie nutzbar zu machen, wird es vor allem erforderlich sein auszuführen, in welcher Weise diese Probleme in das allgemeine Programm des § 18 sich einordnen.

Das Problem der **Theilung** verlangt:

wenn die Functionen der Argumente:

$$w_\alpha, \quad \omega_{\alpha 1}, \quad \omega_{\alpha 2}, \quad \omega_{\alpha 3}, \quad \omega_{\alpha 4} \qquad \alpha = 1, 2$$

gegeben sind, aus ihnen die Functionen der Argumente:

$$\frac{w_\alpha}{n}, \quad \omega_{\alpha 1}, \quad \omega_{\alpha 2}, \quad \omega_{\alpha 3}, \quad \omega_{\alpha 4}$$

oder, was dasselbe sagt, *die Functionen der Argumente:*

$$w_\alpha, \quad n\omega_{\alpha 1}, \quad n\omega_{\alpha 2}, \quad n\omega_{\alpha 3}, \quad n\omega_{\alpha 4}$$

zu berechnen, unter n eine ganze Zahl verstanden. Seien es, um im Sinne des § 28 mit dem einfachsten Fall zu beginnen, zunächst Functionen I. Stufe, welche zu „theilen" sind*). Durch dieselben sind die

*) In genauer Ausdrucksweise müsste man nicht von der Theilung der Functionen, sondern von der ihrer Argumente reden.

Integrale ω nur bis auf Multipla der Perioden bestimmt; aus jeder Lösung $\left(\frac{w_\alpha}{n};\ \omega_{\alpha\beta}\right)$ des Theilungsproblems werden sich daher n^4 Lösungen ergeben, welche alle in der Form:

$$(101)\qquad \left(\frac{w_\alpha + h_1\omega_{\alpha 1} + h_2\omega_{\alpha 2} + h_3\omega_{\alpha 3} + h_4\omega_{\alpha 4}}{n};\ \omega_{\alpha\beta}\right)$$

enthalten sind, indem die ganzen Zahlen h_1, h_2, h_3, h_4 unabhängig von einander alle Werthe von 1 bis n durchlaufen. Es zeigt aber diese Darstellung der Lösungen, dass jede einzelne derselben ungeändert bleibt, wenn die w, ω solchen Operationen der Hauptgruppe unterworfen werden, welche modulo n zur Identität congruent sind. Das heisst aber in unserer Terminologie:

Die Theilung der Functionen I. Stufe führt auf Functionen n^{ter} Stufe.

Die Aufgabe der **Transformation****) möge zunächst nicht in ihrer allgemeinsten, sondern in einer speciellen Fassung formulirt werden. In dieser erscheint sie gewissermassen als die Hälfte der Aufgabe der Theilung: *sie verlangt den Uebergang von*:

$$w_\alpha \quad \omega_{\alpha 1} \quad \omega_{\alpha 2} \quad \omega_{\alpha 3} \quad \omega_{\alpha 4}$$

zu:

$$w_\alpha \quad \omega_{\alpha 1} \quad \omega_{\alpha 2} \quad n\,\omega_{\alpha 3} \quad n\,\omega_{\alpha 4},$$

unter n wieder eine ganze Zahl verstanden.

Auch hier zeigt die Untersuchung (vgl. § 52), dass die einzelne Lösung des Transformationsproblems nur bei solchen Operationen unserer Hauptgruppe ungeändert bleibt, deren Coefficienten gewissen Congruenzen nach dem Modul n genügen; m. a. W.:

Auch die Transformation der Functionen I. Stufe führt zu Functionen n^{ter} Stufe.

§ 30.

Theilung und Transformation von Functionen höherer Stufen.

In gleicher Weise, wie die Functionen I. Stufe, kann man nun auch Functionen höherer Stufen „theilen“ und „transformiren“. Verlangt man dabei zunächst die Stufenzahl der entstehenden Functionen zu wissen, so wird es einen wesentlichen Unterschied bedingen, ob die Stufenzahl m der Functionen, von welcher man ausgeht, zur Theilungs- oder Transformationszahl n relativ prim ist oder nicht. Ist nämlich ersteres der Fall, so stören sich die Congruenzen, welche die Stufe der ursprünglichen Functionen mit sich bringt, und diejenigen, welche die Theilung oder Transformation bedingt, gegenseitig insofern nicht, als sie sich zu einem Systeme von Congruenzen

**) Mit „Transformation“ ist also hier das gemeint, was man sonst seit Jacobi (z. B. ges. W. Bd. I, p. 463 ff.) als *„transformatio irrationalis sive inversa“* bezeichnet.

mod. mn vereinigen, dessen Lösungen sich aus den einzelnen Lösungen jener beiden Congruenzensysteme zusammensetzen lassen. Haben aber m und n einen Theiler δ gemeinsam, so gilt das nicht: der Modul der resultirenden Congruenzen wird dann im allgemeinen nicht mn sondern $\frac{mn}{\delta_1}$ sein, wo δ_1 irgend ein Theiler von δ ist. In Folge dessen wird die Unterscheidung einer Reihe von Fällen erforderlich werden. Doch gehen wir auf diese Fragen hier nicht näher ein, sondern begnügen uns damit, das Gesagte in dem Satze zusammenzufassen:

Transformation n^{ten} Grades und n-Theilung von Functionen m^{ter} Stufe führt stets zu Functionen mn^{ter} Stufe, wenn m und n theilerfremd sind. Haben aber m und n einen gemeinsamen Theiler δ, so erhält man Functionen der Stufe $\frac{mn}{\delta_1}$, wo δ_1 ein Theiler von δ ist, (*der auch* 1 *oder* δ *selbst sein kann*).

§ 31.

Affect, Monodromiegruppe, arithmetische Gruppe. Allgemeine und specielle Probleme.

Das ganz besondere Interesse, welches die Theilungs- und Transformationsaufgaben darbieten, liegt in dem *Affect* der entstehenden Gleichungen, in ihren gruppentheoretischen Eigenschaften. Man versteht bekanntlich nach Herrn Kronecker unter dem Affect einer Gleichung die Gesammtheit der Besonderheiten, welche sie mit Rücksicht auf *Resolventenbildung* darbietet. Ist es möglich, Resolventen von besonders niedrigem Grade zu bilden, kann man gar die Auflösung der gegebenen Gleichung auf die Auflösung einer Reihe von Resolventen zurückführen, deren jede für sich betrachtet einfacher ist, als die gegebene Gleichung selbst, so sagt man, die Gleichung besitzt einen besonderen Affect. Der weitgehendste Affect, welchen eine Gleichung haben kann, ist, dass ihre Auflösung auf eine Reihe von *Abel'schen* Gleichungen zurückkommt, m. a. W. dass sie in bekannter Weise auf reine Gleichungen zurückgeführt werden kann.*)

Ob man nun einer vorgelegten Gleichung einen solchen Affect zuzuschreiben hat, durch welchen sie sich leichter lösen lässt, als eine allgemeine Gleichung desselben Grades, das kann erst entschieden werden, wenn festgesetzt ist, welche Grössen als bekannt anzusehen sind, m. a. W. *welcher Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt werden soll.*

Für unsere Theilungs- und Transformationsprobleme stellt sich diese Frage nun so, dass als rational bekannte Parameter die Formen derjenigen Stufe anzusehen sind, für welche das zu behandelnde Problem gestellt ist. Dagegen wird man irrationale Functionen dieser

*) Vgl. Hölder, dieser Ann. Bd. 34.

Parameter nicht als bekannt ansehen wollen. *Was also die Parameter betrifft, so ist die Definition des Rationalitätsbereichs, in welchem wir uns bewegen wollen, durch die an die Spitze gestellte Einordnung der Fragestellung in die Stufentheorie bereits gegeben.*

Damit aber der Rationalitätsbereich vollständig bestimmt sei, muss auch festgesetzt werden, welche *Zahlencoefficienten* als rational gelten sollen: man muss sich darüber entscheiden, ob man sich auf rationale Zahlen im eigentlichen Sinne beschränken, oder ob man auch bestimmte numerische Irrationalitäten, wie z. B. Einheitswurzeln, als zulässig ansehen will. Dadurch ist eine gewisse Spaltung der folgenden Untersuchungen bedingt, indem immer die beiden Fragen zu beantworten sein werden:

I. *Welchen Affect haben die vorgelegten Gleichungen, wenn man sich um die Zahlencoefficienten gar nicht kümmert, sondern rein numerische Irrationalitäten, deren man etwa im Laufe des Reductions-, bezw. Auflösungsprocesses bedarf, immer gleich adjungirt?*

II. *Welchen Affect besitzen dieselben, wenn auch allen zu benutzenden Zahlencoefficienten die Bedingung auferlegt wird, gemeine rationale Zahlen zu sein?*

Nun existirt bekanntlich für jedes Gleichungssystem und jeden Rationalitätsbereich eine *Gruppe von Vertauschungen der Lösungssysteme,* welche die doppelte Eigenschaft besitzt:

einmal, dass jede rationale Function der Lösungssysteme, welche bei allen Vertauschungen dieser Gruppe ihrem numerischen Werthe nach ungeändert bleibt, rational bekannt ist;

dann aber auch, dass jede rationale Function der Lösungssysteme, deren Zahlenwerth rational bekannt ist, bei den Vertauschungen dieser Gruppe numerisch ungeändert bleibt.

Diese Gruppe heisst *„die Galois'sche Gruppe"* oder einfach *„die Gruppe"* des Gleichungssystems in diesem Rationalitätsbereich.

Die Aufgabe, die Galois'sche Gruppe eines vorgelegten Theilungs- oder Transformationsproblems zu bestimmen, spaltet sich der oben erörterten doppelten Auffassung des Rationalitätsbereichs entsprechend wieder in 2 Aufgaben. Legt man den strengen Rationalitätsbereich zu Grunde, der sein Gesetz auch den Zahlencoefficienten auferlegt, so fragt man nach der *„arithmetischen Gruppe"* des Problems; lässt man die Zahlencoefficienten bei Seite und achtet nur auf die Parameter, so fragt man nach der *„Gruppe der Monodromie."* Letztere besteht aus denjenigen Vertauschungen der Lösungssysteme, welche man erhält, wenn man die Parameter irgend welche geschlossene Wege in ihrem Werthgebiete beschreiben lässt. Dass die so definirte Gruppe der Monodromie mit der Galois'schen Gruppe der vorgegebenen Glei-

chung übereinstimmt, sofern man numerische Irrationalitäten als unwesentlich ansieht, darauf hat Herr Hermite 1851 aufmerksam gemacht; dass damit nur eine Seite der Frage getroffen wird, hat Herr Kronecker wiederholt betont.

Bevor wir uns zur Discussion der einzelnen Probleme wenden, mögen noch die üblichen Bezeichnungen: „*allgemeine*“ und „*specielle*“ Probleme erläutert werden. Wenn man nämlich nur nach den *Modulformen* fragt, die zu den neuen Argumenten gehören, so hat man es mit dem „*speciellen*“ Problem zu thun; das „*allgemeine*“ Problem fasst die *eigentlichen Formen* in's Auge. Entstanden ist die Benennung in der Theorie der elliptischen Functionen, deren Werthe für „den speciellen Argumentwerth $w \equiv 0$“ in naher Beziehung zu den Moduln der betreffenden Stufe stehen, ja selbst als solche Moduln gewählt werden können; sie möge aber der Kürze halber auch für die hyperelliptischen Functionen beibehalten werden, obwohl hier der Uebergang vom speciellen zum allgemeinen Problem erst einen besondern Grenzübergang erfordert. Es entspricht nämlich das Werthsystem $(w_1, w_2) = (0,0)$ bekanntlich den sämmtlichen specialisirten Punktepaaren $(x'' = \bar{x}')$, (vgl. § 21); die eigentlichen hyperelliptischen Functionen werden daher für dasselbe — zum Theil wenigstens — unbestimmt, indem sie in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen.

V. Abschnitt.

Theilung durch eine ungerade Primzahl.

§ 32.

Formulirung des allgemeinen Theilungsproblems.

Das Problem der allgemeinen Theilung ist bereits § 29 in folgender Weise formulirt worden:

Gegeben sind die hyperelliptischen Functionen der Argumente

$$w_\alpha, \quad \omega_{\alpha 1}, \quad \omega_{\alpha 2}, \quad \omega_{\alpha 3}, \quad \omega_{\alpha 4},$$

gesucht die Functionen der Argumente:

$$\frac{w_\alpha}{n}, \quad \omega_{\alpha 1}, \quad \omega_{\alpha 2}, \quad \omega_{\alpha 3}, \quad \omega_{\alpha 4}.$$

Sind die w gegeben als Summen einer geraden Anzahl von Integralen mit bekannten oberen Grenzen und einem und demselben Verzweigungspunkt a, von dessen Auswahl sie dann unabhängig sind*), in den unteren:

$$(102) \qquad w_\alpha = \int_a^{y'} dw_\alpha + \int_a^{y''} dw_\alpha + \cdots \int_a^{y^{(2\mu)}} dw_\alpha,$$

*) Wegen einer allgemeineren Wahl der unteren Grenzen vgl. § 42.

so erscheint die Aufgabe als identisch mit der folgenden: Punkte x zu bestimmen, für welche:

$$\frac{w_\alpha}{n} = \int_a^{x'} dw_\alpha + \int_a^{x''} dw_\alpha + \cdots \int_a^{x^{(2\nu)}} dw_\alpha \tag{103}$$

ist. Von diesen 2ν Punkten x sind natürlich $2\nu - 2$ willkürlich; *die Gesammtheit der unter einander äquivalenten Lösungssysteme soll im Folgenden nur als eine Lösung gezählt werden.* In dieser Festsetzung ist inbegriffen, dass die Reihenfolge der Stellen x als gleichgültig betrachtet, m. a. W. dass nur nach den symmetrischen Verbindungen derselben gefragt wird.

In diesem Sinne hat das Problem n^4 Lösungen. Denn die w sind durch die y nur bestimmt bis auf ganzzahlige Multipla der Perioden; die $\frac{w}{n}$ werden aber nur dann um ganze Perioden sich ändern, wenn die w um n-fache Perioden geändert werden. Aendert man w um

$$h_1 w_1 + h_2 w_2 + h_3 w_3 + h_4 w_4,$$

so gelangt man zu incongruenten Werthen der $\frac{w}{n}$, wenn man incongruente Zahlen h wählt. Indem jede derselben unabhängig von den andern n (mod. n) verschiedene Werthe annehmen kann, erhält man in der That n^4 verschiedene Systeme der $\frac{w}{n}$ und damit den in Aussicht genommenen Satz:

Das allgemeine Theilungsproblem besitzt n^4 Lösungen.

Der Fall $n = 2$ ist hier mit inbegriffen, soll aber im Folgenden bei Seite gelassen und später besonders behandelt werden, da er gewisse Besonderheiten darbietet. Ferner ist klar, dass die Theilung durch eine zusammengesetzte Zahl zurückkommt auf die Theilungen durch die einzelnen Factoren. Demgemäss bedeute *n in diesem ganzen Abschnitt eine ungerade Primzahl.*

§ 33.

Formulirung des speciellen Theilungsproblems.

Ist das gegebene Werthsystem $(w_1, w_2) \equiv (0, 0)$, so ist ein Werthsystem der $\frac{w}{n}$ ebenfalls $\equiv (0, 0)$ und die zugehörigen x sind rational bekannt, indem ein beliebiges System von paarweise conjugirten Punkten die Aufgabe löst. Die übrigen Werthsysteme der $\frac{w}{n}$ sind Perioden-n^{tel} und gruppiren sich, wenn n wie vorausgesetzt ungerade ist, in einfacher Art paarweise zusammen. Ist nämlich $\frac{w}{n}$ ein Perioden-n^{tel}, so gilt dasselbe für $-\frac{w}{n}$, und diese beiden Werthe sind incongruent,

gehören also zu verschiedenen Lösungssystemen. Fasst man beide zusammen, so erhält man das Resultat:

Der Grad des speciellen Theilungsproblems kann von n^4 auf:

$$\frac{1}{2}(n^4 - 1) \tag{104}$$

reducirt werden), indem eine Lösung sich abspaltet und die andern sich paarweise zusammenordnen.*

Wird zur Vereinfachung der Darstellung in (103) $\nu = 1$ genommen, was stets angeht, so verlangt die Aufgabe, dass**)

$$n\left\{\int_a^{x'} + \int_a^{x''}\right\} \equiv 0 \text{ (modd. Perioden)} \tag{105}$$

werden soll. Das heisst aber nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems nichts anderes, als dass x' und x'', n-fach gezählt, Nullpunkte einer ganzen Function auf der Riemann'schen Fläche sind, m. a. W. dass zwei ganze rationale Functionen g_n und γ_{n-3}***) von x existiren, sodass die Gleichung:

$$g_n + \gamma_{n-3}\sqrt{f_6} = 0 \tag{106}$$

zwei n-fache Wurzeln besitzt, welche dann eben x' und x'' sein werden. Die conjugirten Punkte $\overline{x'}$, $\overline{x''}$ ergeben dann ebenfalls eine Lösung desselben Theilungsproblems (entsprechend dem Periodenbruchtheil $-\frac{P}{n}$, wenn die erste Lösung dem $+\frac{P}{n}$ entsprach), und sind Nullpunkte von:

$$g_n - \gamma_{n-3}\sqrt{f_6} = 0. \tag{107}$$

Die 4 Stellen x', x'', $\overline{x'}$, $\overline{x''}$ zusammen sind aber auch Nullstellen einer quadratischen Form in x, die mit u_2 bezeichnet werden möge. Die n^{te} Potenz dieser Form wird an denselben Stellen von derselben Ordnung Null, wie das Product der beiden Formen auf den linken Seiten der Gleichungen (106) und (107); wird also eine multiplicative Constante in u_2 mit einbegriffen gedacht, so muss eine Identität folgender Gestalt bestehen:

$$u_2^n \equiv g_n^2 - \gamma_{n-3}^2 \cdot f_6. \tag{108}$$

Umgekehrt, wenn es gelingt, 3 Formen u_2, g_n, γ_{n-3} so zu bestimmen, dass eine solche Identität besteht, so kann man zunächst die rechte Seite derselben in die beiden Factoren $g_n + \gamma_{n-3}\sqrt{f_6}$ und

---

*) Also für $n = 3, 5, 7 \ldots$ bezw. auf 40, 312, 1200.

**) In bekannter abkürzender Schreibweise.

***) Die Indices der Formen bezeichnen hier und im Folgenden ihren Grad in x.

$g_n - \gamma_{n-3}\sqrt{f_6}$ spalten. Während nun u in zwei Paaren conjugirter Stellen verschwindet, kann an jeder einzelnen dieser Stellen immer nur einer jener Factoren Null werden. Es zerlegen sich also die zwei Paare conjugirter Stellen andererseits in zwei Paare entsprechend den beiden Factoren der rechten Seite; die Stellen jedes dieser letzteren Paare geben eine Lösung des Problems.

Das Resultat dieser Ueberlegungen ist also:

Jedes Paar conjugirter Lösungen des speciellen Theilungsproblems führt zu 3 Formen u_2, g_n, γ_{n-3}, welche mit f durch eine Identität von der Form (108) *verbunden sind; umgekehrt, so oft drei solche Formen gefunden sind, kann man aus ihnen zwei conjugirte Lösungen des speciellen Theilungsproblems ableiten.*

In der That ist die Aufgabe, u, g, γ in dieser Weise zu finden, ein ganz bestimmtes algebraisches Problem. Die Anzahl der Coefficienten dieser drei Formen ist nämlich:

$$3 + (n + 1) + (n - 2) = 2n + 2;$$

einer von ihnen kann jedoch der Formulirung der Aufgabe entsprechend willkürlich angenommen werden. Andererseits ist die Gleichung (108) vom Grade $2n$ in x; damit sie identisch bestehe, sind $2n + 1$ Verbindungen jener Coefficienten gleich Null zu setzen. *Das specielle Theilungsproblem ist also bei diesem Ansatz zum Ausdruck gebracht durch $2n + 1$ Gleichungen zwischen $2n + 1$ Unbekannten.*

In erster Linie kommen von diesen $2n + 1$ Unbekannten die Coefficienten von:

(109) $$u_2 \equiv ax^2 + 2bx + c = 0$$

in Betracht, indem dieselben die doch eigentlich gesuchten symmetrischen Functionen der Stellen x', x'' vorstellen; in der That ist in der Bezeichnung (52):

(110) $$X_1 : X_2 : X_3 = c : (-2b) : a.$$

§ 34.

Untersuchungen von Clebsch.

Die Abhandlung von Clebsch: *Zur Theorie der binären Formen 6. Ordnung und der Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen**) beschäftigt sich mit einem speciellen Fall ($n = 3$) dieses algebraischen Problems, nämlich mit der Aufgabe, die Gleichung:

(111) $$u_2{}^3 = v_3{}^2 - f_6$$

zu einer identischen zu machen.

Für Clebsch hatte diese Aufgabe zunächst ein rein algebraisches Interesse, indem er (wie vorher schon Herr Cayley) in $u_2{}^3 - v_3{}^2$ eine Art Normalform der binären Form 6. Grades sah. Er verschaffte sich

*) Gött. Abh. Bd. 14, 1869.

einen Zugang zu diesem Problem, indem er damit begann, eine Lösung desselben, wie man jetzt sagen würde, zu adjungiren und die Aufgabe zu behandeln: wenn u_2', v_3' gegeben sind, u_2, v_3 so zu bestimmen, dass die Gleichung:

$$u_2^3 - v_3^2 = u_2'^3 - v_3'^2 \tag{112}$$

zu einer identischen wird. Er zeigte dann, dass diese Aufgabe ausser der selbstverständlichen Lösung $u = u'$, $v = v'$ noch 39 andere Lösungen besitzt, welche in 27 und 12 zerfallen. Jene 27 ordnen sich in 9 Tripel, die sich durch eine Hesse'sche Gleichung 9. Grades bestimmen lassen; die 12 übrigen Lösungen hängen von der Resolvente 12. Grades dieser Hesse'schen Gleichung ab.

Herr C. Jordan, dem Clebsch diese Gruppirung mittheilte, war damals eben mit den Theilungsgleichungen der Abel'schen Functionen beschäftigt und erkannte, dass dieselben Gruppirungseigenschaften dem speciellen Dreitheilungsproblem der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) zukommen. Daraufhin gelang es Clebsch in der That, das letztere Problem auf seine algebraische Aufgabe zurückzuführen. Er bedient sich dabei (für uns unnöthigerweise) einer Darstellung des hyperelliptischen Gebildes im ternären Gebiet (Curve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt); der Rationalitätsbereich, in welchem er sich bewegt, gehört zu einer Zerlegung von f in $\varphi_2 \cdot \psi_4$, wie solche § 24 gelegentlich Erwähnung fanden. Im übrigen entspricht der Ansatz von Clebsch ganz dem allgemeinen Ansatz des § 33.

Entsprechend seiner ursprünglichen Auffassung des Problems als eines solchen canonischer Darstellung betrachtet Clebsch als Unbekannte nicht die Coefficienten von u, auch nicht die Simultaninvarianten von u und f, sondern die Simultaninvarianten von u und v, sodass seine Resultate, soweit sie explicite algebraische Darstellungen der auftretenden Resolventen enthalten, nicht unmittelbar für die Theorie der hyperelliptischen Functionen nutzbar sind. Ueberhaupt scheint das stricte Festhalten an dem Princip, nur mit *reinen* Invarianten zu operiren, zu Rechnungen von grösserer Complicirtheit zu führen, als es die algebraische Natur des Problems an und für sich bedingen würde; eine Bemerkung, die auf sehr viele Entwickelungen mancher Invariantentheoretiker Anwendung findet.

§ 35.

Weitere Discussion der allgemeinen Theilung.

Es möge wieder an die Formulirung des allgemeinen Theilungsproblems angeknüpft werden, wie sie § 32, Glchg. (102) u. (103) gegeben wurde: 2μ Stellen y sind gegeben, 2ν Stellen x sind so zu bestimmen, dass:

$$(113)\qquad \int_a^{x'}+\int_a^{x''}+\cdots\int_a^{x^{(2\nu)}}\equiv\frac{1}{n}\left\{\int_a^{y'}+\int_a^{y''}+\cdots\int_a^{y^{(2\mu)}}\right\}\quad(\text{mod. Per.})$$

wird. Um diese Gleichung zwischen transcendenten Functionen in eine algebraische Gleichung umzusetzen, wollen wir zunächst conjugirte Stellen nicht unterscheiden; m. a. W. es möge auf der rechten Seite der Congruenz (113) vor jedes Integral $\pm$ geschrieben und alle so entstehenden $2^{2\mu}$ Probleme in eines zusammengefasst werden.

Die Stellen y zusammen mit ihren conjugirten sind Nullstellen einer bestimmten Form $v_{2\mu}$; die Stellen x zusammen mit ihren conjugirten werden erhalten werden durch Nullsetzen einer zu bestimmenden Form $u_{2\nu}$. Andererseits zeigt die Congruenz (115), dass die Stellen y zusammen mit den n-fach gezählten Stellen $\bar{x}$ Nullstellen einer ganzen Function:

$$(114)\qquad g_{n\nu+\mu}+\gamma_{n\nu+\mu-3}\sqrt{f_6}$$

auf der Fläche sein müssen; die conjugirten Stellen sind dann Nullstellen von:

$$(115)\qquad g_{n\nu+\mu}-\gamma_{n\nu+\mu-3}\sqrt{f_6}.$$

Demnach muss eine Identität der Form bestehen:

$$(116)\qquad u^n v=(g+\gamma\sqrt{f})\,(g-\gamma\sqrt{f})=g^2-\gamma^2 f.$$

Sobald umgekehrt Formen u, g, γ gefunden sind, welche diese Gleichung zu einer identischen machen, werden von jenen $2^{2\mu}$ Problemen zwei gelöst sein, nämlich eines, bei welchem die gegebenen Stellen sich sämmtlich unter den Nullstellen von:

$$g+\gamma\sqrt{f}$$

und eines bei welchem sie sich sämmtlich unter den Nullstellen von:

$$g-\gamma\sqrt{f}$$

befinden. Das Resultat dieser Ueberlegungen ist demnach:

Sind nur die Argumentwerthe y, nicht die Stellen y der Riemann'schen Fläche gegeben, so repräsentirt die Gleichung (113) $2^{2\mu}$ *verschiedene Theilungsprobleme; alle diese sind in der Forderung enthalten, $u_{2\nu}$, $g_{n\nu+\mu}$, $\gamma_{n\nu+\mu-3}$ so zu bestimmen, dass identisch:*

$$u^n v=g^2-\gamma^2 f$$

sei. Sind aber nicht nur die Argumentwerthe y, sondern auch die Stellen y gegeben, so sind von den Lösungen dieses algebraischen Problems nur diejenigen beizubehalten, in welchen die Stellen $y', y'' \ldots y^{(2\mu)}$ Nullstellen eines und desselben der beiden Factoren $g+\gamma\sqrt{f}$, $g-\gamma\sqrt{f}$ sind; die gesuchten Stellen x sind dann n-fach gezählt die übrigen Nullstellen eben dieses Factors.

§ 36.

Die Monodromiegruppe der speciellen Theilung.

Nachdem wir unsere Theilungsprobleme in bestimmte algebraische Formulirung gebracht haben, wenden wir uns zur Aufsuchung ihrer Gruppen und beginnen mit der Monodromiegruppe der allgemeinen Theilung. Wir bedürfen zunächst einer passenden Bezeichnung der Lösungssysteme: ähnlich wie Herr C. Jordan*) bezeichnen wir das dem Perioden-n^{tel}:

$$\frac{\nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2 + \nu_3\omega_3 + \nu_4\omega_4}{n} \tag{117}$$

entsprechende Lösungssystem mit:

$$s_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}. \tag{118}$$

Die Zahlen ν sind dabei *mod.* n zu nehmen; durchläuft jede derselben n incongruente Werthe, etwa $0, 1, 2 \ldots n-1$, so repräsentirt (118) die n^4 verschiedenen Lösungssysteme, jedes nur einmal.

Die Parameter (§ 31), auf welche sich die Monodromiegruppe bezieht, sind die Coefficienten von f. Durchlaufen dieselben irgend welche geschlossenen Wege, so treten an Stelle der Perioden ω neue, ω', vermöge der Substitutionen (12) des § 4 (vgl. § 8). Das Perioden ν^{tel} (117) geht dabei über in:

$$\frac{\nu_1\omega_1' + \nu_2\omega_2' + \nu_3\omega_3' + \nu_4\omega_4'}{n},$$

und wenn dies gleich:

$$\frac{\nu_1'\omega_1 + \nu_2'\omega_2 + \nu_3'\omega_3 + \nu_4'\omega_4}{n}$$

ist, so hat sich das Lösungssystem (118) in das andere:

$$s_{\nu_1',\nu_2',\nu_3',\nu_4'}$$

verwandelt. Die ν' hängen aber mit den ν zusammen**) durch die Congruenzen:

$$\left.\begin{aligned}
\nu_1' &\equiv a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 + a_4\nu_4,\\
\nu_2' &\equiv b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 + b_4\nu_4,\\
\nu_3' &\equiv c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3 + c_4\nu_4,\\
\nu_4' &\equiv d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3 + d_4\nu_4.
\end{aligned}\right\} \pmod{n} \tag{119}$$

Indem diese Congruenzen die Indices derjenigen Lösungssysteme angeben, welche bei den Operationen der Monodromiegruppe an die Stelle gegebener Lösungssysteme treten, kann man sagen:

---

*) Traité des subst. p. 356.

**) Man vergleiche die Transformation der Elementarcharakteristiken in § 6, Gl. (31) u. (31a). Dabei ist nur zu beachten, dass dort h' für ν, h für ν' steht.

Die Monodromiegruppe des speciellen Theilungsproblems ist definirt durch das Congruenzensystem (119), *dessen Coefficienten den Bedingungen des* § 4 (*mod. n*) *genügen müssen.*

Mit Rücksicht auf § 15 kann dies Resultat auch so ausgesprochen werden:

Die Hauptgruppe der Modulfunctionen (§ 13) *reducirt sich durch Adjunction der Principaluntergruppe n^{ter} Stufe auf eine Gruppe, zu welcher die Monodromiegruppe der speciellen n-Theilung holoedrisch isomorph ist.*

Die Ordnung (Anzahl der Operationen) der letzteren Gruppe ist also gleich dem Index der Principaluntergruppe n^{ter} Stufe, nämlich (nach Gl. (49)):

$$N = (n^4 - 1) \cdot n^3 \cdot (n^2 - 1) \cdot n.$$

Das Lösungssystem s_{0000} bleibt bei allen Operationen der Gruppe an seiner Stelle, wie es sein muss, da es ja rational bekannt ist.

§ 37.

Die Monodromiegruppe der allgemeinen Theilung.

Es sei die einzelne Lösung wieder mit einem Buchstaben bezeichnet:

$$S_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4},$$

entsprechend dem zugehörigen Argumentensystem:

$$\frac{w + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2 + \nu_3 \omega_3 + \nu_4 \omega_4}{n}.$$

Diese Bezeichnung wird dann eine ganz bestimmte sein, wenn über die Integrationswege, auf welchen die Integralwerthe w erhalten werden, eine bestimmte Festsetzung getroffen ist. Es werde vorausgesetzt, dass das geschehen sei; in welcher Weise, ist gleichgültig.

Um nun die Monodromiegruppe des Problems zu erhalten, wird man einerseits die Coefficienten von f, andererseits die Stelle $(y, \sqrt{f(y)})$ geschlossene Wege durchlaufen lassen müssen. Die erstere Operation führt die Indices ν, den Resultaten von § 36 zufolge, in andere ν' über, welche mit jenen durch die Congruenzen (119) verbunden sind. Durchläuft aber eine Stelle y etwa den ersten Periodenweg, so vermehrt sich ν_1 um 1, bei wiederholtem Umlauf um eine beliebige ganze Zahl; dasselbe lässt sich bei den übrigen ν erreichen. *Die Monodromiegruppe G des allgemeinen Theilungsproblems kann also definirt werden durch ein System von Congruenzen, welches aus dem System* (119) *durch Zufügung additiver Glieder entsteht, etwa:*

$$(120) \qquad \left.\begin{aligned} \nu_1' &\equiv A + a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2 + a_3 \nu_3 + a_4 \nu_4, \\ \nu_2' &\equiv B + b_1 \nu_1 + b_2 \nu_2 + b_3 \nu_3 + b_4 \nu_4, \\ \nu_3' &\equiv C + c_1 \nu_1 + c_2 \nu_2 + c_3 \nu_3 + c_4 \nu_4, \\ \nu_4' &\equiv D + d_1 \nu_1 + d_2 \nu_2 + d_3 \nu_3 + d_4 \nu_4. \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

Diese Gruppe besteht aus:

$$n^4 \cdot N$$

Operationen, wo N in (49) *definirt ist.*

Es möge hier sogleich die Frage nach *Untergruppen* von G gestellt werden, die wir für das specielle Problem erst später aufwerfen werden. Man erkennt zunächst unmittelbar:

Ein erstes Beispiel einer solchen Untergruppe liefert die Monodromiegruppe g_1 des speciellen Theilungsproblems für dieselbe Zahl n.

Der Index von g_1 in Bezug auf G ist n^4.

Eine zweite Untergruppe g_2 wird gebildet von den Substitutionen der Form:

$$(121)\qquad \begin{aligned} v_1' &\equiv v_1 + A, \\ v_2' &\equiv v_2 + B, \\ v_3' &\equiv v_3 + C, \\ v_4' &\equiv v_4 + D. \end{aligned}$$

Diese Untergruppe ist innerhalb der Gruppe G ausgezeichnet. Denn aus den Congruenzen:

$$\begin{aligned} v_1' &\equiv A + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots, \text{ etc.}, \\ v_1'' &\equiv v_1' + A', \text{ etc.}, \\ v_1''' &\equiv c_3(v_1'' - A) + d_3(v_2'' - B) - \cdots, \text{ etc.} \end{aligned}$$

in welchen die $c_3, d_3, \ldots$ (vgl. § 4, Gl. (14)) das inverse System zu dem der a bilden, folgt sofort:

$$v_1''' \equiv v_1 + A''';$$

d. h. wird eine Operation von g_2 durch eine Operation von G transformirt, so wird wieder eine Operation von g_2 erhalten. Das aber ist die charakteristische Eigenschaft einer ausgezeichneten Untergruppe.

Der Index dieser Untergruppe in Bezug auf G ist N.

Zu diesen beiden Untergruppen suchen wir nun zugehörige *Resolventen.*

Bei allen Operationen der Untergruppe g_1 bleibt S_{0000} an seinem Platze; andererseits wird diese Wurzel bei jeder Operation von G, welche nicht zu g_1 gehört, durch eine andere S_{ABCD} ersetzt. Eine zu g_1 gehörige Resolvente ist also die Gleichung, von welcher S_{0000} abhängt, m. a. W.:

Zu der Untergruppe g_1 des allgemeinen Theilungsproblems gehört als Resolvente eben dieses allgemeine Theilungsproblem selbst.

Eine Resolvente, welche der Untergruppe g_2 zugehört, wird erhalten werden, wenn man eine Function der S kennt, welche bei den Operationen dieser Untergruppe unverändert bleibt. Da nun diese Operationen dadurch zu Stande kommen, dass die Stellen y ge-

schlossene Wege beschreiben, so wird die gesuchte Function von diesen Stellen *rational* abhängen müssen. Solche Functionen sind aber die *Lösungen des speciellen Theilungsproblems.* Die *einzelne* Wurzel desselben würde jedoch dem hier in's Auge gefassten Zwecke insofern nicht entsprechen, als sie nicht nur bei den Operationen von g_2, sondern auch noch bei andern Operationen ungeändert bleibt. Da jedoch diese hinzutretenden Operationen für jede Wurzel des speciellen Theilungsproblems andere und andere sind, so wird eine Function dieser Wurzeln, welche bei keiner zulässigen (in g_1 enthaltenen) Vertauschung derselben ungeändert bleibt, m. a. W. so wird eine Wurzel der im Sinne der Monodromiegruppe gebildeten Galois'schen Resolvente des speciellen Theilungsproblems sich als zweckentsprechend erweisen. Auf diese Weise gelangt man zu dem Resultate:

Zur Untergruppe g_2 gehört als Resolvente des allgemeinen Theilungsproblems die im Sinne der Monodromiegruppe zu bildende Galois'sche Resolvente des speciellen Theilungsproblems.

Ob man nun *die* Wurzel einer solchen Resolvente adjungirt oder *sämmtliche* Wurzeln des speciellen Theilungsproblems selbst, hat ganz die gleiche Wirkung; es soll deshalb im Folgenden der Kürze halber zumeist von letzterer Operation gesprochen werden.

§ 38.

Auflösung des allgemeinen Theilungsproblems nach Adjunction der Wurzeln des speciellen.*)

Wird nun der Rationalitätsbereich erweitert, indem die Wurzeln der speciellen Theilungsgleichung als bekannt angenommen werden, so erscheinen neben den y nicht mehr die Coefficienten von f, sondern eben diese Wurzeln als die Parameter, welche bei Bestimmung der Monodromiegruppe des allgemeinen Problems zu Grunde zu legen sind. Werden aber sämmtliche Wurzeln des speciellen Theilungsproblems zu ihren Anfangswerthen zurückgeführt, so kehrt auch jeder Periodenbruchtheil

$$\frac{\nu_1\omega_1+\nu_2\omega_2+\nu_3\omega_3+\nu_4\omega_4}{n}$$

wieder zu seinem Anfangswerth zurück, demnach auch jedes $S_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}$, sodass die Monodromie *dieser* Parameter überhaupt keine Permutation der S bewirkt. Solche Permutationen können also nur noch durch die Monodromie der Stellen y hervorgebracht werden: diese aber liefert keine andern Operationen als die der durch die Congruenzen (121) definirten Untergruppe g_1. M. a. W.:

*) Vgl. Hermite, Cr. J. Bd. 32, p. 277 (Jacobi's ges. W. Bd. II, p. 87).

Durch Adjunction sämmtlicher Wurzeln des speciellen Theilungsproblems reducirt sich die Monodromiegruppe des allgemeinen auf die Gruppe g_2.

So führt die directe Betrachtung der Monodromie der neuen Parameter zu demselben Resultat, zu welchem auch der allgemeine Satz der Algebra geführt haben würde:

*Adjunction der Wurzeln einer ausgezeichneten Resolvente reducirt das Hauptproblem, ohne es ganz zu lösen.**)

Die Gruppe g_2 auf deren Untersuchung man so geführt ist, hat einen sehr einfachen Aufbau: alle ihre Operationen sind untereinander vertauschbar. Eine Gleichung, deren Gruppe diese Eigenschaft besitzt, nennt man eine *Abel'sche Gleichung***). Die Gruppe erwächst aus 4 erzeugenden Operationen, welche in Vermehrung je eines ν um 1 bestehen; jede derselben besitzt eine Periode $= n$. In Folge dessen ist unsere Gleichung durch Nebeneinanderstellen von vier n^{ten} Wurzeln lösbar, und wir können das Resultat zusammenfassen in dem Satze***):

Nach Adjunction der Wurzeln des speciellen Theilungsproblems findet das allgemeine seinen Ausdruck in einer vierfaltigen Abel'schen Gleichung und ist daher algebraisch, nämlich durch 4 nebeneinandergestellte n^{te} Wurzeln, lösbar.

Die wirkliche Ausführung der Auflösung geschieht in bekannter Weise durch die Resolvente von Lagrange; man vgl. übrigens § 31.

§ 39.

Resolventen des speciellen Theilungsproblems auf Grund der Monodromiegruppe.

Wir wenden uns nunmehr wieder dem speciellen Theilungsproblem zu und stellen zunächst die Frage nach *ausgezeichneten Untergruppen*. Eine solche ist die Gruppe von nur zwei Operationen:

$$(122) \qquad \begin{aligned} \nu_1' &\equiv \nu_1, \\ \nu_2' &\equiv \nu_2, \\ \nu_3' &\equiv \nu_3, \\ \nu_4' &\equiv \nu_4, \end{aligned} \qquad \text{und:} \qquad \left.\begin{aligned} \nu_1' &\equiv -\nu_1, \\ \nu_2' &\equiv -\nu_2, \\ \nu_3' &\equiv -\nu_3, \\ \nu_4' &\equiv -\nu_4. \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

Eine zugehörige Resolvente muss zur Wurzel eine Function der Lösungen haben, welche ungeändert bleibt, wenn sämmtliche Perioden

*) Vgl. etwa C. Jordan, tr. des subst. p. 261 oder Netto, Substitutionentheorie p. 264.

**) Vgl. etwa C. Jordan, a. a. O. p. 286 oder Netto, a. a. O. p. 189 ff.

***) Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen § 70.

im Vorzeichen geändert werden, also den Theilwerth einer *geraden* hyperelliptischen Function. Es folgt hieraus:

Die specielle Theilung lässt sich spalten in ein Problem mit einer Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}N$ und in ein Problem mit einer Gruppe der Ordnung 2. Als das erstere kann die specielle Theilung der geraden Functionen gewählt werden; ist dieselbe erledigt, so erfordert die Theilung der ungeraden Functionen nur noch die Ausziehung einer Quadratwurzel.

Es ist dieser Spaltung schon oben bei der algebraischen Formulirung (§ 33) Rechnung getragen worden, als zwei conjugirte Lösungen zusammengefasst und damit der Grad des Problems von n^4-1 auf $\frac{1}{2}(n^4-1)$ herabgedrückt wurde; doch konnten wir damals noch nicht schliessen, dass nachher *eine* Quadratwurzel ausreicht. —

Die Gruppe des geraden Problems lässt sich nun am einfachsten schreiben, wenn man die ν nur als Verhältnissgrössen auffasst: die Quotienten der ν bleiben ja ungeändert, wenn man die ν alle das Vorzeichen wechseln lässt. Setzt man, um dies auszudrücken, einen Proportionalitätsfactor ϱ zu, so erhält man für die *Monodromiegruppe des speciellen Theilungsproblems der geraden Functionen* die Form:

$$(123)\qquad \left.\begin{aligned} \varrho\nu_1' &\equiv a_1\nu_1+a_2\nu_2+a_3\nu_3+a_4\nu_4,\\ \varrho\nu_2' &\equiv b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3+b_4\nu_4,\\ \varrho\nu_3' &\equiv c_1\nu_1+c_2\nu_2+c_3\nu_3+c_4\nu_4,\\ \varrho\nu_4' &\equiv d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3+d_4\nu_4. \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod.}\ n)$$

Dabei hindert die Bedingung:

$$(abcd)=1,$$

welcher die Coefficienten genügen müssen, dem Multiplicator ϱ andere Werthe als ± 1 beizulegen.

Nach den Untersuchungen des Herrn C. Jordan*) ist diese Gruppe *einfach*, d. h. sie enthält keine ausgezeichnete Untergruppe mehr.

Es ist also eine weitere Spaltung des speciellen Theilungsproblems nicht mehr möglich. —

Wenn sonach auf eine Zerlegung des Auflösungsprocesses in einzelne Schritte verzichtet werden muss, so bleibt nur noch die Frage nach geeigneten Gleichungen, welche als algebraischer Ausdruck des Problems gelten können, d. h. die Frage nach (nicht ausgezeichneten) *Untergruppen* und *Resolventen*. Bei der Beantwortung dieser Frage wird man sich wieder leiten lassen durch die Resultate, welche die Behandlung der entsprechenden Frage in der Theorie der *elliptischen* Functionen geliefert hat. Als das wichtigste Resultat erscheint dort,

*) Tr. des subst. p. 176 ff.

dass *das specielle Transformationsproblem eine* ***Resolvente*** *des speciellen Theilungsproblems* ist: während dem letzteren eine Gruppe zukommt, die durch die Congruenz:

$$(124)\qquad \left.\begin{aligned} \varrho v_1' &\equiv a_1 v_1 + a_2 v_2 \\ \varrho v_2' &\equiv b_1 v_1 + b_2 v_2 \end{aligned}\right\} \text{(mod. } n\text{)}$$

mit der Bedingung:

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 \equiv 1 \text{ (mod. } n\text{)}$$

dargestellt ist, bleibt die einzelne Wurzel des Transformationsproblems ungeändert bei derjenigen Untergruppe von (124), welche durch die Congruenz:

$$(125)\qquad a_2 \equiv 0 \text{ (mod. } n\text{)}$$

definirt ist, bezw. bei einer mit dieser gleichberechtigten Untergruppe.

Versucht man nun aus der Gruppe (123) in ähnlicher Weise, wie dies durch (125) aus der Gruppe (124) geschieht, Untergruppen abzuscheiden durch Congruenzen, welchen die Coefficienten unterworfen werden, so sieht man leicht, dass das in doppelter Weise geschehen kann. Man kann erstens

$$b_1 \equiv c_1 \equiv d_1 \equiv 0$$

annehmen; der Bilinearrelationen (15) wegen muss dann auch:

$$c_2 \equiv c_4 \equiv 0$$

gesetzt werden, sodass das Coefficientenschema die folgende Gestalt annimmt:

$$(126)\qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}. \text{ (mod. } n\text{)}$$

Die stehengebliebenen Coefficienten müssen dabei selbstverständlich noch den übrigen Bilinearrelationen genügen.

Man kann aber *zweitens* auch den vierten Theil des Schema's mit Nullen anfüllen, sodass es folgende Gestalt annimmt:

$$(127)\qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}, \text{ (mod. } n\text{)}$$

und dann die so definirte Gruppe betrachten.

Es erheben sich nun die beiden Fragen nach den *Indices* dieser beiden Arten von Untergruppen und nach zugehörigen *Resolventen*. Für die Gruppe (126) kann man die letztere Frage direct angreifen und damit auch zugleich die Beantwortung der ersteren erreichen.*)

*) H. Weber, annali di mat. ser. II, t. 9, p. 156.

Sei wieder $s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ die allgemeine Bezeichnung für die Wurzeln des speciellen Theilungsproblems: man bilde, unter g eine primitive Wurzel der Primzahl n verstanden, eine *cyklische* Function der Lösungssysteme:

$$s_{1000}, \quad s_{g000}, \quad s_{g^2000} \cdots s_{g^{n-2}000},$$

so wird dieselbe bei allen Operationen der Gruppe (126) und bei keinen andern ungeändert bleiben. Denselben Dienst wird aber auch eine *symmetrische* Function dieser Wurzeln leisten, da die Operationen, bei welchen eine solche sonst noch ungeändert bleibt, der hier zu Grunde zu legenden Gruppe (123) des speciellen Theilungsproblems überhaupt nicht angehören. Es möge also etwa die Summe:

$$C = s_{1000} + s_{2000} + s_{3000} + \cdots + s_{n-1,000} \tag{128}$$

den folgenden Auseinandersetzungen zu Grunde gelegt werden. Der Grad der Resolvente, welcher C genügt, bestimmt sich folgendermassen: Durchlaufen die Parameter bestimmte Wege, sodass etwa s_{1000} in $s_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}$ übergeführt werden, so ist damit allein schon völlig bestimmt, in welche Werthe die übrigen in C auftretenden s übergehen: aus s_{2000} wird $s_{2\nu_1,2\nu_2,2\nu_3,2\nu_4}$ aus s_{3000} $s_{3\nu_1,3\nu_2,3\nu_3,3\nu_4}$ u. s. f. Die n^4-1 Wurzeln des speciellen Theilungsproblems lassen sich also in der Weise in Reihen von je $n-1$ Wurzeln zusammenfassen, dass die Summe der Wurzeln jeder Reihe einen der Werthe liefert, welche C bei den Operationen der Gruppe des Problems annimmt. C besitzt also $\frac{n^4-1}{n-1}$ verschiedene Werthe, und das Resultat ist:

Der Grad der Resolvente, welcher C genügt, ist:

$$\frac{n^4-1}{n-1} = n^3 + n^2 + n + 1;$$

dieselbe Zahl giebt also den Index der Untergruppe (126) *an.*

Im Falle $n = 3$ ist übrigens diese Resolvente für C keine andere als diejenige, welche die specielle Theilung der geraden hyperelliptischen Functionen liefert; da nämlich stets $2\nu \equiv -\nu$ (mod. 3), so reducirt sich C in diesem Falle auf:

$$s_{+\nu_1,+\nu_2,+\nu_3,+\nu_4} + s_{-\nu_1,-\nu_2,-\nu_3,-\nu_4}.$$

Die Untersuchung der Untergruppe (127) beginnen wir am bequemsten damit, dass wir ihre Ordnung (die Anzahl ihrer Substitutionen) direct abzählen und aus dieser den Index ableiten. Von den aus den Bilinearrelationen (15) entspringenden Congruenzen ist hier die erste identisch erfüllt, die folgenden liefern (mod. n):

$$a_1c_3 + b_1d_3 \equiv 1, \tag{129}$$

$$a_1c_4 + b_1d_4 \equiv 0, \tag{130}$$

$$a_2c_3 + b_2d_3 \equiv 0, \tag{131}$$

$$a_2c_4 + b_2d_4 \equiv 1, \tag{132}$$

$$a_3c_4 - a_4c_3 + b_3d_4 - b_4d_3 \equiv 0. \tag{133}$$

Wird:

$$d_4 \equiv \mu a_1, \qquad a_2 \equiv \nu d_3$$

gesetzt, so folgt aus (130) und (131):

$$c_4 \equiv -\mu b_1, \qquad b_2 \equiv -\nu c_3;$$

wird beides in (132) eingesetzt, so folgt mit Rücksicht auf (129):

$$(134) \qquad -\mu\nu \equiv 1.$$

Nun können zunächst, wie aus der entsprechenden Untersuchung für den elliptischen Fall hervorgeht,

$$a_1, \; b_1, \; c_3, \; d_3$$

auf $n(n^2-1)$ verschiedene Arten so gewählt werden, dass (129) erfüllt ist. Die Congruenz (134) lässt sich durch $n-1$ Werthepaare μ, ν befriedigen; jedes derselben liefert, wenn a_1, b_1, c_3, d_3 fixirt sind, eine und nur eine Bestimmung für a_2, b_2, c_4, d_4. Sind auch diese festgelegt, so lassen sich von den 4 noch übrigen Coefficienten a_3, a_4, b_3, b_4 immer drei willkürlich wählen und der vierte so dazu bestimmen, dass auch (133) erfüllt ist; und zwar nur auf eine einzige Weise, denn man überzeugt sich leicht, dass c_3, c_4, d_3, d_4 niemals alle gleichzeitig $\equiv 0$ werden. Dies liefert also noch n^3 Möglichkeiten, und man erhält so für die *Ordnung* der hier zu bestimmenden Untergruppe die Zahl:

$$(n^2-1)\, n \cdot (n-1) \cdot n^3$$

und also für ihren Index (vgl. (49)):*)

$$(135) \qquad \frac{n^4-1}{n-1} = (n+1)(n^2+1) = n^3+n^2+n+1.$$

Nun werden wir später zeigen, dass die Gruppe (127) die Gruppe des speciellen Transformationsproblems ist; vorgreifend können wir also sagen:

Die zweite der oben aufgestellten Untergruppen führt zu einer Resolvente des speciellen Theilungsproblems, welche nichts anderes ist als der Ausdruck des speciellen Transformationsproblems. Der Grad derselben ist derselbe, wie der der Resolvente für C, nämlich

$$n^3+n^2+n+1.$$

Was nun die Frage nach etwa noch weiter vorhandenen Untergruppen und zugehörigen Resolventen betrifft, so hat Herr C. Jordan**) für $n = 3$ Untergruppen von den Indices 45, 40, 36, 27 angegeben und gezeigt, dass *die Resolvente* 27. *Grades denselben Affect besitzt, wie die Gleichung, von welcher die Bestimmung der* 27 *Geraden einer*

*) Eine andere Ableitung für diese Zahl giebt C. Jordan, traité p. 666.

**) a. a. O. p. 365 ff. p. 416 ff.

Fläche III. Ordnung abhängt. (Ueber die wirkliche Reduction beider Probleme auf einander vergleiche man den Brief von F. Klein an C. Jordan, Journ. de math. sér. 4, t. 4, p. 169).

Ferner hat C. Jordan gezeigt*), dass für $n = 3$ keine Resolvente von niedrigerem als dem 27. Grad, und angegeben**), dass für $n = 5$ keine Resolvente von niedrigerem Grad existirt als der des speciellen Transformationsproblems ($= 156$).

Herr Gierster hat***) die analoge Frage im Gebiet der elliptischen Functionen dadurch zum Abschluss gebracht, dass er untersuchte, wie man aus den bekannten endlichen Gruppen *binärer linearer Substitutionen* entsprechende Gruppen binärer linearer *Congruenzen* gewinnen könne, und indem er den Beweis hinzufügte, dass man auf diese Weise sämmtliche Untergruppen enthält.

Damit mögen die Angaben über die Monodromiegruppe des speciellen Theilungsproblems abgeschlossen sein.

§ 40.

Arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems.

Wir wenden uns nunmehr der Frage nach der arithmetischen Gruppe zu. Eine untere Grenze für dieselbe ist durch die Monodromiegruppe gegeben; eine obere Grenze liefert der bekannte Satz: *Sobald irgend eine Verbindung der Wurzeln des Problems rational bekannt ist, kann die Galois'sche Gruppe desselben jedenfalls nicht grösser sein, als dass diese Function bei allen Vertauschungen derselben ihren numerischen Werth behält.*

Eine solche Function wird nun durch das *Additionstheorem* in der That geliefert. Aus demselben folgt nämlich: Ist:

$$(136)\qquad \left.\begin{aligned} \nu_1'' &\equiv \nu_1 + \nu_1', \\ \nu_2'' &\equiv \nu_2 + \nu_2', \\ \nu_3'' &\equiv \nu_3 + \nu_3', \\ \nu_4'' &\equiv \nu_4 + \nu_4', \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

so ist $s_{\nu_1''\nu_2''\nu_3''\nu_4''}$ im Sinne des hier zu Grunde zu legenden Rationalitätsbereichs eine rationale Function von $s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ und $s_{\nu_1'\nu_2'\nu_3'\nu_4'}$ mit rationalen Coefficienten; es besteht also eine Gleichung der Form:

$$(137)\qquad s_{\nu''} - R(s_{\nu_1}, s_{\nu'}) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist hiernach eine rational bekannte Function der Wurzeln. Die arithmetische Gruppe unseres Problems

*) a. a. O. p. 319 ff.

**) a. a. O. p. 667.

***) Dieser Ann. Bd. 18.

kann also nur aus solchen Vertauschungen der Wurzeln bestehen, bei welchen diese Function, die gleich Null ist, auch Null bleibt; und sie ist nur Null für: $v'' = v + v'$ (wie die Congruenzen (136) kurz zusammengefasst werden mögen). Damit ist das erste Resultat erhalten:

Die arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems kann nur aus solchen Vertauschungen der Lösungssysteme bestehen, bei welchen Beziehungen der Form:

$$v'' = v + v'$$

ungeändert bleiben.

Diese Vertauschungen lassen sich nun, wie C. Jordan*) für den elliptischen Fall gezeigt hat, in folgender Weise bestimmen. Sei:

$$\bar{v}_i = f_i(v_1, v_2, v_3, v_4), \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{138}$$

eine solche Substitution, so kann aus dem Umstande, dass mit $v'' = v + v'$ zugleich $\bar{v}'' = \bar{v} + \bar{v}'$ sein soll, geschlossen werden, dass die Functionen f die Eigenschaft haben müssen:

$$f_i(v_1 + v_1', \cdots v_4 + v_4') \equiv f_i(v_1, \cdots v_4) + f_i(v_1', \cdots v_4'). \tag{139}$$

Daraus folgt, indem man $v' = v$ setzt, dann $v' = 2v$ u. s. f., dass allgemein:

$$f_i(m v_1, \cdots m v_4) \equiv m f_i(v_1, \cdots v_4) \quad (\text{mod. } n) \tag{140}$$

sein muss. Andererseits liefert Wiederholung von (139):

$$f_i(v_1 + v_1' + v_1'' + v_1''', \cdots)$$
$$\equiv f_i(v_1, \cdots) + f_i(v_1', \cdots) + f_i(v_1'', \cdots) + f_i(v_1''', \cdots)$$

und hieraus folgt, wenn ausser v_1, v_2', v_3'', v_4''' alle $v \equiv 0$ gesetzt werden und zur Abkürzung $f_{i1}(v)$, $f_{i2}(v)$, $f_{i3}(v)$, $f_{i4}(v)$ bezw. statt $f_i(v, 0, 0, 0)$, $f_i(0, v, 0, 0)$, $f_i(0, 0, v, 0)$, $f_i(0, 0, 0, v)$ geschrieben wird:

$$f_i(v_1, v_2', v_3'', v_4''') \equiv f_{i1}(v_1) + f_{i2}(v_2') + f_{i3}(v_3'') + f_{i4}(v_4'''),$$

wo jetzt die oberen Indices auch weggelassen werden können. Die einzelnen f_{ik} müssen nun selbst der Functionalgleichung genügen:

$$f_{ik}(v + v') \equiv f_{ik}(v) + f_{ik}(v'),$$

und diese führt (wie (139) zu (140)) zu:

$$f_{ik}(mv) \equiv m f_{ik}(v)$$

und:

$$f_{ik}(m) \equiv m f_{ik}(1) \equiv a_{ik} m,$$

wo a_{ik} eine Constante ist. Damit ist für die Substitutionen (138) die Form gewonnen:

---

*) a. a. O. p. 346.

$$
(141)\qquad \left.\begin{aligned}
v_1' &\equiv a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4,\\
v_2' &\equiv b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4,\\
v_3' &\equiv c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4,\\
v_4' &\equiv d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 + d_4 v_4.
\end{aligned}\right\}\ (\text{mod. } n)
$$

Die a, b, c, d sind dabei zunächst keiner andern Bedingung unterworfen, als dass ihre Determinante nicht $\equiv 0$ (mod. n) sein darf, da sonst die Congruenzen (141) keine Substitution darstellen. Also folgt:

Beziehungen der Form $v'' = v + v'$ *bleiben nur bei den Operationen der linearen Gruppe* (141) *erhalten.*

Folglich ist die arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems in dieser Gruppe enthalten.

Andererseits ist auf Grund eines allgemeinen Satzes*) bekannt, dass die Monodromiegruppe eine *ausgezeichnete Untergruppe* der arithmetischen Gruppe ist. Nun kann aber die allgemeinste Untergruppe von (141), welche die Monodromiegruppe ausgezeichnet enthält, durch folgende Ueberlegung**) bestimmt werden: Bei allen Operationen der Monodromiegruppe bleibt die Bilinearform:

$$
(142)\qquad v_1 v_3' - v_3 v_1' + v_2 v_4' - v_4 v_2'
$$

(mod. n) erhalten; und zwar ist dies die einzige Bilinearform, welche diese Eigenschaft hat. Soll also eine Operation mit der Monodromiegruppe vertauschbar sein, so muss sie die Bilinearform (142) in eine Function derselben verwandeln. Soll diese Operation zugleich unter der Gruppe (141) begriffen sein, so kann diese Function, da sie wieder eine Bilinearform sein muss, nichts anderes sein als ein Multiplum der ursprünglichen Bilinearform. Also:

Eine lineare Substitution, welche mit der Monodromiegruppe vertauschbar ist, ändert die Bilinearform (142) *nur um eine multiplicative Constante.*

Aber alle Substitutionen, welche diese Eigenschaft haben, genügen***) den Relationen:

$$
(143)\qquad \left.\begin{matrix}
[a,b]\equiv 0, & [a,c]\equiv D, & [a,d]\equiv 0,\\
[b,c]\equiv 0, & [b,d]\equiv D, & [c,d]\equiv 0,
\end{matrix}\right\}\ (\text{mod. } n)
$$

wobei D nur nicht $\equiv 0$ (mod. n) sein darf, damit überhaupt eine Substitution erhalten wird. Damit ist nun das Resultat erhalten:

Die arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems ist enthalten in derjenigen Untergruppe der linearen Gruppe (141), *welche durch die Congruenzen* (143) *charakterisirt ist.*

---

*) C. Jordan, tr. des subst. p. 278.

**) C. Jordan benutzt a. a. O. p. 363 eine andere Ueberlegung.

***) C. Jordan, a. a. O. p. 172.

Nun enthält (was ganz ebenso wie § 15 abzuzählen ist), die Gruppe (143):

$$(n-1)\,N$$

Operationen, unter N die Ordnung der Monodromiegruppe (49) verstanden; also:

Die arithmetische Gruppe ist höchstens $(n-1)$ *mal so gross, als die Monodromiegruppe.*

Enthält die arithmetische Gruppe überhaupt eine der Operationen der Gruppe (143), so enthält sie alle diejenigen, welche demselben Werthe D_1 von D entsprechen; denn alle diese gehen durch Zusammensetzung mit den Operationen der Monodromiegruppe auseinander hervor. Sie enthält aber dann auch, wie sofort zu sehen, alle Operationen, für welche $D \equiv D_1^2, D_1^3 \ldots.$ Die Anzahl der (*mod. n*) verschiedenen Potenzen von D_1 ist aber bekanntlich stets ein Theiler von $n-1$; daher folgt:

Die arithmetische Gruppe besteht aus $\delta \cdot N$ *Operationen, unter* δ *einen Theiler von* $n-1$ *verstanden, der zugleich angiebt, wie vieler verschiedener Werthe das* D *innerhalb der arithmetischen Gruppe fähig ist.*

Nunmehr kann auch noch diese Zahl δ mit Hilfe eines indirecten Schlusses bestimmt werden. Man bilde eine rationale Function der Wurzeln, welche die Eigenschaft hat, bei allen Substitutionen der Monodromiegruppe ungeändert zu bleiben, bei allen andern Vertauschungen der Wurzeln aber sich zu ändern. Eine solche Function wird eine *rationale Function der Parameter mit irrationalen Zahlencoefficienten* sein. Die einfachste Function dieser Art würde man erhalten, wenn man erreichen könnte, dass die Parameter ganz herausfallen. In der That gelingt es bekanntlich im *elliptischen* Falle, die ν^{te} *Einheitswurzel* ε als rationale Function der Wurzeln des speciellen Theilungsproblems darzustellen. Da nun ε einer *irreducibeln* Gleichung mit einer Gruppe von $n-1$ Operationen genügt, so ist in *diesem* Falle in der That:

$$\delta = n-1,$$

und es sind alle Werthe von D zulässig.

Andererseits aber kann man ohne Schwierigkeit zeigen:

Die specielle elliptische Theilung ist ein Specialfall der speciellen hyperelliptischen Theilung, indem aus dem algebraischen Ansatz für $p=2$ (*Glchg.* (110)) *sofort der entsprechende Ansatz für* $p=1$ *folgt, wenn man zwei Wurzeln von* f_6 *zusammenfallen lässt.*

Da nun im elliptischen Fall die Adjunction von ε erforderlich ist, um die arithmetische Gruppe auf die Monodromiegruppe herabzudrücken,

so kann im hyperelliptischen Falle, als dem allgemeineren, sicher nicht weniger erforderlich sein. Man wird daher auch in diesem:

$$\delta = n - 1$$

zu setzen haben und erhält so zunächst das Resultat:

Die arithmetische Gruppe des speciellen Theilungsproblems besteht aus allen Operationen, welche den Bedingungen (143) *für beliebige von Null verschiedene D genügen.*

Was die arithmetische Natur der Irrationalität betrifft, durch deren Adjunction die arithmetische Gruppe auf die Monodromiegruppe herabgedrückt wird, so wird man annehmen dürfen, dass dieselbe von ε nicht verschieden sei.

§ 41.

Arithmetische Gruppe des allgemeinen Theilungsproblems.

Die arithmetische Gruppe des allgemeinen Theilungsproblems wird nun erhalten, wenn man die Monodromiegruppe der allgemeinen Theilung mit der arithmetischen Gruppe der speciellen vereinigt. Denn die Reduction der allgemeinen Theilung auf die specielle (§ 37) erfordert nicht die Adjunction von irgend welchen numerischen Irrationalitäten.

Die Zusammenfassung aller bisher erlangten Einzelresultate führt daher zu folgenden Schlusssätzen.

Die Lösungen des allgemeinen Theilungsproblems seien wieder bezeichnet mit $S_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}$. Dann können die Vertauschungen seiner arithmetischen Gruppe definirt werden durch die Congruenzen:

$$(144)\qquad \left.\begin{aligned} \nu_1' &\equiv A + a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 + a_4\nu_4, \\ \nu_2' &\equiv B + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 + b_4\nu_4, \\ \nu_3' &\equiv C + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3 + c_4\nu_4, \\ \nu_4' &\equiv D + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3 + d_4\nu_4, \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

deren Coefficienten den Bedingungen zu genügen haben

$$(145)\qquad \begin{aligned} [a, b] \equiv [a, d] \equiv [b, c] \equiv [c, d] \equiv 0, \\ [a, c] \equiv [b, d] \gtrless 0. \end{aligned} \qquad \pmod{n}.$$

Diesen Bedingungen genügen $n^4 \cdot (n-1) \cdot N$ Werthsysteme; die arithmetische Gruppe des allgemeinen Theilungsproblems enthält also:

$$n^4(n-1)N = n^8 \cdot (n^2+1) \cdot (n+1)^2 \cdot (n-1)^3$$

Operationen.

Zur Lösung des allgemeinen Theilungsproblems führen demnach folgende Schritte:

1. *Zuerst ist die Einheitswurzel ε zu berechnen; dadurch reducirt sich die Gruppe auf Nn^4 Operationen.*

2. *Hierauf ist die specielle Theilung der geraden hyperelliptischen Functionen vorzunehmen; dadurch reducirt sich die Gruppe auf* $2n^4$ *Operationen.*

3. *Die specielle Theilung der ungeraden hyperelliptischen Functionen verlangt jetzt nur noch eine Quadratwurzelausziehung; diese bringt eine Reduction der Gruppe auf* n^4 *Operationen mit sich.*

4. *Endlich sind noch vier verschiedene nebeneinanderstehende* n^{te} *Wurzeln zu ziehen; dadurch reducirt sich die Gruppe auf eine Operation und die Auflösung ist erreicht.*

Alle diese Schritte lassen sich durch Wurzelausziehungen ausführen, mit Ausnahme des zweiten, der mit einer Gruppe von $\frac{1}{2}N$ Operationen zu thun hat.

Ausdrücklich sei wiederholt, dass alle diese Sätze unter der Voraussetzung:

n eine ungerade Primzahl

abgeleitet sind.

VI. Abschnitt.

Zweitheilung.

§ 42.

Formulirung.

Schon bei der ersten Formulirung des Zweitheilungsproblems zeigt sich ein abweichendes Verhalten gegenüber dem Problem der Theilung durch eine ungerade Primzahl. Dort musste in der Gleichung (115) links nothwendig eine gerade Anzahl von Punkten x auftreten; denn nur dann war die linke Seite unabhängig von der Auswahl des Verzweigungspunktes a. Setzt man aber das Zweitheilungsproblem in der Gestalt an:

$$(146)\qquad \int_a^x + \int_a^{x'} + \cdots = \frac{w + \nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2 + \nu_3\omega_3 + \nu_4\omega_4}{2},$$

so kann man links auch eine ungerade Anzahl von Punkten haben, ohne dass dadurch ein Verzweigungspunkt ausgezeichnet würde; denn wird dann a durch irgend einen andern Verzweigungspunkt ersetzt, so ändert sich die Integralsumme nur um eine halbe Periode; an Stelle des vorher angenommenen Werthes der rechten Seite ist also nur ein anderer der Werthe zu setzen, deren sie ohnehin fähig ist.

Es kann demnach bei der Zweitheilung sowohl nach einer geraden, wie nach einer ungeraden Anzahl von Punkten gefragt werden; beides

sind Fragestellungen, die nicht von der Bevorzugung eines einzelnen Verzweigungspunktes abhängen. *)

Von der Hereinziehung der Verzweigungspunkte wird man die Fragestellung am besten ablösen: Der Umstand nämlich, auf welchen es allein ankommt, ist, dass auf dem hyperelliptischen Gebilde *eine Schaar von Punktgruppen von vornherein rational bekannt ist:* die Punkte des Gebildes sind paarweise conjugirt, also sind diese Paare conjugirter Punkte rational bekannt. *In Folge dessen kann man das Umkehrproblem* (41) *in folgender Weise formuliren:*

$$(147)\qquad \int_{z'}^{y'} + \int_{\bar{z}'}^{y''} + \int_{z''}^{y'''} + \int_{\bar{z}''}^{y^{IV}} + \cdots = w$$

indem man als untere Grenzen der Integrale immer solche Punktepaare $z, \bar{z}$ *ansetzt.* Von der speciellen Auswahl dieser Punktepaare ist dieser Ansatz ganz unabhängig; er knüpft nur an die rational bekannte Schaar von Punktgruppen an. Das Problem der n-Theilung entsteht nun, indem man verlangt, die y sollen zu je n in Punkte x zusammenfallen. Ist ϱ die Anzahl der x, so ist $n\varrho$ die der y; nach dem gemachten Ansatz muss diese Zahl eine gerade sein. Ist nun n ungerade, so muss ϱ gerade sein; ist aber n gerade, so kann ϱ auch ungerade gewählt werden; und das hatten wir behauptet.

Dementsprechend wird im folgenden von einem *geraden* und einem *ungeraden Zweitheilungsproblem* die Rede sein.

§ 43.

Das specielle gerade Zweitheilungsproblem.

Das specielle gerade Zweitheilungsproblem, mit dessen Discussion begonnen werden möge, lässt sich ganz in derselben Weise behandeln; wie dies in den §§ 33 und 36 mit dem speciellen Problem der Theilung durch eine ungerade Primzahl geschehen ist. Nur wird man, um zu einem algebraischen Ausdruck desselben zu gelangen, in Glchg. (103) ν nicht $= 1$ setzen, um nicht gleich zu Anfang Fallunterscheidungen eintreten lassen zu müssen. —

Die Lösungen können, ganz wie dies § 36, Formel (117), (118) geschehen ist, mit $s_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}$ bezeichnet werden; dann ist wie dort s_{0000} die rational bekannte Lösung, welche auf die Systeme paarweise conjugirter Punkte führt, und die Permutationen, welche die

*) Vergl. die pag. 246 citirten Arbeiten des Herrn Nöther im 16. und 28. Band dieser Ann., in welchen die entsprechenden Unterscheidungen für beliebige algebraische Gebilde stark betont sind.

übrigen 15 Lösungen erfahren, wenn die Parameter geschlossene Wege durchlaufen, sind analog wie unter Nr. 119 gegeben durch die Congruenzen:

$$(148)\qquad \left.\begin{aligned} v_1' &\equiv a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4,\\ v_2' &\equiv b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4,\\ v_3' &\equiv c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4,\\ v_4' &\equiv d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 + d_4 v_4, \end{aligned}\right\} \text{(mod. 2)}$$

deren Coefficienten natürlich den Bedingungen (13) nach dem Modul 2 genügen müssen. Mit Rücksicht auf (49) erhält man demnach als erstes Resultat:

Die Monodromiegruppe des geraden speciellen Zweitheilungsproblems besteht aus den 720 *in* (148) *enthaltenen Operationen.*

Ein Problem mit einer Gruppe von 720 Operationen ist die wirkliche Aufsuchung der Verzweigungspunkte, die Lösung der Gleichung:

$$f_6 = 0.$$

In der That wird allgemein mit diesem Problem zugleich das der speciellen Zweitheilung der hyperelliptischen Functionen erster Stufe gelöst. Denn die letztere führt (vgl. § 29) auf Functionen II. Stufe; in § 22 ist aber gezeigt, dass überhaupt *alle* Modulfunctionen II. Stufe sich rational durch die Coordinaten der Verzweigungspunkte ausdrücken lassen. Also folgt zunächst für den hier vorliegenden Fall des Problems:

Die Gleichung $f_6 = 0$ *ist eine Resolvente des geraden speciellen Zweitheilungsproblems.*

Seien, um das im einzelnen durchzuführen, x', x'' ... irgend welche Punkte, die eine bestimmte Lösung $s_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}$ des geraden speciellen Zweitheilungsproblems liefern; dann werden $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ ... dieselbe Lösung darstellen. Sie geben nämlich (vgl. § 33) $s_{-\nu_1,-\nu_2,-\nu_3,-\nu_4}$, und das ist hier von $s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ nicht verschieden. Also folgt:

Ein jedes Punktsystem, welches eine Lösuug des speciellen Zweitheilungsproblems liefert, ist zu dem System der conjugirten Punkte äquivalent.

Solche Punktsysteme sind aber, wenn die Zahl der Punkte, was ja stets angeht, unter sechs herabgedrückt wird, nur zu bilden aus Paaren conjugirter Punkte x, $\bar{x}$ und aus den Verzweigungspunkten. Erstere können unbeschadet der Aequivalenz weggelassen werden, sodass nur die Verzweigungspunkte bleiben und man folgendes Resultat erhält:

Das gerade specielle Zweitheilungsproblem verlangt die Bestimmung einer geraden Anzahl von Verzweigungspunkten von der Beschaffenheit, dass die zugehörige Integralsumme eine halbe Periode wird.

Aber *jede* gerade Anzahl von Verzweigungspunkten liefert eine halbe Periode als Integralsumme; beachtet man also noch, dass die Summe der Integrale von einem Verzweigungspunkte zu allen andern Null ist, dass es also gleichgültig ist, ob man eine bestimmte Gruppe von Verzweigungspunkten wählt oder gerade die nicht in dieser Gruppe enthaltenen, so erkennt man, dass es nur darauf ankommt, alle Zerlegungen der Form f_6 in zwei Factoren geraden Grades zu finden. Man hat also folgendes Resultat:

Die Gleichung 16. *Grades des geraden speciellen Zweitheilungsproblems reducirt sich nach Abtrennung des Linearfactors, welcher den Systemen paarweise conjugirter Punkte entspricht, auf diejenige Resolvente* 15. *Grades von* f_6, *von welcher die Zerspaltungen:*

$$f_6 = \varphi_2 \cdot \psi_4$$

abhängen.

§ 44.

Das specielle ungerade Zweitheilungsproblem.

Für das specielle *ungerade* Zweitheilungsproblem kann eine Bezifferung der Wurzeln, wie wir sie bisher benutzten, nicht mehr ohne Bevorzugung eines Verzweigungspunktes durchgeführt werden. In Folge dessen ist die Monodromiegruppe der Lösungssysteme nicht mehr so leicht von vornherein zu übersehen, und ihre Aufstellung soll daher bis nach der algebraischen Discussion verschoben werden.

Die letztere aber geschieht wie bei dem geraden Problem. Denn wenn die bis zu den Punkten $x', x'' \dots$ erstreckten Integrale eine halbe Periode geben, so geben die bis zu den Punkten $\bar{x}', \bar{x}'' \dots$ erstreckten Integrale dieselbe halbe Periode (mit entgegengesetztem Zeichen, was hier gleichgültig ist). Analoge Schlüsse wie in § 43 führen von da aus zu dem Resultat:

Das ungerade specielle Zweitheilungsproblem verlangt, alle Zerlegungen der Form f_6 *in zwei Factoren ungeraden Grades zu finden.*

Nun existiren:

$$6 \text{ Zerspaltungen } f_6 = \varphi_1 \cdot \psi_5,$$
$$10 \text{ Zerspaltungen } f_6 = \varphi_3 \cdot \psi_3;$$

man erhält also in der That 16 Lösungen und kann den Satz aussprechen:

Die Gleichung 16. *Grades des ungeraden speciellen Zweitheilungsproblems ist reducibel, indem ihre linke Seite in zwei Factoren zerfällt: der eine dieser Factoren ist die Form* f_6 *selbst, der andere diejenige Resolvente* 10. *Grades derselben, von der die Zerspaltungen von* f_6 *in zwei cubische Factoren abhängen.*

Man sieht, *dass den* 16 *Lösungen des ungeraden Problems die* 16 *Formen D* des § 23, *also auch die* 16 *Sigmafunctionen entsprechen.* Diese Bemerkung führt nun auch zur Beantwortung der zuerst bei Seite geschobenen Fragen nach einer zweckmässigen Bezeichnung der Lösungssysteme und nach der Darstellung der Monodromiegruppe durch Congruenzen. Man wird nämlich jeder Lösung unseres Problems bei Zugrundelegung eines bestimmten Querschnittsystems diejenigen vier Zahlen als Indices beilegen, welche die Primcharakteristik der zugehörigen Sigmafunction in Bezug auf dasselbe Querschnittsystem bilden. Dann folgt (vgl. § 27), dass die *Monodromiegruppe des ungeraden speciellen Theilungsproblems dargestellt werden kann durch die Congruenzen:*

$$(149)\quad \left.\begin{aligned} \nu_1' &\equiv a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + a_3\nu_3 + a_4\nu_4 + a_1a_3 + a_2a_4,\\ \nu_2' &\equiv b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3 + b_4\nu_4 + b_1b_3 + b_2b_4,\\ \nu_3' &\equiv c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3 + c_4\nu_4 + c_1c_3 + c_2c_4,\\ \nu_4' &\equiv d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3 + d_4\nu_4 + d_1d_3 + d_2d_4. \end{aligned}\right\} \pmod{2}$$

(deren Coefficienten natürlich wieder den oft erwähnten Bedingungen mod. 2 genügen).

Der Reducibilität des Problems entspricht die Intransivität seiner Gruppe. In der That lassen alle Substitutionen (118) die quadratische Form:

$$\nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_4$$

nach dem Modul 2 ungeändert; in Folge dessen vertauschen sich einerseits diejenigen Lösungen unter sich, für welche der Werth dieser Form gerade, andererseits diejenigen, für welche er ungerade ist. —

Es mögen hier noch zwei Bemerkungen Platz finden, welche sich sowohl auf das gerade, als auf das ungerade specielle Zweitheilungsproblem beziehen.

Erstens nämlich ist zu erwähnen, dass man die einzelnen Factoren von f finden kann, sobald man einen der Factoren des geraden oder des ungeraden Problems in seine linearen Bestandtheile zerspalten hat. Denn aus je zwei Factoren gleichen Grades von f, die alle Wurzeln bis auf eine gemein haben, lässt sich diese Wurzel auf rationalem Wege abtrennen. Es sind also damit zugleich auch die übrigen Factoren beider Probleme zerspalten, sodass man sagen kann:

Sämmtliche irreducibeln Factoren des speciellen Zweitheilungsproblems werden aufgelöst, indem man die Wurzeln eines dieser Factoren bestimmt.

Diese Bemerkung hat selbstverständlich keinen Bezug auf den einen Factor I. Grades des geraden Problems.

Zweitens sei bemerkt, dass bei der Zweitheilung die arithmetische Gruppe von der Monodromiegruppe sich nicht unterscheidet, indem hier ε gleich der rationalen Zahl -1 ist.

§ 45.

Auflösung der Gleichung sechsten Grades durch hyperelliptische Functionen.

Es liegt die Frage nahe, ob nicht die ganze Betrachtung der §§ 43, 44 umgekehrt werden kann. Soeben wurde die Zweitheilung auf die Auflösung von $f_6 = 0$ zurückgeführt; kann man nicht auch die Auflösung einer beliebig vorgelegten Gleichung $f_6 = 0$ auf die specielle Zweitheilung der hyperelliptischen Functionen zurückführen, welche zu der Irrationalität $\sqrt{f_6}$ gehören?

Dass dies in der That möglich sein muss, darauf hat Herr C. Jordan*) kurz hingewiesen; später hat Herr Lindemann**) die Frage wieder aufgenommen und ihr eine charkteristische Wendung gegeben.

Es sei f_6 gegeben; dann ist zunächst erforderlich, die Integrale w_1, w_2 zu bilden und ein System von Perioden zu berechnen, welche dieselben an einem canonischen Schnittsystem haben können. Die gewöhnliche Darstellung definirt diese Perioden, indem die Querschnitte auf geradlinige Strecken zusammengezogen werden, durch Integrale zwischen den Verzweigungspunkten. Für den hier verfolgten Zweck ist diese Methode natürlich untauglich, da diese Punkte ja eben erst bestimmt werden sollen; man wird vielmehr davon ausgehen müssen, dass die Perioden als Functionen der Coefficienten gewissen linearen Differentialgleichungen genügen. Aus diesen Differentialgleichungen wird man Reihen abzuleiten suchen müssen, welche die Berechnung der Perioden aus den Coefficienten ohne vorherige Auflösung der Gleichung gestatten.

Für den *elliptischen* Fall sind in der That die Differentialgleichungen, welchen die Perioden als Functionen der rationalen absoluten Invariante genügen, von Herrn Bruns***) aufgestellt und durch *hypergeometrische Reihen* integrirt worden; für diese besitzt man bekanntlich die Mittel, um zu entscheiden, welche von den verschiedenen möglichen Darstellungen einer Function durch solche Reihen für einen bestimmten Werth der unabhängigen Veränderlichen convergiren, und welche particulären Integrale in jedem Fall zu nehmen sind.

Für hyperelliptische Integrale sind Ansätze zur Erledigung derselben Aufgabe nach doppelter Richtung vorhanden. Einerseits hat Herr Wiltheiss†) *partielle* Differentialgleichungen mitgetheilt, welchen

*) Traité des subst. p. 380.

**) Gött. Nachr. 1884, p. 245.

***) Ueber die Perioden der elliptischen Integrale I. und II. Gattung, Dorpater Festschrift 1875; wieder abgedruckt diese Ann. Bd. 27, p. 234.

†) Vgl. insbesondere diese Ann. Bd. 31, p. 141.

die Perioden als Functionen sämmtlicher Coefficienten genügen.*) Andererseits führt Herr Fuchs einen allgemeinen Ansatz zur Aufstellung einer *totalen* Differentialgleichung für die Perioden explicite durch für den Fall, dass ein Verzweigungswerth als unabhängige Veränderliche betrachtet wird.**) Es muss nun sowohl gelingen, aus den partiellen Differentialgleichungen des Herrn Wiltheiss durch Differentiationen und Eliminationen zu einer totalen Differentialgleichung zu gelangen, welcher die Perioden als Functionen *eines* Coefficienten bei Festhalten der andern genügen, als auch die Methode des Herrn Fuchs auf den Fall zu übertragen, dass nicht eine Wurzel, sondern ein Coefficient von f als unabhängige Variable betrachtet wird. Wird insbesondere der Coefficient a_6 von x_2^6 gewählt, so wird — darauf macht Herr Lindemann a. a. O. aufmerksam — die Discriminante Δ von f in Bezug auf a_6 nur vom 5. Grade. Die Gleichung $\Delta(a_6) = 0$ bestimmt die singulären Punkte der Differentialgleichung; die Lösung einer Gleichung 5. Grades aber kann als bekannt angesehen werden, wenn von der Auflösung der allgemeinen Gleichung 6. Grades die Rede ist.***) Sind die singulären Punkte gefunden, so sind die zugehörigen Fundamentalgleichungen aufzulösen, was keinerlei Irrationalität bedingt, da die Wurzeln dieser Gleichungen nach den Untersuchungen von Herrn Fuchs†) rationale Zahlen sind. Die Bestimmung der Integrationsconstanten endlich geschieht durch Grenzübergang zum elliptischen Fall.

Sind aber die Perioden erst gefunden, so lassen sich die Normalintegrale und Thetamoduln bilden und aus ihnen die Thetareihen aufbauen. Dann lassen sich die Linearfactoren der f_6 in der Form darstellen:††)

$$(150)\quad \varrho(p_1^{(i)}x_1 + p_2^{(i)}x_2) = \left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial w_1}\right)x_1 + \left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial w_2}\right)x_2, \quad i = 1, 2 \ldots 6$$

mit:

$$\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial w_1}\right) = \frac{1}{p_{12}}\left\{\quad \omega_{22}\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial v_1}\right) - \omega_{12}\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial v_2}\right)\right\},$$

$$\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial w_2}\right) = \frac{1}{p_{12}}\left\{-\omega_{21}\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial v_1}\right) + \omega_{22}\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial v_2}\right)\right\}.$$

In diesen Formeln bedeuten ϑ_i die sechs ungeraden Thetafunctionen,

---

*) Auch Herr Milewski (de Abelianarum functionum periodis per aequ. diff. definiendis, diss. Berol. 1876) giebt solche Gleichungen, aber für die Normalform des Herrn Weierstrass, die eine Wurzel als bekannt voraussetzt.

**) Cr. J. Bd. 71, vgl. bes. § 10.

***) Die Auflösung der Gleichung 5. Grades führt Herr Lindemann ganz ebenso auf die einer Gleichung 4. Grades zurück.

†) a. a. O. § 13.

††) Vgl. Thomae, Cr. J. 71, p. 222. Klein, diese Ann. Bd. 27, p. 438. — Herr Lindemann benutzt statt dieser Formeln andere, welche die Doppelverhältnisse der Wurzeln geben.

die in Klammern gesetzten Differentialquotienten sind für die Nullwerthe der Argumente zu berechnen, und ϱ ist ein Factor, der für diese Frage ohne Belang ist.*)

Diese Auflösung ist so einfach, dass es unnöthig erscheint, neben ihr noch andere zu betrachten, bei denen die f_6 vorab auf eine Normalform transformirt wird.**)

VII. Abschnitt.

Transformation.

§ 46.

Algebraische Formulirung des Transformationsproblems.

Das Problem der Transformation der hyperelliptischen Functionen, wie es gewöhnlich gestellt wird, kann in folgender Weise formulirt werden:***)

Gegeben sei ein Paar von Stellen:

$$(x', \sqrt{f(x')}), \qquad (x'', \sqrt{f(x'')})$$

eines hyperelliptischen Gebildes $(x, \sqrt{f_6(x)})$ *und die zugehörigen Integralsummen:*

$$\text{(151)} \qquad \begin{aligned} w_1 &= \int_a^{x'} \frac{x_1(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}} + \int_a^{x''} \frac{x_1(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}}, \\ w_2 &= \int_a^{x'} \frac{x_2(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}} + \int_a^{x''} \frac{x_2(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}} \end{aligned}$$

verlangt wird, dieses Punktepaar ***rational*** *abhängig zu machen von einem Punktepaare*

$$(y', \sqrt{F(y')}), \qquad (y'', \sqrt{F(y'')})$$

eines andern hyperelliptischen Gebildes $(y, \sqrt{F_6(y)})$, *in der Weise, dass die Integralsummen* (151) *die Werthe erhalten:*

---

*) Für Gleichungen höherer Grade $f_{2p+2} = 0$ treten an Stelle der Formeln (150) andere, welche die Factoren des Grades $(p-1)$ von f geben und aus welchen die einzelnen Linearfactoren durch Aufsuchung grösster gemeinschaftlicher Theiler gewonnen werden können.

**) Solche Transformationen sind von den Herren Brioschi u. Maschke (Rendic. Ac. Linc. t. 4, p. 181; Acta math. t. 12, p. 83) angegeben worden.

***) Vgl. Hermite, C. R. t. 40, 1855. — Zu dem ganzen Abschnitt vgl. man die p. 204 citirte zusammenfassende Darstellung von Krause.

$$(152) \qquad \begin{aligned} w_1 &= \int_A^{y'} \frac{y_1(y\,dy)}{\sqrt{F(y)}} + \int_A^{y''} \frac{y_1(y\,dy)}{\sqrt{F(y)}}, \\ w_2 &= \int_A^{y'} \frac{y_2(y\,dy)}{\sqrt{F(y)}} + \int_A^{y''} \frac{y_2(y\,dy)}{\sqrt{F(y)}}. \end{aligned}$$

Neben dieses „*directe*“ Transformationsproblem tritt dann das „*inverse*“, welches in Umkehrung der ersten Fragestellung *die Auflösung der erhaltenen Relationen nach den* $(y, \sqrt{F(y)})$ verlangt. *Wo im folgenden ohne nähere Bezeichnung von Transformation die Rede ist, soll stets dieses inverse Problem verstanden werden.*

Dabei entspricht also jedem Punktepaare (y', y'') des zweiten Gebildes ein und nur ein Punktepaar (x', x'') des ersten; aber jedem Punktepaare des ersten entspricht eine gewisse Anzahl m von Punktepaaren des zweiten.

Umgekehrt, wenn die Punktepaare zweier hyperelliptischen Gebilde in dieser Weise $(1, m)$-deutig auf einander bezogen sind, so werden die in (151) rechts stehenden Integralsummen, wenn man sie als Functionen der y betrachtet, alle diejenigen Eigenschaften besitzen, welche für die Summen von nach den y erstreckten Integralen I. Gattung charakteristisch sind. In Folge dessen werden sie solche Summen sein müssen: d. h. *aus der angenommenen Zuordnung der Punktepaare der beiden Gebilde folgen die Gleichungen:*

$$(153) \qquad \begin{aligned} w_1' &= \alpha w_1 + \beta w_2 + c_1, \\ w_2' &= \gamma w_1 + \delta w_2 + c_2, \end{aligned}$$

in welchen die Integralsummen (151) mit w', die Integralsummen (152) mit w bezeichnet sind, die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, c_1, c_2$ aber constante Grössen bedeuten. Durch Transformation des Coordinatensystems, auf welches das eine der beiden Gebilde bezogen ist, und durch Einführung anderer unterer Grenzen der Integrale des einen Gebildes (vermittelst des Additionstheorems) kann man erreichen, dass die Gleichungen (153) sich auf:

$$(153\text{a}) \qquad w_1' = w_1, \quad w_2' = w_2$$

reduciren, also auf die Form, in welcher wir das Transformationsproblem oben ausgesprochen hatten. Mit Vorbehalt solcher Abänderungen wird man also sagen können:

Das Transformationsproblem verlangt, zu einem hyperelliptischen Gebilde ein zweites so zu bestimmen, dass die Punktepaare beider Gebilde $(1, m)$*-deutig auf einander bezogen werden können; es verlangt ferner, diese Beziehung wirklich herzustellen.*

Den Punktepaaren des hyperelliptischen Gebildes entsprechen eindeutig die Punkte der doppelt überdeckten Kummer'schen Fläche; beachtet man, dass bei dem Ansatz (153), wenn x, y einander ent-

sprechende Stellen der beiden Gebilde sind, auch die conjugirten Stellen $\bar{x}, \bar{y}$ einander entsprechen, so kann man von der Ueberdeckung absehen und das Transformationsproblem auch so formuliren: *es verlangt zu einer Kummer'schen Fläche eine zweite so zu bestimmen, dass beide punktweise* (1, *m*)*-deutig auf einander bezogen werden können; es verlangt ferner, diese Beziehung wirklich herzustellen.*

Soll diese Fragestellung nun eine präcise Form erhalten, so ist es erforderlich anzugeben, wie die Punkte*paare* in die Rechnung einzuführen sind. Wollte man nach den einzelnen Punkten fragen, so würde man eine Irrationalität einführen, die der Aufgabe an und für sich fremd ist; man wird vielmehr nach *symmetrischen Functionen* dieser Punkte fragen müssen. Den Principien des Abschnitts I wird es entsprechen, hier in erster Linie die *hyperelliptischen Functionen I. Stufe* heranzuziehen. Thut man das, so wird man die beiden Theile der oben formulirten Fragestellung in folgender Weise näher präcisiren können:

Zuerst wird man verlangen: *wenn die Coefficienten des einen Gebildes gegeben sind, die des andern so zu bestimmen, dass die Transformation überhaupt möglich wird.* Diese Aufgabe heisst das *specielle Transformationsproblem.*

Sodann wird man verlangen, *nachdem die Coefficienten demgemäss bestimmt sind, die Beziehungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten „eigentlichen" hyperelliptischen Functionen anzugeben; das ist das allgemeine Transformationsproblem.*

Beide Probleme sind ihrer Definition gemäss algebraischer Natur.

§ 47.

Transcendente Formulirung.

Diese algebraische Aufgabe gestattet nun in folgender Weise eine transcendente Formulirung. Man nehme zunächst an, das Coordinatensystem und die unteren Grenzen seien so gewählt, dass

$$w_1' = w_1, \qquad w_2' = w_2$$

wird. Durchläuft dann einer der Punkte y einen Periodenweg, so müssen auch die x Periodenwege auf ihrer Fläche durchlaufen. Jede Periode w^y muss also zugleich eine Periode der w^x sein; d. h. es müssen (wenn die Perioden der w^y mit $\bar{\omega}_{ik}$, die der w^x mit ω_{ik} bezeichnet und wie schon häufig die ersten Indices der Perioden weggelassen werden) Relationen der Form bestehen:

$$(154) \qquad \begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4, \\ \bar{\omega}_2 &= b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4, \\ \bar{\omega}_3 &= c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_4\omega_4, \\ \bar{\omega}_4 &= d_1\omega_1 + d_2\omega_2 + d_3\omega_3 + d_4\omega_4. \end{aligned}$$

Darin bedeuten die a, b, c, d ganze Zahlen; dieselben müssen aber noch gewissen Bedingungen genügen, die daraus entspringen, dass die $\bar{\omega}$ ebenso wie die ω die Bilinearrelation (4) erfüllen müssen. Setzt man nämlich, analog wie Gleichung (5):

$$\bar{\omega}_{1i}\,\bar{\omega}_{2k} - \bar{\omega}_{1k}\,\bar{\omega}_{2i} = \bar{p}_{ik},$$

und benutzt die unter (15) eingeführten Abkürzungen, so erhält man aus den Gleichungen (154):

$$(155)\quad \bar{p}_{13} + \bar{p}_{24} = [12]p_{12} + [13]p_{13} + [14]p_{14} + [23]p_{23} + [24]p_{24} + [34]p_{34}.$$

Da nun zwischen den p_{ik} im allgemeinen Falle keine andern linearen Gleichungen bestehen als $p_{13}+p_{24}=0$ (eben die Gleichung (4)), so folgt aus Gleichung (155), dass $\bar{p}_{13}+\bar{p}_{24}$ nur dann $=0$ sein wird, wenn zwischen den Coefficienten der Gleichungen (154) die Relationen bestehen:*)

$$(156)\quad \begin{array}{c} [12]=0,\quad [14]=0,\quad [23]=0,\quad [34]=0, \\ [13]=[24]. \end{array}$$

Man erhält also, wenn man statt der p ihre Quotienten, die τ und $\mathfrak{t} = \tau_{11}\tau_{12} - \tau_{12}^2$, einführt, den Satz:

Solange nicht zwischen den Thetamoduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}, \mathfrak{t}$ *eines hyperelliptischen Gebildes, eine lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht — ein Fall, der hier und im folgenden ausgeschlossen wird — kann aus ihm durch eine Substitution der Form* (144) *ein anderes nur abgeleitet werden, wenn die Relationen* (156) *erfüllt sind.*

Wir fahren fort:

Der gemeinsame Werth von [13] *und* [24] *wird mit n bezeichnet und Grad der Transformation genannt; derselbe ist seiner Definition nach eine ganze Zahl und muss eine positive sein, wenn die neuen Perioden, wie wir annehmen können und wollen, den Ungleichungen* (11) *genügen.*

Die *Determinante der Substitution* (154) wird unter den gemachten Voraussetzungen gleich:

$$(157)\qquad n^2;$$

das hat folgende Bedeutung: Man pflegt wohl von einem „Periodenparallelepiped im vierdimensionalen Raum der w" zu sprechen; der angegebene Werth der Determinante sagt aus, dass das Parallelepiped der $\bar{\omega}$ den n^2-fachen Inhalt von dem der ω besitzt. Jedem Stellenpaar der x entspricht eine Stelle im Parallelepiped der ω, dieser n^2 Stellen in dem der $\bar{\omega}$, jeder der letzteren ein Stellenpaar der y; umgekehrt: jedem

*) Hermite a. a. O. § III.

Stellenpaar der y entspricht eine Stelle im Parallelepiped der ω, dieser *eine* Stelle in dem der $\bar{\omega}$ und damit ein Stellenpaar der x; daraus folgt:

Bei Transformation n^{ter} Ordnung entspricht jedem Punktepaar y', y'' ein Punktepaar x', x'', aber jedem Punktepaare y', y'' entsprechen n^2 Punktepaare $y'\, y''$.

Die in § 46 mit m bezeichnete Zahl ist also stets eine Quadratzahl n^2.

Im folgenden beschränken wir uns wieder auf den Fall, dass n eine ungerade Primzahl ist.

§ 48.

Das specielle Transformationsproblem.

Zunächst soll nun das specielle Transformationsproblem Gegenstand weiterer Untersuchung sein. Dasselbe ist, wenn man wieder Functionen I. Stufe ins Auge fasst, in erster Linie dargestellt durch sieben Gleichungen, welche die sieben Coefficienten von F mit den sieben Coefficienten von f verbinden. In diesen Gleichungen werden noch die drei willkürlichen Hülfsgrössen auftreten, welche das Coordinatensystem der y bestimmen.

Aus diesem Gleichungssystem kann nun in verschiedener Weise eine Auswahl getroffen werden. Man kann einmal die rationalen absoluten *Invarianten* (Moduln) beider Formen in die Gleichungen einführen, indem man jene drei Hülfsgrössen eliminirt. Man wird dann ein System von drei, bezw. vier Gleichungen erhalten, das als *Modulargleichungssystem I. Stufe* zu bezeichnen sein wird. Dabei wird jedoch die Frage einer besonderen Untersuchung bedürfen, ob die gefundenen Gleichungen ausreichen, die zwischen den ursprünglichen und transformirten Invarianten bestehenden Beziehungen *rein* darzustellen, oder ob man dazu noch der Hinzunahme weiterer Gleichungen bedarf.

Zweitens aber kann man auch alle Coefficienten des neuen Gebildes bis auf einen eliminiren und nach der Gleichung fragen, welche diesen einen Coefficienten mit den sämmtlichen Coefficienten des ursprünglichen Gebildes verbindet. In gleicher Weise könnte man auch mit den ganzen Invarianten verfahren. Solche Gleichungen bezeichnen wir als *Multiplicatorgleichungen I. Stufe*. Der Grund dieser Benennung ist folgender: den Quotienten aus dem transformirten Werth einer ganzen Invariante durch den ursprünglichen bezeichnen wir als Multiplicator, indem wir einen in der Theorie der elliptischen Functionen üblichen Terminus in die der hyperelliptischen Functionen mit herübernehmen; deswegen nennen wir die Gleichung, welche eine transformirte Invariante*) mit den ursprünglichen Invarianten verbindet,

*) sei es eine „reine" Invariante, sei es eine von Hülfspunkten abhängende, z. B. ein Coefficient von f.

Multiplicatorgleichung, weil aus ihr die Gleichung für den entsprechenden Multiplicator sofort abgelesen werden kann. —

Für die allgemeinen Entwickelungen, welche nun zunächst folgen sollen, scheint es am zweckmässigsten zu sein, an keine dieser speciellen Gleichungsformen anzuknüpfen, sondern das ursprüngliche Gleichungssystem selbst zu Grunde zu legen. Es soll also ein Lösungs*system* dieses Gleichungssystems kurz mit:

$$t(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4)$$

bezeichnet werden; man kann dann, solange es sich nicht um explicite Aufstellung von Formeln handelt, geradezu von der Gleichung reden, welcher das t genügt, von ihrem Grade, ihrem Affect, überhaupt ihren gruppentheoretischen Eigenschaften; und es soll dies in den folgenden Paragraphen in der That geschehen.

§ 49.

Classenanzahl und Hermite'sche Repräsentanten.

Die nächste Frage, welcher wir uns zuwenden wollen, ist die nach dem *Grade der t-Gleichung*; derselbe kann, wie Herr Hermite*) angegeben hat, in folgender Weise bestimmt werden. Zunächst kann man unendlich viele verschiedene Systeme:

$$\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4$$

anschreiben, weil es unendlich viele Systeme ganzer Zahlen geben wird, welche den Bedingungen (156) Genüge leisten. Aber nicht alle diese verschiedenen Periodensysteme werden auch verschiedene Werthe des t liefern, und man hat daher zunächst zu fragen, wann zwei Systeme transformirter Perioden dasselbe t liefern, wann also:

$$t(\bar{\omega}_1', \bar{\omega}_2', \bar{\omega}_3', \bar{\omega}_4') = t(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4) \tag{158}$$

ist. Das wird offenbar dann und nur dann der Fall sein, wenn die $\bar{\omega}'$ mit den $\bar{\omega}$ durch *lineare* (Abel'sche) Transformation zusammenhängen, wenn also ganzzahlige Relationen der Form bestehen:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1' &= \alpha_1\bar{\omega}_1 + \alpha_2\bar{\omega}_2 + \alpha_3\bar{\omega}_3 + \alpha_4\bar{\omega}_4, \\
\bar{\omega}_2' &= \beta_1\bar{\omega}_1 + \beta_2\bar{\omega}_2 + \beta_3\bar{\omega}_3 + \beta_4\bar{\omega}_4, \\
\bar{\omega}_3' &= \gamma_1\bar{\omega}_1 + \gamma_2\bar{\omega}_2 + \gamma_3\bar{\omega}_3 + \gamma_4\bar{\omega}_4, \\
\bar{\omega}_4' &= \delta_1\bar{\omega}_1 + \delta_2\bar{\omega}_2 + \delta_3\bar{\omega}_3 + \delta_4\bar{\omega}_4,
\end{aligned} \tag{159}$$

deren Coefficienten den Bedingungen (13) der linearen Periodentransformation genügen, sodass also:

---

*) a. a. O. § XV.

$$
(160) \qquad \begin{gathered} [\alpha, \beta] = [\alpha, \delta] = [\beta, \gamma] = [\gamma, \delta] = 0, \\ [\alpha, \gamma] = [\beta, \delta] = 1 \end{gathered}
$$

ist. Wenn das der Fall ist, nennt man das System der $\bar{\omega}'$ zu dem der $\bar{\omega}$ *äquivalent* und rechnet beide zu derselben *Classe*. Wir brauchen nun aus jeder Classe nur ein Individuum herauszugreifen; ein solches nennt man dann einen *Repräsentanten* der Classe. In jeder Classe ist ein und nur ein Repräsentant vorhanden, welcher einem der in der nachstehenden Tabelle aufgeführten Typen angehört. In dieselbe sind zugleich auch die Ausdrücke für die transformirten Normalintegrale und Thetamoduln aufgenommen.

I. *Typus.*

Coefficientenschema:

$$
(161) \qquad \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ k & l & 1 & 0 \\ l & m & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Perioden:

$$
(162) \qquad \begin{gathered} \bar{\omega}_1 = n\omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = n\omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = k\omega_1 + l\omega_2 + \omega_3, \\ \bar{\omega}_4 = l\omega_1 + m\omega_2 + \omega_4; \end{gathered}
$$

Periodendeterminanten:

$$
(163 \qquad \begin{gathered} \bar{p}_{12} = n^2 p_{12}, \quad \bar{p}_{13} = lnp_{12} + np_{13}, \quad \bar{p}_{14} = mnp_{12} + np_{14}, \\ \bar{p}_{23} = knp_{21} + np_{23}, \quad \bar{p}_{24} = lnp_{21} + np_{24}, \\ \bar{p}_{34} = (km - l^2)p_{12} + kp_{14} + l(p_{24} + p_{31}) + mp_{32} + p_{34}; \end{gathered}
$$

Normalintegrale:

$$
(164) \qquad \bar{v}_1 = \frac{v_1}{n}, \quad \bar{v}_2 = \frac{v_2}{n}.
$$

Thetamoduln:

$$
(165) \qquad \begin{gathered} \bar{\tau}_{11} = \frac{\tau_{11} + k}{n}, \quad \bar{\tau}_{12} = \frac{\tau_{12} + l}{n}, \quad \bar{\tau}_{22} = \frac{\tau_{22} + m}{n}, \\ \bar{\mathfrak{t}} = \frac{\mathfrak{t} + m\tau_{11} - 2l\tau_{12} + k\tau_{22} + km - l^2}{n^2}. \end{gathered}
$$

II. *Typus.*

Coefficientenschema:

$$
(166) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -l & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & k & l & 1 \end{pmatrix};
$$

Perioden:

$$(167)\quad \bar\omega_1 = \omega_1 - l\omega_2,\ \bar\omega_2 = n\omega_2,\ \bar\omega_3 = n\omega_3,\ \bar\omega_4 = k\omega_2 + l\omega_3 + \omega_4;$$

Periodendeterminanten:

$$(168)\quad \begin{aligned} &\bar p_{12} = np_{12},\ \bar p_{13} = np_{13} - lnp_{23},\\ &\bar p_{14} = kp_{12} + l(p_{13} - p_{24}) + p_{14} - l^2 p_{23},\\ &\bar p_{23} = n^2 p_{23},\ \bar p_{24} = lnp_{23} + np_{24},\ \bar p_{34} = knp_{32} + np_{34}; \end{aligned}$$

Normalintegrale:

$$(169)\quad \bar v_1 = v_1,\ \bar v_2 = \frac{lv_1 + v_2}{n};$$

Thetamoduln:

$$(170)\quad \begin{aligned} &\bar\tau_{11} = n\tau_{11},\ \bar\tau_{12} = l\tau_{11} + \tau_{12},\ \bar\tau_{22} = \frac{l^2\tau_{11} + 2l\tau_{12} + \tau_{22} + k}{n},\\ &\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t} + k\tau_{11}. \end{aligned}$$

III. *Typus.*

Coefficientenschema:

$$(171)\quad \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix};$$

Perioden:

$$(172)\quad \bar\omega_1 = n\omega_1,\ \bar\omega_2 = \omega_2,\ \bar\omega_3 = k\omega_1 + \omega_3,\ \bar\omega_4 = n\omega_4;$$

Periodendeterminanten:

$$(173)\quad \begin{aligned} &\bar p_{12} = np_{12},\ \bar p_{13} = np_{13},\ \bar p_{14} = n^2 p_{14},\\ &\bar p_{23} = kp_{21} + p_{23},\ \bar p_{24} = np_{24},\ \bar p_{34} = knp_{14} + p_{34}; \end{aligned}$$

Normalintegrale:

$$(174)\quad \bar v_1 = \frac{v_1}{n},\quad \bar v_2 = v_2;$$

Thetamoduln:

$$(175)\quad \bar\tau_{11} = \frac{\tau_{11} + k}{n},\ \bar\tau_{12} = \tau_{12},\ \bar\tau_{22} = n\tau_{22},\ \bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t} + k\tau_{22}.$$

IV. *Typus.*

Coefficientenschema:

$$(176)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix};$$

Perioden:

$$(177)\quad \bar\omega_1 = \omega_1,\ \bar\omega_2 = \omega_2,\ \omega_3 = n\omega_3,\ \bar\omega_4 = n\omega_4.$$

Periodendeterminanten:

$$(178)\quad \begin{gathered}\bar{p}_{12}=p_{12},\quad \bar{p}_{13}=np_{13},\quad \bar{p}_{14}=np_{14},\quad \bar{p}_{23}=np_{23},\quad \bar{p}_{24}=np_{24},\\ \bar{p}_{34}=n^2p_{34}.\end{gathered}$$

Normalintegrale:

$$(179)\qquad \bar{v}_1=v_1,\qquad \bar{v}_2=v_2.$$

Thetamoduln:

$$(180)\qquad \bar{\tau}_{11}=n\tau_{11},\quad \bar{\tau}_{12}=n\tau_{12},\quad \bar{\tau}_{22}=n\tau_{22},\quad \bar{\mathfrak{t}}=n^2\mathfrak{t}.$$

Herr Hermite stellt dann folgende Sätze auf, die später vielfach bewiesen worden sind:

I. *Eine Classe äquivalenter Systeme $\bar{\omega}$ enthält stets ein System von einem dieser vier Typen.*

II. *Zwei Systeme verschiedener Typen sind nie äquivalent, zwei Systeme desselben Typus nur dann und stets dann, wenn die Zahlen k, l, m in ihnen bezw. dieselben Werthe mod. n haben.*

Der Typus I liefert also n^3 verschiedene Classen, die Typen II, III, IV bezw. n^2, n, eine; daraus folgt:

Die Anzahl der Classen nicht äquivalenter Systeme und somit der Grad der Gleichung für $\mathfrak{t}$ beträgt:

$$(181)\qquad n^3+n^2+n+1.$$

§ 50.

Neue Repräsentanten.

Während die Repräsentanten des Herrn Hermite in Folge des Umstandes, dass bei ihnen die $\bar{\tau}$ ganze Functionen der τ werden, sich besonders zu Rechnungen, wie Reihenentwicklungen und dergleichen eignen, sind sie weniger geeignet zur Erledigung allgemeiner Fragen, da sie sich nicht leicht unter eine gemeinsame Form subsumiren lassen. Sie lassen sich aber sehr leicht durch andere ersetzen, welche alle in der Form:

$$(182)\qquad \begin{aligned}\bar{\omega}_1' &= n(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2+\alpha_3\omega_3+\alpha_4\omega_4),\\ \bar{\omega}_2' &= n(\beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2+\beta_3\omega_3+\beta_4\omega_4),\\ \bar{\omega}_3' &= \gamma_1\omega_1+\gamma_2\omega_2+\gamma_3\omega_3+\gamma_4\omega_4,\\ \bar{\omega}_4' &= \delta_1\omega_1+\delta_2\omega_2+\delta_3\omega_3+\delta_4\omega_4,\end{aligned}$$

enthalten sind, in welcher die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Bedingungen (160) der linearen Transformation genügen.

Die *Repräsentanten des I. Typus* haben bereits diese Form.

Die *Repräsentanten des II. Typus* können in dieselbe übergeführt

werden, wenn man die 1. und 3. Zeile mit Zeichenwechsel der einen vertauscht, also etwa setzt:

$$(183)\qquad \bar{\omega}_1' = -\bar{\omega}_3,\quad \bar{\omega}_2' = \bar{\omega}_2,\quad \bar{\omega}_3' = \bar{\omega}_1,\quad \bar{\omega}_4' = \omega_4,$$

sodass das Coefficientenschema wird:

$$(184)\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 1 & -l & 0 & 0 \\ 0 & k & l & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei werden die Periodendeterminanten:

$$(185)\qquad \begin{aligned} &\bar{p}_{12}' = -\bar{p}_{32} = -n^2 p_{32},\quad p_{13}' = \bar{p}_{13} = n p_{13} - l n p_{23}, \\ &\bar{p}_{14}' = -\bar{p}_{34} = -k n p_{32} - n p_{34}, \\ &\bar{p}_{23}' = \bar{p}_{21} = -n p_{12},\quad \bar{p}_{24}' = \bar{p}_{24} = l n p_{23} + n p_{24}, \\ &\bar{p}_{34}' = \bar{p}_{14} = k p_{12} + l(p_{13} + p_{42}) + p_{14} + l^2 p_{32}; \end{aligned}$$

die Normalintegrale:

$$(186)\qquad v_1' = -\frac{\bar{v}_1}{\bar{\tau}_{11}} = -\frac{v_1}{n\tau_{11}},\quad v_2' = \frac{-\bar{\tau}_{22}\bar{v}_1 + \bar{\tau}_{11}\bar{v}_2}{\bar{\tau}_{11}}\bar{v}_1 = \frac{-\tau_{12}v_1 + \tau_{11}v_2}{n\tau_{11}},$$

die Thetamoduln:

$$(187)\qquad \begin{aligned} &\bar{\tau}_{11}' = -\frac{1}{\bar{\tau}_{11}} = -\frac{1}{n\tau_{11}},\quad \bar{\tau}_{12}' = -\frac{\bar{\tau}_{12}}{\bar{\tau}_{11}} = \frac{-l\tau_{11} - \tau_{12}}{n\tau_{11}}, \\ &\bar{\tau}_{22}' = \frac{\bar{\mathfrak{t}}}{\bar{\tau}_{11}} = \frac{\mathfrak{t} + k\tau_{11}}{n\tau_{11}},\qquad \bar{\mathfrak{t}}' = -\frac{\bar{\tau}_{22}}{\bar{\tau}_{11}} = -\frac{l^2\tau_{11} + 2l\tau_{12} + \tau_{22} + k}{n^2\tau_{11}}. \end{aligned}$$

Ebenso wird für die *Repräsentanten des III. Typus* erhalten:

Umsetzung der Perioden:

$$(188)\qquad \bar{\omega}_1' = \bar{\omega}_1,\quad \bar{\omega}_2' = -\bar{\omega}_4,\quad \bar{\omega}_3' = \bar{\omega}_3,\quad \bar{\omega}_4' = \bar{\omega}_2;$$

neues Coefficientenschema:

$$(189)\qquad \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Periodendeterminanten:

$$(190)\qquad \begin{aligned} &\bar{p}_{12}' = -\bar{p}_{14} = -n^2 p_{14},\quad \bar{p}_{13}' = \bar{p}_{13} = n p_{13},\quad \bar{p}_{14}' = \bar{p}_{12} = n p_{12}, \\ &\bar{p}_{23}' = \bar{p}_{34} = k n p_{14} + n p_{34},\quad \bar{p}_{24}' + \bar{p}_{24} = n p_{24}, \\ &\bar{p}_{34}' = \bar{p}_{32} = k p_{12} + p_{32}; \end{aligned}$$

Normalintegrale:

$$(191)\quad \bar{v}_1' = \bar{v}_1 - \frac{\bar{\tau}_{12}}{\bar{\tau}_{22}}\bar{v}_2 = \frac{\tau_{22}v_1 - \tau_{12}v_2}{n\tau_{22}}, \quad \bar{v}_2' = -\frac{\bar{v}_2}{\bar{\tau}_{22}} = -\frac{v_2}{n\tau_{22}}.$$

Thetamoduln:

$$(192)\quad \begin{aligned} \bar{\tau}_{11}' &= \frac{\bar{\mathfrak{t}}}{\bar{\tau}_{22}} = \frac{\mathfrak{t} + k\tau_{22}}{n\tau_{22}}, & \bar{\tau}_{12}' &= -\frac{\bar{\tau}_{12}}{\bar{\tau}_{22}} = -\frac{\tau_{12}}{n\tau_{22}}, \\ \bar{\tau}_{22}' &= -\frac{1}{\bar{\tau}_{22}} = -\frac{1}{n\tau_{22}}, & \bar{\mathfrak{t}}' &= -\frac{\bar{\tau}_{11}}{\bar{\tau}_{22}} = -\frac{\tau_{11}+k}{n^2\tau_{22}}. \end{aligned}$$

Endlich für den *Repräsentanten des Typus IV* erhält man:
Umsetzung der Perioden:

$$(193)\quad \bar{\omega}_1' = -\bar{\omega}_3, \quad \bar{\omega}_2' = -\bar{\omega}_4, \quad \bar{\omega}_3' = \bar{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_4' = \bar{\omega}_2;$$

neues Coefficientenschema:

$$(194)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Periodendeterminanten:

$$(195)\quad \begin{aligned} &\bar{p}_{12}' = \bar{p}_{34} = n^2 p_{34}, \quad \bar{p}_{13}' = \bar{p}_{13} = np_{13}, \quad \bar{p}_{14}' = \bar{p}_{23} = np_{23}, \\ &\bar{p}_{23}' = \bar{p}_{14} = np_{14}, \quad \bar{p}_{24}' = \bar{p}_{24} = np_{24}, \quad \bar{p}_{34}' = \bar{p}_{12} = p_{12}; \end{aligned}$$

Normalintegrale:

$$(196)\quad \begin{aligned} \bar{v}_1' &= \frac{-\bar{\tau}_{22}\bar{v}_1 + \bar{\tau}_{12}\bar{v}_2}{\bar{\mathfrak{t}}} = \frac{-\tau_{22}v_1 + \tau_{12}v_2}{n\mathfrak{t}_1}, \\ \bar{v}_2' &= \frac{\bar{\tau}_{12}\bar{v}_1 - \bar{\tau}_{11}\bar{v}_2}{\bar{\mathfrak{t}}} = \frac{\tau_{12}v_1 - \tau_{11}v_2}{n\mathfrak{t}}. \end{aligned}$$

Thetamoduln:

$$(197)\quad \begin{aligned} \bar{\tau}_{11}' &= -\frac{\bar{\tau}_{22}}{\bar{\mathfrak{t}}} = -\frac{\tau_{22}}{n\mathfrak{t}}, & \bar{\tau}_{12}' &= \frac{\bar{\tau}_{12}}{\bar{\mathfrak{t}}} = \frac{\tau_{12}}{n\mathfrak{t}}, \\ \bar{\tau}_{22}' &= -\frac{\bar{\tau}_{11}}{\bar{\mathfrak{t}}} = -\frac{\tau_{11}}{n\mathfrak{t}}, & \mathfrak{t}' &= \frac{1}{\bar{\mathfrak{t}}} = \frac{1}{n^2\mathfrak{t}}. \end{aligned}$$

§ 51.

Irreducibilitätsbeweis.

Mit Hülfe dieser neuen Repräsentanten lässt sich nun sehr leicht die *Irreducibilität der t-Gleichung im Rationalitätsbereich I. Stufe* darthun.

Die t hängen von den Coefficienten des ursprünglichen Gebildes ab vermöge einer Gleichung:

$$G(t;\, a_0, a_1 \ldots a_6) = 0; \tag{198}$$

zu zeigen ist, dass jede Wurzel dieser Gleichung in jede andere übergeführt werden kann, indem man die a geeignete geschlossene Wege durchlaufen lässt. Zu diesem Zwecke berechne man aus den Coefficienten zunächst ein bestimmtes Periodensystem:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4;$$

dann wird eine Wurzel der t-Gleichung sein:

$$t(n\omega_1,\ n\omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4) \tag{199}$$

entsprechend dem I. Repräsentanten des Typus I. Durchlaufen nun die Coefficienten beliebige geschlossene Wege in ihrem Gebiete, so werden die ω linear transformirt; und wenn $\alpha_1 \ldots \delta_4$ irgend welche Coefficienten sind, welche den Bedingungen (160) der linearen Transformation genügen, so kann man auf Grund der Entwickelungen des § 8 immer solche Wege der Verzweigungspunkte und damit auch der Coefficienten angeben, dass die ω in andere Perioden ω' übergehen, welche durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\omega_1' &= \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 + \alpha_4\omega_4,\\
\omega_2' &= \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3 + \beta_4\omega_4,\\
\omega_3' &= \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3 + \gamma_4\omega_4,\\
\omega_4' &= \delta_1\omega_1 + \delta_2\omega_2 + \delta_3\omega_3 + \delta_4\omega_4
\end{aligned} \tag{200}$$

mit ihnen verbunden sind. Und zwar kann dies immer auf solche Weise geschehen, dass man dabei nur solche Werthe zu passiren braucht, welche den Bedingungen (11) genügen. Damit wird die Wurzel (199) übergeführt in:

$$t(n\omega_1',\ n\omega_2',\ \omega_3',\ \omega_4'), \tag{201}$$

während die Coefficienten zu ihren Anfangswerthen zurückkehren. Zu den Werthen (201) aber, welche t auf diese Weise anzunehmen im Stande ist, gehören auch alle diejenigen, welche durch die neuen Repräsentanten gegeben sind; man kann demnach von dem Repräsentanten (199) aus zu allen übrigen durch Monodromie der Coefficienten gelangen, also auch von jedem dieser übrigen zu jedem andern. Andererseits folgt aus § 49 und 50, dass jedes System der $n\omega_1'$, $n\omega_2'$, ω_3', ω_4' welches man auf diese Weise erreichen kann, zu einem der Repräsentanten äquivalent ist, dass man also auf diese Weise zu keinem andern Werthe von t gelangt, als zu denjenigen, welche durch die Repräsentanten gegeben sind. Damit ist der folgende Satz gewonnen:

Die Bestimmung der Coefficienten (Moduln I. Stufe) des transformirten Gebildes hängt ab von der Lösung einer Gleichung des Grades

$$n^3 + n^2 + n + 1,$$

deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche I. Stufe in Bezug auf das gegebene Gebilde angehören und welche in diesem Rationalitätsbereiche irreducibel ist.

§ 52.

Monodromiegruppe des speciellen Transformationsproblems.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Monodromiegruppe des speciellen Transformationsproblems und beginnen mit der Beantwortung der Frage, bei welchen linearen Transformationen ein einzelner Repräsentant ungeändert bleibt, etwa der folgende:

$$(202)\qquad \bar{\omega}_1 = n\omega_1,\quad \bar{\omega}_2 = n\omega_2,\quad \bar{\omega}_3 = \omega_3,\quad \bar{\omega}_4 = \omega_4.$$

Werden die ω einer linearen Transformation unterworfen, etwa der folgenden:

$$(203)\qquad \begin{aligned} \omega_1' &= \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 + \alpha_4\omega_4,\\ \omega_2' &= \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3 + \beta_4\omega_4,\\ \omega_3' &= \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3 + \gamma_4\omega_4,\\ \omega_4' &= \delta_1\omega_1 + \delta_2\omega_2 + \delta_3\omega_3 + \delta_4\omega_4, \end{aligned}$$

so treten an Stelle der $\bar{\omega}$ neue transformirte Perioden $\bar{\omega}'$, welche lauten:

$$(204)\qquad \bar{\omega}_1' = n\omega_1',\quad \bar{\omega}_2' = n\omega_2',\quad \bar{\omega}_3' = \omega_3',\quad \bar{\omega}_4' = \omega_4'.$$

Zwischen diesen und den ersten transformirten Perioden (202) bestehen dann die Beziehungen:

$$(205)\qquad \begin{aligned} \bar{\omega}_1' &= \alpha_1\bar{\omega}_1 + \alpha_2\bar{\omega}_2 + n\alpha_3\bar{\omega}_3 + n\alpha_4\bar{\omega}_4,\\ \bar{\omega}_2' &= \beta_1\bar{\omega}_1 + \beta_2\bar{\omega}_2 + n\beta_3\bar{\omega}_3 + n\beta_4\bar{\omega}_4,\\ \bar{\omega}_3' &= \frac{\gamma_1}{n}\bar{\omega}_1 + \frac{\gamma_2}{n}\bar{\omega}_2 + \beta_3\bar{\omega}_3 + \beta_4\bar{\omega}_4,\\ \bar{\omega}_4' &= \frac{\gamma_1}{n}\bar{\omega}_1 + \frac{\gamma_2}{n}\bar{\omega}_2 + \gamma_3\bar{\omega}_3 + \gamma_4\bar{\omega}_4. \end{aligned}$$

Nach der Definition werden die $\bar{\omega}'$ dann zu den $\bar{\omega}$ äquivalent sein, wenn diese Gleichungen eine lineare Periodentransformation darstellen. Dazu ist offenbar erforderlich und hinreichend, dass die Congruenzen erfüllt sind:

$$(206)\qquad \gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \delta_1 \equiv \delta_2 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Das sind aber (mit veränderter Bezeichnung) gerade die Bedingungen, durch welche § 39, Nr. 127 die dort als *Untergruppe II. Art* bezeichnete Untergruppe der Monodromiegruppe des speciellen n-Theilungsproblems charakterisirt war. Damit ist also nachträglich bewiesen, was a. a. O. bereits erwähnt wurde, nämlich:

Die Gleichung des speciellen Transformationsproblems ist gerade diejenige Resolvente des speciellen Theilungsproblems für dieselbe Zahl n, welche zur Untergruppe II. Art gehört.

Die Untergruppe, bei welcher irgend ein anderer Repräsentant ungeändert bleibt, geht dann aus der durch (206) charakterisirten Untergruppe durch Transformation vermittelst einer geeigneten linearen Substitution hervor. Soll z. B. die Untergruppe bestimmt werden, bei welcher ein bestimmter durch die Zahlen k, l, m charakterisirter Repräsentant des I. Typus ungeändert bleibt, so hat man die Substitution (203) zu transformiren vermöge der Operation:

$$(207)\quad \Omega_1'=\omega_1',\ \Omega_2'=\omega_2',\ \Omega_3'=k\omega_1'+l\omega_2'+\omega_3',\ \Omega_4'=l\omega_1'+m\omega_2'+\omega_4',$$

deren inverse ist:

$$(208)\quad \omega_1=\Omega_1,\ \omega_2=\Omega_2,\ \omega_3=-k\Omega_1-l\Omega_2+\Omega_3,\ \omega_4=-l\Omega_1-m\Omega_2+\Omega_4.$$

Dabei wird erhalten:

$$(209)\quad \begin{aligned}
\Omega_1' &= (\alpha_1-k\alpha_3-l\alpha_4)\Omega_1+(\alpha_2-l\alpha_3-m\alpha_4)\Omega_2+\alpha_3\Omega_3+\alpha_4\Omega_4,\\
\Omega_2' &= (\beta_1-k\beta_3-l\beta_4)\Omega_1+(\beta_2-l\beta_3-m\beta_4)\Omega_2+\beta_3\Omega_3+\beta_4\Omega_4,\\
\Omega_3' &= \{\gamma_1+k\alpha_1+l\beta_1-k(\gamma_3+k\alpha_3+l\beta_3)-l(\gamma_4+k\alpha_4+l\beta_4)\}\Omega_1\\
&\quad +\{\gamma_2+k\alpha_2+l\beta_2-l(\gamma_3+k\alpha_3+l\beta_3)-m(\gamma_4+k\alpha_4+l\beta_4)\}\Omega_2\\
&\quad +(\gamma_3+k\alpha_3+l\beta_3)\Omega_3+(\gamma_4+k\alpha_4+l\beta_4)\Omega_4,\\
\Omega_4' &= \{\delta_1+l\alpha_1+m\beta_1-k(\delta_3+l\alpha_3+m\beta_3)-l(\delta_4+l\alpha_4+m\beta_4)\}\Omega_1\\
&\quad +\{\delta_2+l\alpha_2+m\beta_2-l(\delta_3+l\alpha_3+m\beta_3)-m(\delta_4+l\alpha_4+m\beta_4)\}\Omega_2\\
&\quad +(\delta_3+l\alpha_3+m\beta_3)\Omega_3+(\delta_4+l\alpha_4+m\beta_4)\Omega_4.
\end{aligned}$$

Die Bedingungen, unter welchen der genannte Repräsentant an seinem Platze bleibt, sind demnach:

$$(210)\quad \left.\begin{aligned}
&\gamma_1+k(\alpha_1-\gamma_3)+l(\beta_1-\gamma_4)-k^2\alpha_3-kl(\beta_3+\alpha_4)-l^2\beta_4\equiv 0,\\
&\gamma_2+k\alpha_2+l(\beta_2-\gamma_3)-m\gamma_4-kl\alpha_3-l^2\beta_3-km\alpha_4-lm\beta_4\equiv 0,\\
&\delta_1-k\delta_3+l(\alpha_1-\delta_4)+m\beta_1-kl\alpha_3-l^2\alpha_4-km\beta_3-lm\beta_4\equiv 0,\\
&\delta_2+l(\alpha_2-\delta_3)+m(\beta_2-\delta_4)-l^2\alpha_3-lm(\beta_3+\alpha_4)-m^2\beta_4\equiv 0.
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod.}\,n).$$

In gleicher Weise würden sich die Bedingungen für die Repräsentanten der drei übrigen Typen aufstellen lassen. Aber wichtiger als diese Frage ist die andere, zu deren Beantwortung wir uns nun wenden wollen: *unter welchen Bedingungen bleiben denn alle Repräsentanten an ihren Plätzen?* — eine Frage, die eben identisch ist mit der Frage nach der Monodromiegruppe des speciellen Transformationsproblems selbst.

Man sieht zunächst, dass *alle* Repräsentanten des I. Typus an ihren Plätzen bleiben, wenn die Congruenzen (210) unabhängig von den Werthen der k, l, m erfüllt sind. Das ist aber, wie man sich

sofort überzeugt, dann und nur dann der Fall, wenn die Transformation (203) mod. n zur Identität oder zu gleichzeitigem Zeichenwechsel aller vier Perioden congruent ist. In beiden Fällen bleiben aber auch die Repräsentanten der drei andern Typen an ihren Plätzen, und man findet also:

Sämmtliche Wurzeln der t-Gleichung bleiben bei denjenigen und nur bei denjenigen linearen Periodentransformationen ungeändert, welche nach dem Modul n zur Identität oder zu gleichzeitigem Zeichenwechsel aller vier Perioden congruent sind.

Ganz ebenso verhält sich (vgl. § 39) die Gesammtheit der Wurzeln des *speciellen Theilungsproblems der geraden Functionen.* Die Monodromiegruppe des letzteren ist durch die Congruenzen (123) definirt; dieselbe Monodromiegruppe kommt sonach auch der t-Gleichung zu, und der oben ausgesprochene Satz kann erweitert werden zu der Fassung:

Specielles Theilungsproblem der geraden Functionen und Transformationsproblem für dieselbe Zahl n sind gegenseitig Resolventen von einander im Sinne der Monodromiegruppe.

Ob derselbe Satz auch für die *arithmetische* Gruppe gilt, darüber scheint nichts bekannt zu sein; doch dürfte die Sache ähnlich liegen, wie bei den elliptischen Functionen, worüber man z. B. C. Jordan, tr. des subst. p. 343 vergleiche.

§ 53.

Das allgemeine Transformationsproblem.

Ueber das allgemeine Transformationsproblem möge nur folgendes bemerkt werden:

Es sei ein Lösungssystem des speciellen Problems adjungirt, etwa dasjenige, welches zu dem Repräsentanten (202) gehört. Ist dann $\bar{f}(w)$ irgend ein Werth einer transformirten hyperelliptischen Function I. Stufe, so werden die n^2 Werthe derselben (vgl. § 47 a. E.) die folgenden sein:

$$
\begin{array}{llll}
\bar{f}(w), & \bar{f}(w+\omega_1), & \bar{f}(w+2\omega_1) & \cdots \bar{f}\big(w+(n-1)\omega_1\big), \\
\bar{f}(w+\omega_2), & \bar{f}(w+\omega_1+\omega_2), & \bar{f}(w+2\omega_1+\omega_2) & \cdots \bar{f}\big(w+(n-1)\omega_1+\omega_2\big), \\
\bar{f}(w+2\omega_2), & \bar{f}(w+\omega_1+2\omega_2), & \bar{f}(w+2\omega_1+2\omega_2) & \cdots \bar{f}\big(w+(n-1)\omega_1+2\omega_2\big), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\bar{f}\big(w+(n-1)\omega_2\big), & \bar{f}\big(w+\omega_1+(n-1)\omega_2\big), & \bar{f}\big(w+2\omega_1+(n-1)\omega_2\big) & \cdots \\
 & & & \cdots \bar{f}\big(w+(n-1)\omega_1+(n-1)\omega_2\big).
\end{array}
\tag{211}
$$

Wird allgemein:

(212) $$\bar{f}(w+\nu_1\omega_1+\nu_2\omega_2)=\bar{f}_{\nu_1,\nu_2}$$

gesetzt, so ergiebt sich, dass $\bar{f}_{\nu_1,\nu_2}$ bei Vermehrung der w um die Periode $A\omega_1+B\omega_2$ in $\bar{f}_{\nu_1+A,\nu_2+B}$ übergeht. *Die Monodromiegruppe des Problems in Bezug auf die y kann also dargestellt werden durch die Congruenzen:*

(213) $$\begin{aligned}\nu_1' &\equiv \nu_1+A_1,\\ \nu_2' &\equiv \nu_2+A_3.\end{aligned}$$

Wie in § 38 folgt hieraus:

Nach Adjunction einer Wurzel des speciellen Transformationsproblems findet das allgemeine seinen Ausdruck in einer zweifaltigen Abel'schen Gleichung und ist daher algebraisch, nämlich durch zwei nebeneinanderstehende n^{te} Wurzeln lösbar.

Auch hier ist von numerischen Irrationalitäten abgesehen.

§ 54.

Transformation von Functionen höherer Stufe.

Bereits in § 30 ist bemerkt, dass die Transformation n^{ter} Ordnung von Functionen m^{ter} Stufe zu Functionen mn^{ter} Stufe führt, wenn m und n theilerfremd sind; es mögen nur über die Transformation von Modulfunctionen höherer Stufe noch einige Worte hier Platz finden. Auch bei dieser Untersuchung kann man, wie es § 48 ff. für die Functionen I. Stufe geschehen ist, von den verschiedenen Möglichkeiten, die Unbekannte zu wählen, absehen, und alle diese Möglichkeiten unter dem Zeichen:

$$t_m(\bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2,\ \bar{\omega}_3,\ \bar{\omega}_4)$$

zusammenfassen.

Es sei nun *erstens* der Rationalitätsbereich, welchen man zu Grunde legt, der der *Principaluntergruppe m^{ter} Stufe.* Dann wird es:

(214) $$M=(m^4-1)\,m^3(m^2-1)\,m$$

(vgl. 49) verschiedene Werthe von $t(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$ (der ursprünglichen Form) geben; jeder derselben wird eine Anzahl von transformirten Werthen zugehören. Wir erhalten also im ganzen:

$$M\cdot(n^3+n^2+n+1)$$

transformirte Werthe t_m; und wie in § 51 kann geschlossen werden, dass diese alle einer im Rationalitätsbereich *erster* Stufe irreducibeln Gleichung genügen. Im Rationalitätsbereich m^{ter} Stufe dagegen wird diese Gleichung zerfallen, und wir wollen zusehen, in welcher Weise man die Werthe von t_m zu Gruppen zusammenzufassen hat, welche Wurzeln irreducibler Gleichungen in diesem Rationatitätsbereiche vorstellen. Zu diesem Zwecke gehen wir etwa aus von:

(215) $$t_m(n\omega_1, n\omega_2, \omega_3, \omega_4)$$
und wenden wieder die Methode des § 51 an; dabei sind aber jetzt nur solche lineare Transformationen (200) der ursprünglichen Perioden zuzulassen, welche (mod. m) zur Identität congruent sind. In Folge dessen gelangt man von dem Werth (215) nur zu solchen Werthen
$$t_m(n\omega_1', n\omega_2', \omega_3', \omega_4'),$$
in welchen die ω' mit den ω durch eine Substitution der Principaluntergruppe m^{ter} Stufe verbunden sind. Auf diesem Wege gewinnt man die Regel:

Für die Untersuchung der Transformation von Functionen m^{ter} Stufe sind die Repräsentanten (182) *so zu wählen, dass die Coefficientensysteme* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *nach dem Modul m alle einander* (*am Einfachsten also alle zur Identität*) *congruent werden. Die $n^3 + n^2 + n + 1$ verschiedenen Werthe einer transformirten Form t, welche zu den so normirten Repräsentanten gehören, genügen dann einer und derselben im Rationalitätsbereich m^{ter} Stufe irreducibeln Gleichung.*

Den M verschiedenen Werthen der ursprünglichen Form entsprechend wird man im ganzen M solche Gleichungen erhalten.

Wird aber zweitens eine Untergruppe m^{ter} Stufe zu Grunde gelegt, welche neben den der Identität (*mod. m*) *congruenten Operationen noch andere enthält, welche bezw. den Operationen $S, S', S'' \ldots$ congruent sind, so werden auch die Repräsentanten nur so modificirt werden müssen, dass das Coefficientensystem eines jeden zu dem irgend einer dieser Operationen $1, S', S'' \ldots$ congruent wird.*

Ein bemerkenswerther Umstand tritt ein, wenn man nicht eine transformirte Modulform selbst zur Unbekannten der aufzustellenden Gleichung wählt, sondern eine — etwa multiplicative — Verbindung einer solchen mit einer nicht transformirten Form derselben Art. Es kann dann nämlich Substitutionen (mod. m) geben, welche die ursprüngliche Function einerseits, die transformirte andererseits in solcher Weise afficiren, dass jene Verbindung ungeändert bleibt. Dann wird die Modification der Repräsentanten (mod. m) weniger weit getrieben zu werden brauchen; ja es kann sogar vorkommen, dass es ausreicht sie (mod. δ) zu modificiren, unter δ einen Theiler von m verstanden. So gelangt man zu dem Satze:

Bestimmte Verbindungen ursprünglicher und transformirter Moduln m^{ter} Stufe genügen Gleichungen vom Grade $n^3 + n^2 + n + 1$ schon im Rationalitätsbereiche der δ^{ten} Stufe, wenn δ einen Theiler von m bedeutet.

Ein Rückblick auf die vier letzten Abschnitte zeigt, dass die in den ersten entwickelten allgemeinen Principien geeignet sind, die

Untersuchung der fundamentalen Eigenschaften der Theilungs- und Transformationsprobleme einfacher und durchsichtiger zu gestalten, als dies einer ausschliesslich mit den Mitteln formaler Rechnung operirenden Behandlungsweise möglich sein würde. Man darf aber auch erwarten, dass dieselben Principien sich in gleicher Weise fördernd erweisen werden, wenn es sich um Durchführung bestimmter Einzelprobleme bis zur numerischen Rechnung hin handelt.

Göttingen, den 26. Juni 1889.

Uebersicht des Inhalts.

Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Die ersten Kriterien zur Prüfung der Divergenz oder Convergenz einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern rühren bekanntlich von Cauchy*) her. Dieselben können, gleichwie die späterhin aufgestellten schärferen Kriterien**) von Raabe, Duhamel, de Morgan Bertrand, Bonnet, Paucker — als *specielle* Kriterien charakterisirt werden, insofern als sie durchweg auf der Vergleichung des n^{ten} Reihengliedes mit einer der *speciellen* Functionen a^n, n^x, $n(\lg n)^x$ etc. beruhen. Hingegen gebührt Herrn Kummer das Verdienst zuerst Kriterien von wesentlich *allgemeinerem* Charakter aufgestellt zu haben***), vermöge deren aus gewissen Beziehungen zwischen dem Reihengliede a_n und einer verhältnissmässig geringen Beschränkungen unterworfenen, im übrigen aber ganz willkürlich gedachten, positiven Function $\varphi(n)$ auf die Beschaffenheit der Reihe Σa_n geschlossen werden kann.

Die Kummer'sche Methode weiter verfolgend ist sodann Herr Dini in einer ziemlich umfangreichen Abhandlung:†) *„Sulle serie a termini positivi"*. — dazu gelangt, nicht nur das Kummer'sche Hauptkriterium in gewisser Weise zu verallgemeinern††), sondern auch andere Typen von allgemeinen Kriterien aufzustellen, in denen die zuerst genannten Specialkriterien als besondere Fälle enthalten sind.

Leider ist die betreffende Dini'sche Arbeit in keiner der bekannteren Zeitschriften erschienen, und so mag es einigermaassen

---

*) *Analyse algébr.* (1821) p. 132 ff.

**) Die Publication der betreffenden Arbeiten, von denen später noch im einzelnen die Rede sein wird, fällt in den Zeitraum von 1832—1851.

***) *Crelles Journal* Bd. 13. (1835) p. 171 ff.

†) Dieselbe findet sich in den „*Annali dell' Univ. Tosc.* T. IX", ist aber auch unter dem im Texte angegebenen Titel separat erschienen: *Pisa*, 1867, *Tipografia Nistri.*

††) Vgl. hierüber weiter unten: § 7, die Randbem. zu Gl. (H).

erklärlich erscheinen, dass dieselbe — zum mindesten in Deutschland — sichtlich völlig unbekannt geblieben ist.*) So hat denn der kürzlich leider so früh und unerwartet verstorbene Paul du Bois Reymond**) — erst sechs Jahre nach der genannten Publication — den Dini'schen Grundgedanken (nämlich die Vergleichung des Reihengliedes a_n mit einem Ausdrucke $\psi(n) - \psi(n+1)$, wo $\psi(n)$ mit n monoton zu- oder abnimmt) von neuem entdeckt und ist, indem er diesen Gedanken noch schärfer herausarbeitete, als sein Vorgänger, nicht bei der Wiederauffindung von dessen Hauptresultaten stehen geblieben, sondern hat es zum ersten Male ausdrücklich unternommen, der ganzen Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen *„durch strengere und sachgemässe Verknüpfung ihrer Theoreme den bis jetzt ihr fehlenden Charakter einer mathematischen Theorie zu verleihen."* ***)

Obschon nun die fragliche Arbeit in der bezeichneten Richtung manche bedeutsame Ergebnisse zu Tage gefördert hat, so bin ich doch zu der Ansicht gelangt, dass die Du Bois Reymond'sche Theorie — selbst abgesehen von einzelnen Irrthümern, auf die ich gelegentlich später noch zurückkommen werde†) — in Bezug auf Einfachheit und Consequenz der Methode, wie auf Vollständigkeit der Resultate ziemlich viel zu wünschen übrig lässt.

Um diese meine Ansicht näher zu begründen, führe ich hier folgendes an: Unterscheidet man mit Du Bois Reymond die Divergenz- und Convergenz-Kriterien als solche *erster* oder *zweiter Art*, je nachdem dieselben auf der Untersuchung des allgemeinen Gliedes a_n selbst oder aber auf derjenigen des Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ beruhen, so liefert die fragliche Theorie als allgemeinen Typus der *Divergenz*-Kriterien erster Art die Beziehung:

$$(\alpha) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\psi(n) - \psi(n+1)} \quad \textit{nicht} \text{ Null},$$

und als solchen der entsprechenden *Convergenz*-Kriterien:

$$(\beta) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\psi(n) - \psi(n+1)} \quad \textit{nicht} \text{ unendlich},$$

---

*) Selbst in den mit ausserordentlich zahlreichen Literatur-Angaben versehenen „*Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz*" findet dieselbe keine Erwähnung. Vielmehr sind dort (s. Bd. I, p. 251 ff.) gewisse Methoden und Resultate ausdrücklich Du Bois Reymond zugeschrieben, die sich schon bei Herrn Dini finden.

**) „*Neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern*" — *Crelle* Bd. 76, (1873) p. 61 ff. — Vgl. auch: Comptes rendus 1888. II, p. 941.

***) a. a. O. p. 61. Alin. I.

†) S. weiter unten die Randbem. auf p. 311 und p. 347, 349.

wobei $\psi(n)$ in dem Ausdrucke (α) eine mit n monoton in's Unendliche *wachsende*, dagegen in (β) eine mit n monoton *abnehmende* positive Grösse bedeutet. Es erscheinen also trotz der äusserlichen Gleichheit der Ausdrücke (α) und (β) die Divergenz- und die Convergenz-Kriterien in Wahrheit unter ziemlich *heterogener* Form, während doch ein Blick auf die bekannten Special-Kriterien, wie:

$$\begin{cases} \lim n\cdot a_n > 0 \quad \lim n\cdot \lg n\cdot a_n > 0 \cdots \text{(für die Divergenz)}, \\ \lim n^{1+\varrho}\cdot a_n < \infty \quad \lim n\cdot(\lg n)^{1+\varrho}\cdot a_n < \infty \cdots \text{(für die Convergenz)} \end{cases}$$

darauf hinzuweisen scheint, dass jedem *Divergenz*-Kriterium ein *ganz ähnlich* gebildetes, nach einem sehr einfachen Gesetze unmittelbar daraus abzuleitendes *Convergenz*-Kriterium entspricht. Ob nun dieser Zusammenhang lediglich auf *speciellen* Eigenschaften der hier in Frage kommenden Functionen n, $\lg n$ etc. oder aber — wie es thatsächlich der Fall ist — auf einem ganz *allgemeinen* Gesetze beruht, über diese wichtige Frage giebt die Kriterienform (α) (β) nicht den geringsten Aufschluss. Ebenso wenig lässt sie erkennen, ob es überhaupt möglich ist *allgemeine* Typen *disjunctiver* Kriterien anzugeben, bei denen $\left(\text{wie z. B. bei den Cauchy'schen Kriterien: } \lim a^{\frac{1}{n}} \gtrless 1,\ \lim \frac{\lg(a_n^{-1})}{\lg n} \gtrless 1\right)$ die Entscheidung über Divergenz oder Convergenz von der Prüfung eines *einzigen* Ausdruckes abhängt. Mag man nun auch den *practischen* Vortheil, den solche disjunctive Kriterien auf den ersten Blick darzubieten scheinen, ziemlich gering anschlagen,*) so erscheinen sie doch zweifellos *theoretisch* weit befriedigender, als jene dualistisch getrennten Divergenz- und Convergenz-Kriterien, weil sie dem vollkommensten Typus eines Kriteriums — nämlich dem Ausdrucke der *nothwendigen* und *hinreichenden* Bedingung — formell am nächsten kommen.**) Aus diesem Grunde muss wohl aber die völlige Unmög-

*) Die Prüfung des *einen* Ausdruckes, welche von den disj. Kriterien erster Art verlangt wird, ist nämlich im allgemeinen umständlicher, als die der *zwei* verschiedenen Ausdrücke bei Anwendung des entsprechenden Kriterien*paares* (wie z. B. die Prüfung von: $\lim \frac{\lg(a_n^{-1})}{\lg n}$ statt derjenigen von: $\lim n\cdot a_n$ und $\lim n^{1+\varrho}\cdot a_n$).

**) Ein Kriterium, welches die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Divergenz bezw. Convergenz fixirt, könnte naturgemäss lediglich eine Umschreibung der bezüglichen Definition sein, und diese lässt sich eben nicht auf die Beschaffenheit des einzelnen Reihengliedes basiren. Gäbe es nun aber ein solches Kriterium, so müsste sich dasselbe so formuliren lassen:

Gehört der Werth von $\lim F(a_n)$ — wo F eine passend gewählte Function bezeichnet — einem gewissen Werthegebiet A an, so **divergirt** *die Reihe der a_n; gehört er dem Gebiete A* **nicht** *an, so convergirt sie.*

Dieser Form des Kriteriums kommt nun aber diejenige des disj. Kriteriums

lichkeit, auf Grund der Du Bois Reymond'schen Methoden derartige disjunctive Kriterien aufzustellen oder auch nur deren Existenz zu erweisen, als eine nicht unwesentliche Lücke dieser ganzen Theorie gelten.

Noch minder genügend sind aber ihre Ergebnisse bezüglich der Kriterien *zweiter* Art. Schon die Einführung der letzteren, welche in Wahrheit auf einer Art Kunstgriff, nämlich — genau wie in der Dini'schen Abhandlung — auf einer Umformung der Kriterien *erster* Art mit Hülfe der völlig unvermittelten Substitution von $a_n \cdot \varphi(n)$ an Stelle von $\psi(n)$ beruht, scheint mir dem Verlangen nach einer natürlichen Verknüpfung der Convergenztheoreme keineswegs zu entsprechen. Hiervon aber abgesehen, erscheinen die so gewonnenen Kriterien zweiter Art derartig durch verschiedene Nebenbedingungen eingeschränkt*), dass ihr Werth fürs erste thatsächlich *völlig illusorisch* wird. Diese Einschränkungen lassen sich nun freilich mit Hülfe besonderer Betrachtungen von ziemlich einfacher Natur beseitigen: allein die letzteren reichen thatsächlich vollständig aus, um die betreffenden Kriterien ganz *unabhängig* von den ursprünglich gewählten Ausgangspunkten abzuleiten.**) Mit anderen Worten: die Kriterien zweiter Art ergeben sich eigentlich garnicht *in Folge* der Du Bois Reymond'schen Theorie, sondern *trotz* derselben.

Die angeführten, wie ich glaube, unbestreitbaren und sehr wesentlichen Mängel der obigen Theorie haben mich veranlasst, das fragliche Problem, welchem ich wegen der ausgedehnten Anwendung der Reihenlehre in der gesammten Analysis eine gewisse fundamentale Bedeutung zuerkennen möchte, von neuem zu behandeln. Hierbei ergab sich mir als Resultat, dass man unter ausschliesslicher Anwendung *ganz elementarer* Mittel zu den *allgemeinsten* Kriterien erster wie zweiter Art gelangen kann, ohne das für die Aufstellung irgend welcher Divergenz- und Convergenz-Kriterien gleichsam von selbst sich ergebende Princip der Reihenvergleichung auch nur einen einzigen Augenblick zu verlassen. Dieses Princip wird nun zunächst im § 1 der folgenden Abhandlung dazu benützt, um den allgemeinen Ausdruck der gesuchten Kriterien zu fixiren. Nach Einschaltung einiger für die späteren Entwickelungen nützlichen Formeln aus der Theorie der Logarithmen (§ 2) werden sodann die für die wirkliche Aufstellung der Kriterien erforderlichen *„typischen Formen“* für das allgemeine Glied jeder divergenten bezw. convergenten Reihe abgeleitet. Ich bemerke

---

weitaus am nächsten, welches mit Anwendung der nämlichen Bezeichnungen so lauten würde:

Gehört der Werth von lim $F(a_n)$ dem Gebiete A an, so divergirt die Reihe; gehört er dem Gebiete B an, so convergirt sie.

*) a. a. O. Art. VI.

**) a. a. O. Art. VII. — Noch deutlicher bei Stolz, a. a. O. p. 259, 260.

ausdrücklich, dass die hierbei zum Vorschein kommenden Sätze sich *theilweise* mit gewissen ähnlichen Sätzen aus den genannten Abhandlungen von Herrn Dini und Du Bois Reymond decken. Immerhin darf wohl die hier gegebene übersichtlichere Formulirung und naturgemässere Verknüpfung, namentlich aber auch die nicht unerhebliche Vereinfachung der Beweise einigen Anspruch auf Neuheit machen.

Nach diesen Vorbereitungen werden in § 5 die *Kriterien erster Art* behandelt, wobei sich die allgemeinsten Typen für dualistisch getrennte *Kriterienpaare*, wie auch für *disjunctive Doppel-Kriterien* ergeben. Im Anschluss an die letzteren erscheint dann noch ein, wie ich glaube, bisher nicht bekanntes *allgemeinstes Convergenz-Kriterium erster Art*, welches in Wahrheit das Analogon zu dem bisher ganz isolirt dastehenden *Kummer'schen Convergenz-Kriterium* (als dem allgemeinsten Convergenz-Kriterium *zweiter Art*) bildet. — Nach einem Excurs über die Tragweite der Kriterien erster Art (§ 6) — welcher in's besondere auch gewisse über diesen Punkt vielfach herrschende Unklarheiten oder Irrthümer zur Sprache bringt — werden ferner im § 7 die *Kriterien zweiter Art* discutirt und *neben den bisher bekannten* Formen derselben auch noch *andere von gleicher Allgemeinheit* abgeleitet. Der § 8 handelt sodann von den Beziehungen, welche zwischen den Kriterien *erster* und den entsprechenden *zweiter* Art stattfinden, und welche das Analogon zu der von Cauchy erwiesenen Beziehung zwischen $\lim a_n^{\frac{1}{n}}$ und $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ liefern.

Während sich alle diese Untersuchungen auf Reihen mit beliebigen positiven Gliedern beziehen, werden schliesslich noch zwei besondere Kategorien von Kriterien für Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern aufgestellt, von denen ich die einen als solche *dritter Art* (§ 9), die anderen als *erweiterte Kriterien zweiter Art* (§ 10) bezeichne.

---

§ 1.

Die allgemeinen Formen der Divergenz- und Convergenz-Kriterien insbesondere derjenigen erster und zweiter Art.

Bezeichnet man generell mit d_ν oder $\frac{1}{D_\nu}$ das allgemeine Glied einer *divergenten*, mit c_ν oder $\frac{1}{C_\nu}$ das einer *convergenten* Reihe, so kann man ohne weiteres schliessen, dass eine beliebig vorgelegte Reihe mit positiven Gliedern — $\sum a_\nu$ —

$$(1)\quad \begin{cases} \textit{divergirt}, \text{ wenn: } a_{\nu+p} \geqq h\,.\,d_\nu \\ \textit{convergirt}, \text{ wenn: } a_{\nu+p} \leqq H\,.\,c_\nu \end{cases} \begin{matrix}\text{(für alle Werthe } \nu \text{ von einem be-} \\ \text{stimmten an, etwa für } \nu \geqq m) \end{matrix}$$

wo p eine constante, positive ganze Zahl einschliesslich der Null, h und H *endliche* positive Grössen bedeuten, von denen übrigens die erstere beliebig *klein*, die letztere beliebig *gross* angenommen werden darf. Zur Erfüllung der Ungleichungen (1) erscheint es nun aber offenbar *hinreichend*, wenn für $n = \infty$:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \lim \dfrac{a_{n+p}}{d_n} = \lim D_n \cdot a_{n+p} \geqq g > h \text{ d. h. \textit{nicht} Null (\textit{Divergenz}),} \\[2ex] \lim \dfrac{a_{n+p}}{c_n} = \lim C_n \cdot a_{n+p} \leqq G < H \text{ d. h. \textit{nicht} unendlich (\textit{Convergenz}).} \end{cases}$$

Dies ist der *einfachste Typus* der *Kriterien erster Art*. Ein derartiges Kriterium *versagt*, wenn für ein irgendwie fixirtes D_ν bezw. C_ν:

lim $D_n a_{n+p} = 0$ oder unbestimmt mit der *unteren* Unbest.-Grenze 0,
lim $C_n a_{n+p} = \infty$ „ „ „ „ *oberen* „ „ ∞

wird. Die Möglichkeit, *wirksamere* Kriterien zu gewinnen, wird alsdann gegeben sein, sobald man zeigt, dass man stets Grössen D'_ν, C'_ν finden kann von der Beschaffenheit, dass:*)

$$D'_n \succ D_n, \qquad C'_n \prec C_n$$

und daher:

$$\lim D'_n a_{n+p} > \lim D_n a_{n+p}, \quad \text{also möglicherweise} > 0,$$
$$\lim C'_n a_{n+p} < \lim C_n a_{n+p}, \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad < \infty$$

resultirt.

Ferner ist leicht zu ersehen, dass man *jedem* Kriterium erster Art ausser der obigen *einfachsten* Form (I) auch unendlich viele andere Formen geben kann. Bedeutet nämlich $F(x)$ eine Function, die mit positiv wachsendem x eindeutig**) sich ändert, monoton zunimmt und

---

*) Ich bediene mich nach Du Bois Reymond's Vorgange der Bezeichnungen:

$$1)\quad f_1(n) \prec f_2(n),$$
$$2)\quad f_1(n) \sim f_2(n),$$
$$3)\quad f_1(n) \succ f_2(n)$$

um auszudrücken, dass für $n = \infty$ $\lim \dfrac{f_1(n)}{f_2(n)}$ bezw. 1) verschwindet; 2) endlich und von Null verschieden (aber nicht nothwendig bestimmt) ist 3) unendlich gross wird. Ausserdem bezeichne ich noch durch das Schema:

$$4)\quad f_1(n) \cong a f_2(n),$$

dass:

$$\lim \frac{f_1(n)}{f_2(n)} = a$$

sein soll.

**) D. h. als eindeutige Function im engern Sinne oder als eindeutiger Zweig einer beliebig vieldeutigen Function.

somit eine einzige positive Umkehrung zulässt, sodass also *je eine* der beiden Ungleichungen:

$$x_2 > x_1, \qquad F(x_2) > F(x_1)$$

stets auch die andere nach sich zieht, so lassen sich die Beziehungen (I) offenbar auch durch die folgenden ersetzen:

$$\text{(Ia)} \qquad \begin{cases} \lim F(D_n a_{n+p}) \geqq F(g) \text{ d. h. } > F(0)\text{: } \textit{Divergenz}, \\ \lim F(C_n a_{n+p}) \leqq F(G) \text{ d. h. } < F(\infty)\text{: } \textit{Convergenz} \end{cases}$$

oder, etwas anders geschrieben, wenn in den ursprünglichen Ungleichungen (1)

$$D_\nu = \frac{E_\nu}{s_\nu}, \qquad C_\nu = \frac{E_\nu}{r_\nu}$$

gesetzt wird:

$$\text{(Ib)} \qquad F(E_n a_{n+p}) \begin{cases} > F(g s_n)\text{: } \textit{Divergenz}, \\ < F(G r_n)\text{: } \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Auf einer derartigen Umformung der Kriterien (I) bei geeigneter Wahl der hier mit E_ν, s_ν, r_ν bezeichneten Grössen beruht insbesondere, wie sich späterhin noch genauer zeigen wird, die Möglichkeit, *disjunctive Kriterien erster Art* aufzustellen.

Statt die Grössen $a_{\nu+p}$ unmittelbar mit den d_ν bezw. c_ν zu vergleichen, kann man offenbar auch die entsprechenden Zunahmen, gemessen durch die Quotienten $\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}}$ und $\frac{d_{\nu+1}}{d_\nu}$ bezw. $\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}$ in Beziehung bringen. Man pflegt alsdann direct zu beweisen, dass aus den Relationen:

$$\text{(2)} \qquad \frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} \geqq \frac{d_{\nu+1}}{d_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} \leqq \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} \qquad (\nu \geqq m)$$

die Divergenz bezw. Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$ sich ergiebt. Um aber über die Stellung der Ungleichungen (2) zu den anfangs betrachteten (1) volle Klarheit zu gewinnen, scheint es mir angemessener das gewünschte Resultat durch den folgenden Hülfssatz zu begründen:

Hülfssatz. Hat man zwei unbegrenzte Folgen positiver, im Unendlichen eventuell auch verschwindender Grössen:

$$p_1 \, p_2 \ldots p_\nu \ldots,$$
$$q_1 \, q_2 \ldots q_\nu \ldots$$

und es ist für $\nu \geqq m$ beständig:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \geqq \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \leqq \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu},$$

so gilt für $\nu \geqq m+1$ durchweg die Beziehung:

$$p_\nu \geqq k \cdot q_\nu \quad \text{bezw.} \quad p_\nu \leqq k \cdot q_\nu$$

wo k eine *bestimmte* positive Constante bedeutet.

Gelten dagegen für $\nu \geqq m$ die *Un*gleichungen

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} > \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} < \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu}$$

(*mit Ausschluss der Gleichheit*) so kann man zu *jeder beliebig gross vorzuschreibenden* Zahl K eine endliche positive ganze Zahl n so bestimmen, dass für $\nu \geqq m + n$

$$p_\nu > K \cdot q_\nu \quad \text{bezw.} \quad p_\nu < \frac{1}{K} \cdot q_\nu$$

Beweis. Aus:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \geqq \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \leqq \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \quad (\nu \geqq m)$$

folgt durch Substitution von $m, m+1, \ldots, m+\nu-1$ an Stelle von ν und Multiplication aller resultirenden Ungleichungen:

$$\frac{p_{m+\nu}}{p_m} \geqq \frac{q_{m+\nu}}{q_m} \quad \text{bezw.} \quad \frac{p_{m+\nu}}{p_m} \leqq \frac{q_{m+\nu}}{q_m} \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

also:

$$p_{m+\nu} \geqq \frac{p_m}{q_m} \cdot q_{m+\nu} \quad \text{bezw.} \quad p_{m+\nu} \leqq \frac{p_m}{q_m} \cdot q_{m+\nu}$$

oder, wenn man die constante endliche Grösse $\frac{p_m}{q_m} = k$ setzt und für $m + \nu$ wieder ν schreibt:

$$p_\nu \geqq k \cdot q_\nu \quad \text{bezw.} \quad p_\nu \leqq k \cdot q_\nu \quad (\nu \geqq m+1)$$

womit der erste Theil des obigen Satzes bewiesen ist.

Sei nun zweitens zunächst:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} > \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \quad (\nu \geqq m)$$

und K eine *beliebig gross* anzunehmende positive Grösse. Ist dann schon

$$p_m \geqq K \cdot q_m$$

so findet man analog wie oben:

$$p_{m+\nu} > \frac{p_m}{q_m} \cdot q_{m+\nu} \quad \text{d. h.} \quad > K \cdot q_{m+\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

oder anders geschrieben:

$$p_\nu > K \cdot q_\nu \quad (\nu \geqq m + 1).$$

Ist dagegen:

$$p_m < K \cdot q_m,$$

so setze man zunächst:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} = (1 + \alpha_\nu)\frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \quad (\nu \geqq m)$$

wo α_ν auf Grund der Voraussetzung durchweg positiv und von Null verschieden sein muss, also für die Gesammtheit aller Werthe $\nu \geqq m$ eine gleichfalls von Null verschiedene positive untere Grenze α besitzt. Da hiernach:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \geqq (1+\alpha)\frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \quad (\nu \geqq m),$$

so folgt, wenn man der Reihe nach $\nu = m,\ m+1, \ldots, m+n$ setzt und alle resultirenden Beziehungen multiplicirt:

$$\frac{p_{m+n}}{p_m} \geqq (1+\alpha)^n \cdot \frac{q_{m+n}}{q_m} > (1+n\alpha)\frac{q_{m+n}}{q_m}$$

also:

$$\begin{aligned} p_{m+n} &> (1+m\alpha)\frac{p_m}{q_m} \cdot q_{m+n}, \\ &> K \cdot q_{m+n} \end{aligned}$$

sofern man die ganze positive Zahl n so bestimmt, dass:

$$(1+n\alpha)\frac{p_m}{q_m} \geqq K \quad \text{d. h.:} \quad n \geqq \frac{1}{\alpha}\left(K \cdot \frac{q_m}{p_m} - 1\right).$$

Und da hierbei n lediglich an eine gewisse *untere* Grenze gebunden ist, so folgt, wenn man für n die *kleinste* Zahl wählt, welche der obigen Bedingung genügt, dass dann allgemein:

$$p_\nu > K \,.\, q_\nu \quad (\nu \geqq m+n).$$

Hätte man schliesslich für $\nu \geqq m$

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} < \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} \quad \text{also:} \quad \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} > \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu},$$

so ergiebt sich mit Benützung des eben gefundenen Resultates:

$$q_\nu > K \cdot p_\nu \quad \text{also:} \quad p_\nu < \frac{1}{K} \cdot q_\nu$$

für jedes beliebig gross vorzuschreibende positive K und eine hiervon in bestimmter Weise abhängende untere Grenze $n \geqq m + n$. Hiermit ist jetzt auch des ausgesprochenen Satzes zweiter Theil bewiesen, dem man offenbar auch die folgende Fassung geben kann:

Ist für $n = \infty$:

$$\lim \frac{p_{n+1}}{p_n} > \lim \frac{q_{n+1}}{q_n} \quad \text{bezw.} \quad \lim \frac{p_{n+1}}{p_n} < \lim \frac{q_{n+1}}{q_n},$$

so hat man stets:

$$\lim \frac{p_n}{q_n} = \infty \qquad \text{bezw.} \quad \lim \frac{p_n}{q_n} = 0. -$$

Aus dem soeben bewiesenen Hülfssatze folgt nun, wenn man speciell $p_\nu = a_{\nu+p}$ und $q_\nu = d_\nu = D_\nu^{-1}$ bezw. $q_\nu = c_\nu = C_\nu^{-1}$ setzt, ohne weiteres, dass die Beziehungen (2) in der That stets die Divergenz bezw. Convergenz $\sum a_\nu$ nach sich ziehen. Da man denselben auch die Form geben kann:

$$(2\text{a})\quad P_\nu(D_\nu a_{\nu+p} - D_{\nu+1} a_{\nu+p+1}) \leqq 0 \quad \text{bez.} \quad P_\nu(C_\nu a_{\nu+p} - C_{\nu+1} a_{\nu+p+1}) \geqq 0$$

wo P_ν einen für jedes endliche ν angebbar *positiven*, im übrigen aber *in völlig willkürlicher Weise von ν unabhängigen* Factor bezeichnen soll, so ergiebt sich insbesondere:

$$(\text{II})\quad \begin{cases} (1)\ \textit{Divergenz}, \text{ wenn: } \lim P_n(D_n a_{n+p} - D_{n+1} a_{n+p+1}) < 0, \\ (2)\ \textit{Convergenz}, \text{ wenn: } \lim P_n(C_n a_{n+p} - C_{n+1} a_{n+p+1}) > 0. \end{cases}$$

Dabei darf nun aber der positive, im übrigen willkürliche Factor P_n auch so gewählt werden, dass er für $n = \infty$ auch *in beliebiger Weise unendlich gross wird oder verschwindet* — ein Umstand, der, wie ich glaube, bisher noch nicht bemerkt worden ist, der sich aber für die gesammte Theorie der Kriterien (II) als bedeutungsvoll erweist.

Um die Richtigkeit der obigen Behauptung einzusehen, bemerke man, dass jedesmal wenn eine der Beziehungen (II) erfüllt ist, schon von einer bestimmten endlichen Stelle $\nu \geqq m$ ab:

$$P_\nu(D_\nu a_{\nu+p} - D_{\nu+1} a_{\nu+p+1}) < -\varrho \quad \text{bez.} \quad P_\nu(C_\nu a_{\nu+p} - C_{\nu+1} a_{\nu+p+1}) > +\varrho$$

sein muss, wo ϱ angebbar positiv; oder auch, wenn man D_ν, C_ν wiederum durch d_ν^{-1}, c_ν^{-1} ersetzt, etwas anders geschrieben:

$$\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} > \frac{d_{\nu+p}}{d_\nu}\left(1 + \varrho\,\frac{d_\nu}{P_\nu a_{\nu+p}}\right)$$

bezw.

$$\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} < \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}\left(1 - \varrho\,\frac{c_\nu}{P_\nu a_{\nu+p}}\right)$$

und man ist daher, selbst wenn der offenbar ungünstigste Fall eintritt, dass P_ν mit ν in beliebiger Weise unendlich gross wird, unter allen Umständen sicher, dass für jeden Werth $\nu \geqq m$ einschliesslich von $\nu = \infty$ zum mindesten noch:

$$\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} \geqq \frac{d_{\nu+1}}{d_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} \leqq \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu},$$

woraus dann die Divergenz bezw. Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$ unzweideutig hervorgeht.

Ich bezeichne nun alle in der Form (II) enthaltenen Kriterien, d. h. im Grunde genommen alle diejenigen, welche hervorgegangen sind aus der Vergleichung des Quotienten $\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}}$ mit $\frac{d_{\nu+1}}{d_\nu}$ bezw. $\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}$, als

Kriterien zweiter Art — etwas abweichend von der Du Bois Reymond'schen Terminologie, nach welcher diese Bezeichnung ausdrücklich nur diejenigen Kriterien umfasst, deren definitiver Ausdruck lediglich den Quotienten $\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}}$ $\left(\text{oder } \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}\right)$ enthält. Man erzeugt im übrigen diese besondere, für die Praxis freilich wichtigste Form der Kriterien zweiter Art aus der von mir gewählten Hauptform (II), wenn man den willkürlichen Factor P_ν durch $\frac{P_\nu}{a_{\nu+p}}$ oder $\frac{P_\nu}{a_{\nu+p+1}}$ ersetzt, wobei dann das neue P_ν wiederum einzig und allein an die Bedingung geknüpft ist, *nicht* negativ zu sein.

Wenn in einem der Kriterien (II) für eine bestimmte Wahl von P_ν und D_ν bezw. C_ν der zu prüfende Grenzwerth verschwindet oder in der Weise unbestimmt wird, dass die Null als obere bezw. untere Unbestimmtheitsgrenze erscheint, so *versagt* das betreffende Kriterium. Findet nun aber hierbei die Annäherung an den Werth Null für das Divergenzkriterium ausschliesslich von der Seite der negativen, für das Convergenzkriterium ausschliesslich von der Seite der positiven Zahlen statt, so kann man die betreffenden Kriterien durch blosse Abänderung des Factors P_ν so umformen, dass sie noch unzweideutig die Divergenz bez. Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$ anzeigen.*) Man hat hierzu den wesentlich positiven Factor P_ν nur so zu wählen, dass $\lim P_n$ für $n=\infty$ mindestens ebenso stark unendlich wird, wie

$$\lim D_n a_{n+p} - D_{n+1} a_{n+p+1}) \quad \text{bezw.} \quad \lim (C_n a_{n+p} - C_{n+1} a_{n+p+1})$$

verschwindet.

Ersetzt man zu diesem Behufe etwa P_ν durch:

$$\frac{1}{P_\nu (D_\nu a_{\nu+p} - D_{\nu+1} a_{\nu+p+1})^2} \quad \text{bezw.} \quad \frac{1}{P_\nu (C_\nu a_{\nu+p} - C_{\nu+p} a_{\nu+p+1})^2}$$

(wo P_ν einen neuen willkürlichen, nur nicht negativen Factor bedeutet), so ergiebt sich:

---

*) In der That gelten ja in diesem Falle *ausserhalb* der Grenze $\nu=\infty$ von einem best. endlichen $\nu \geqq m$ ab die Relationen

$$\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} > \frac{d_{\nu+1}}{d_\nu} \quad \text{bezw,} \quad < \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}$$

während für $\nu=\infty$ *Un*gleichungen in Gleichungen übergehen. Dann ist aber allgemein für $\nu \geqq m$ einschliesslich $\nu=\infty$ immerhin noch:

$$\frac{a_{\nu+p+1}}{a_{\nu+p}} \geqq \frac{d_{\nu+1}}{d_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \leqq \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}$$

und daraus folgt auf Grund des bewiesenen Hülfssatzes die Divergenz bezw. Convergenz von $\sum a_\nu$.

$$(\mathrm{III})\begin{cases}(1)\ \lim\left\{P_n(D_n a_{n+p}-D_{n+1}a_{n+p+1})\right\}^{-1}<0: & \textit{Divergenz},\\ (2)\ \lim\left\{P_n(C_n a_{n+p}-C_{n+1}a_{n+p+1})\right\}^{-1}<0: & \textit{Convergenz}.\end{cases}$$

Der Vergleich dieser letzten Kriterien mit den unter (II) aufgestellten lehrt ohne weiteres, dass beide Formen offenbar dasselbe leisten, sobald die betreffenden Grenzwerthe weder Null noch unendlich gross werden; dass sie sich hingegen beim Eintreten dieser Grenzfälle unter den oben näher bezeichneten Modalitäten wechselseitig ergänzen (d. h.: wenn eins der Kriterien (II) durch das Auftreten der Null als Grenzwerth oder als obere bezw. untere Unbest.-Grenze versagt, so liefert das entsprechende Kriterium (III) eine unzweideutige Entscheidung, falls dort der Grenzwerth $-\infty$ bezw. $+\infty$ oder ein wenigstens bezüglich des Vorzeichens bestimmter Werth mit der Unbest.-Grenze $-\infty$ bezw. $+\infty$ zum Vorschein kommt — *vice versa*).

Was nun die Stellung der Kriterien *zweiter* Art zu den entsprechenden (d. h. mit den nämlichen D_ν, C_ν gebildeten) *erster* Art betrifft, so folgt auf Grund des bewiesenen Hülfssatzes ohne Weiteres, dass die letzteren niemals versagen können, sobald jene eine Entscheidung liefern. Dagegen ist *a priori* klar, dass die Kriterien zweiter Art unendlich oft versagen werden, wo die entsprechenden erster Art wirksam sind; denn der obige Hülfssatz ist ja in keiner Weise umkehrbar, mit anderen Worten: es können die Glieder einer Grössenfolge (a_ν) durchweg *über* oder durchweg *unter* den entsprechenden einer anderen Grössenfolge (b_ν) liegen, *ohne* dass zwischen den Zunahme-Verhältnissen $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ und $\frac{b_{\nu+1}}{b_\nu}$ *irgend eine feste Beziehung* besteht*).

---

*) Dies klingt im Grunde genommen so trivial, dass Mancher es kaum der Erwähnung für werth halten dürfte: immerhin scheint mir über diesen Punkt noch nicht allgemein genügende Klarheit zu herrschen. Sonst wäre es zum mindesten völlig unverständlich, dass vor noch nicht langer Zeit Herr M. Lerch eine besondere Note publicirte (*Teixeira, Jornal de Sciencias Mathematicas, T. VII, p. 79*). lediglich um darauf hinzuweisen, es könne Σa_ν auch *convergiren*, wenn $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *nicht* existirt, bezw. unter verschiedenen Werthen auch beliebig (ev. unendlich) grosse annimmt; und dass er nun gar zur Erhärtung dieser, wie gesagt, eigentlich ganz selbstverständlichen, übrigens aber durch *zahllose* Beispiele *allereinfachster* Art zu belegenden Thatsache das folgende *geradezu monströse* Beispiel construirt:

$$a_n = \delta^{n-(\lg n)} \cdot g^{\frac{1}{2}(\lg n)[1+(\lg n)]},$$

wo $(\lg n)$ den *ganzen* Theil des Brigg'schen Logarithmus von n bezeichnet und δ, g positive Grössen sind, welche die Bedingungen erfüllen:

$$\delta<1,\quad g>1,\quad \delta\cdot\sqrt{g}<1!$$

Und wenn Herr Cesaro in einer weiteren Note (a. a. O. p. 171) von Herrn Lerch's „Entdeckung" so überrascht ist, dass er dieselbe erst von nun ab in seine Vor-

Vielmehr erscheint der Fall, in welchem die *besondere Beziehung* $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} > \frac{b_{\nu+1}}{b_\nu}$ bezw. $< \frac{b_{\nu+1}}{b_\nu}$ *existirt*, als ein *ausnehmend specieller* unter allen möglichen Fällen, und die *Wahrscheinlichkeit*, dass eine Reihe $\sum a_\nu$, die auf ein bestimmtes Kriterium *erster* Art reagirt, auf das entsprechende *zweiter* Art gleichfalls reagirt, ist geradezu *unendlich klein*. Das schliesst natürlich nicht aus, dass die Kriterien *zweiter*

lesungen aufnimmt, im übrigen aber bemerkt: es gäbe *einfachere Beispiele* solcher Reihen, so scheint mir dies den eigentlichen Kernpunkt der Sache noch keineswegs zu treffen. Es giebt eben nicht blos *einfachere Beispiele* von convergirenden Reihen mit beliebig oscillirendem Grenzwerthe $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, diese sind vielmehr geradezu als die *Regel* anzusehen, während solche Reihen, für welche $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *existirt*, nur *eine ganz specielle Classe* bilden. Die *Existenz* eines best. Grenzwerthes für $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hängt ja vor allem *wesentlich* von der *Anordnung* der Grössen a_ν ab und *hat in Folge dessen mit der Convergenz oder Divergenz der Reihe $\sum a_\nu$ überhaupt nichts zu thun*. *Existirt* für irgend eine convergente (oder divergente) Reihe $\sum a_\nu$ der fragliche Grenzwerth, so kann man *durch blosse Umordnung der Glieder* erzielen, dass derselbe irgendwie oscillirt. Insbesondere bemerke man, dass der fragliche Quotient schon bei jeder *endlichen* Verschiebung der Glieder völlig alterirt wird, und dass dasselbe für seinen Grenzwerth gilt, falls derselbe bei der ursprünglichen Anordnung nicht gerade $= 1$ war. Ist z. B. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ und man bildet aus der Folge der Terme (a_ν) eine neue (a'_ν) dadurch, dass man lediglich jedes Glied mit ungeradem Index $2\nu + 1$ *vor* das unmittelbar vorangehende mit geradem Index 2ν setzt, so ist in der umgeordneten Reihe $\lim \frac{a'_{n+1}}{a'_n}$ entweder von der Form: $\lim \frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}}$ d. h. $= \frac{1}{\alpha}$, oder von der Form:

$$\lim \frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu+2}} = \alpha^2,$$

also unbestimmt. Ferner kann man aus einer convergenten Reihe $\sum a_\nu$ mit bestimmtem Grenzwerthe $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ unendlich viele convergente Reihen mit beliebig oscillirendem Gliederquotienten bilden, wenn man die Glieder a_ν der Reihe nach mit *ganz beliebigen* positiven, nur unter einer endlichen Grenze bleibenden Grössen c_ν multiplicirt, oder auch indem man zwischen die Glieder a_ν diejenigen einer beliebigen anderen convergirenden Reihe $\sum b_\nu$ nach einem willkürlich zu wählenden Gesetze einschaltet u. s. f. —

Aber selbst wenn die Terme a_ν einer convergenten Reihe in der für das Zustandekommen eines solchen Grenzwerthes offenbar *günstigsten* Anordnung — nämlich der Grösse nach geordnet — vorliegen, braucht der fragliche Grenz-

Art zur Prüfung zahlreicher in der Analysis vorkommender Reihen sich als zweckmässig erweisen, oftmals sogar in höherem Grade, als die entsprechenden Kriterien *erster* Art — aus dem einfachen Grunde, weil die Glieder von Reihen, welche zur Darstellung von Functionen mit *speciellen*, wohl definirten Eigenschaften dienen, auch nach *speciellen* Gesetzen fortschreiten, welche häufig die Untersuchung des Quotienten

---

werth *nicht* zu existiren, sondern kann noch *beliebig* (d. h. hier natürlich wegen der absteigenden Grössenfolge der Glieder in den Grenzen 1 und 0) *oscilliren*.

(Beispiel: $a_\nu = \alpha^{\left[\frac{1}{2}\nu\right]^2}$, wo $\alpha < 1$ und $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet, also: $a_{2\nu} = \alpha^{\nu^2}$, $a_{2\nu+1} = \alpha^{\nu^2}$; oder auch, wenn man durchweg *abnehmende* Glieder — mit Ausschluss der Gleichheit — haben will:

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}\alpha^{\left[\frac{1}{2}\nu\right]^2}, \text{ also: } a_{2\nu} = \frac{1}{2_\nu}\alpha^{\nu^2}, \quad a_{2\nu+1} = \frac{1}{2\nu+1}\alpha^{\nu^2}.$$

In beiden Fällen ergiebt sich: $\lim \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1$, $\lim \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = 0$). —

Das Analoge gilt selbstverständlich für *divergente* Reihen, und zwar wiederum auch noch in dem besonderen Falle, wo die Glieder beständig abnehmen und schliesslich gegen Null convergiren: es kann dann trotz der Divergenz der Reihe die Abnahme der Glieder an unendlich vielen Stellen immerhin noch so stark sein, dass unter den verschiedenen Werthen von $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ beliebig kleine Werthe einschliesslich der Null erscheinen. (Beispiel: Ich bilde die Reihe:

$$\sum^{\nu}\left\{\frac{\varepsilon_0^{(\nu)}}{a^{\nu^2}} + \frac{\varepsilon_1^{(\nu)}}{a^{\nu^2}} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu^{(\nu)}}{a^{\nu^2}}\right\},$$

wo

$$a > 1, \quad \mu = [a^{\nu^2}]$$

und entweder:

$$\varepsilon_0^{(\nu)} = \varepsilon_1^{(\nu)} = \cdots = \varepsilon_\mu^{(\nu)} = 1,$$

oder, wenn man wieder nur wirklich *ab*nehmende Glieder zulassen will, etwa:

$$\varepsilon_\varkappa^{(\nu)} = 1 + \frac{\mu - \varkappa}{\mu}, \quad \text{also} \quad \varepsilon_0^{(\nu)} = 2, \quad \varepsilon_1^{(\nu)} = 2 - \frac{1}{\mu}, \cdots \varepsilon_\mu^{(\nu)} = 1.$$

Die Reihe ist offenbar divergent, da die zu je einer Gruppe vereinigten (d. h. zu dem nämlichen Werthe ν gehörigen) Glieder zusammengenommen jedesmal den Werth 1 übersteigen. Dabei ist nun:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

so lange a_n und a_{n+1} beide innerhalb *einer* durch denselben Werth ν charakterisirten Gliedergruppe liegen. Dagegen hat man, falls a_n das Schlussglied einer, a_{n+1} das Anfangsglied der folgenden Gruppe bildet:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\left\{\frac{\varepsilon_0^{(\nu+1)}}{a^{(\nu+1)^2}} : \frac{\varepsilon_\mu^{(\nu)}}{a^{\nu^2}}\right\} = \lim\left\{\frac{\varepsilon_0^{(\nu+1)}}{\varepsilon_\mu^{(\nu)}} \cdot \frac{1}{a^{2\nu+1}}\right\} = 0). —$$

$\frac{a_{n+p+1}}{a_{n+p}}$ einfacher erscheinen lassen, als die des Reihengliedes a_{n+p} selbst.

Ueberhaupt ist ja festzuhalten, dass es sich bei der Aufstellung von Divergenz- und Convergenzkriterien immer nur um die Formulirung *hinreichender* Bedingungen handelt, und dass es hierbei nicht ausschliesslich darauf ankommt, möglichst *umfassende*, sondern namentlich auch möglichst *einfache* Formen solcher Bedingungen zu fixiren, da ja hinsichtlich der praktischen Brauchbarkeit solcher Kriterien eine *engere*, aber möglichst *einfache* und *leicht auszurechnende* Form der betreffenden Bedingung für die Mehrzahl der wirklich vorkommenden Fälle werthvoller erscheint, als eine zwar *umfassendere*, aber auch *complicirtere* Form.

Im Uebrigen stellen die Beziehungen (II) wiederum nur den *einfachsten* Typus der Kriterien zweiter Art dar, und es ist klar, dass man in ähnlicher Weise, wie bei den Kriterien erster Art, durch passende Einführung von monotonen Functionen der in Betracht kommenden Grössen an Stelle dieser Grössen selbst, jedem solchen Kriterium unendlich viele andere Formen geben kann.

Setzt man etwa, gerade wie bei der entsprechenden Umformung der Kriterien erster Art:

$$D_\nu = \frac{E_\nu}{s_\nu}, \quad C_\nu = \frac{E_\nu}{r_\nu}$$

und schreibt die den Kriterien (II) zu Grunde liegenden Ungleichungen (2) folgendermassen:

$$\frac{E_\nu a_{\nu+p}}{E_{\nu+1} a_{\nu+p+1}} \leqq \frac{s_\nu}{s_{\nu+1}} \quad \text{bezw.} \quad \geqq \frac{r_\nu}{r_{\nu+1}},$$

so ergiebt sich, wenn wiederum $F(x)$ eine Function mit den früher definirten Eigenschaften bedeutet:

Hiernach beruht es also auch auf einem *Irrthum*, wenn Du Bois Reymond gelegentlich bemerkt (a. a. O. p. 83): „*Bei jeder divergenten Reihe* Σu_p *ist* $\lim \frac{u_{p+1}}{u_p} = 1$, *wie man unter anderem daraus erkennt, dass die Abnahme von* u_p *eingeschlossen sein muss zwischen der Constanz des Gliedes und der Abnahme* $\frac{1}{p^\alpha}$, *wo* $\alpha > 1$, *weil die letztere Reihe schon convergirt; es ist aber*

$$\lim \frac{p^\alpha}{(p+1)^\alpha} = 1.\text{“}$$

(NB. Aus der Art dieser Begründung *scheint* hervorzugehen, dass nur divergente Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern gemeint sind — eine Einschränkung, die freilich durch den übrigen Zusammenhang in keiner Weise gefordert wird, die vielmehr das betreffende Gesammtresultat nicht unerheblich modificiren würde. Aber selbst *mit* dieser Einschränkung erscheint die Du Bois Reymond'sche Ansicht auf Grund des hier Gesagten unhaltbar).

$$\text{(IIa)} \qquad F\left(\frac{E_n a_{n+p}}{E_{n+1} a_{n+p+1}}\right) \begin{cases} < F\left(\frac{s_n}{s_{n+1}}\right) : \textit{Divergenz}, \\ > F\left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right) : \textit{Convergenz}, \end{cases}$$

also ein disjunctives Kriterium zweiter Art. —

Durch die Aufstellung der Kriterien erster und zweiter Art sind nun aber die Möglichkeiten derartiger Bildungen offenbar keineswegs erschöpft. So könnte man zunächst die Zu- bezw. Abnahme der Glieder statt durch die Quotienten, auch durch die Differenzen zweier consecutiver Glieder oder deren reciproker Werthe messen und durch Vergleichung mit den entsprechenden Differenzen für eine bereits als divergent oder convergent erkannte Reihe neue Kriterienformen ableiten. Dieses Verfahren würde freilich bei Reihen mit ganz beliebigen positiven Gliedern kein brauchbares Resultat liefern, weil hier die fraglichen Differenzen in ganz willkürlicher Abwechselung verschiedene Vorzeichen haben können, und daher die betreffenden Ungleichungen für ähnliche Umformungen und Schlüsse, wie diejenigen, welche zur Aufstellung der Kriterien zweiter Art geführt haben, nicht geeignet sind. Dagegen ist die Herleitung derartiger Kriterien für Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern ohne Schwierigkeit durchführbar, und da dieselben sehr einfach ausfallen, sodass sie für gewisse Reihentypen in ihrer Anwendung bequemer sein dürften, als die entsprechenden Kriterien erster oder zweiter Art, so will ich später, wo von den Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern speciell die Rede sein wird, auf diese, wie ich glaube, bisher nirgends betrachtete Form von Kriterien, die ich als solche *dritter Art* bezeichne, noch ausführlicher zurückkommen (§ 9).

Man könnte ferner in ganz allgemeiner Weise *irgendwelche Functionen von zwei oder mehreren Gliedern* a_ν mit den entsprechenden Functionen von Grössen d_ν bezw. c^ν vergleichen und bei passender Wahl dieser Functionen die Divergenz bezw. Convergenz von $\sum a_\nu$ erschliessen. Hiermit ist für die Aufstellung von Divergenz- und Convergenzkriterien offenbar ein völlig unbegrenztes Feld eröffnet: aber gerade wegen dieser Unbegrenztheit erscheint es durchaus müssig, noch weitere Specialfälle ausdrücklich durchzuführen. Damit soll keineswegs gesagt sein, dass die Anwendung solcher zusammengesetzterer Kriterien nicht für gewisse Reihen wirklich in Frage kommen könnte, wo die üblichen Kriterien erster und zweiter Art versagen*): nur wird man eben in jedem derartigen besonderen Falle die passenden Kriterien auf Grund der hier entwickelten Principien speciell zu bilden haben. —

*) Vgl. § 6, am Schlusse.

Nachdem jetzt die allgemeine Form der Divergenz- und Convergenzkriterien fixirt ist, erkennt man, dass das Problem, alle möglichen derartigen Kriterien aufzustellen, wesentlich auf der Lösung des folgenden beruht: *„Alle möglichen d_ν und c_ν, d. h. typische Formen für das allgemeine Glied jeder divergenten bezw. convergenten Reihe aufzufinden."*

Alle möglichen Grössen d_ν sind nun aber dadurch *vollständig* charakterisirt, dass d_0 wesentlich positiv bezw. Null und die Summe $(d_0 + d_1 + \cdots + d_\nu)$ eine mit ν *monoton zunehmende* Function M_ν mit dem Grenzwerthe ∞ für $\nu = \infty$ ist. Denkt man sich alle überhaupt möglichen solchen M_ν, so stellen dieselben auch alle möglichen Summen $(d_0 + d_1 + \cdots + d_\nu)$ dar, und man findet somit die allgemeine Form *aller* möglichen d_ν durch Auflösung der Recursionsformel:

$$\sum_0^\nu {}_\varkappa\, d_\varkappa = M_\nu.$$

Es erscheint aber für die Ausbildung der ganzen Theorie vortheilhaft neben der *einen*, auf diese Weise resultirenden typischen Form der Grössen d_ν noch eine *zweite* abzuleiten. Diese ergiebt sich in ganz analoger Weise aus der Bemerkung, dass mit der Summe der d_ν auch das Product $(1 + d_0)(1 + d_1)\cdots(1 + d_\nu)$ eine mit ν *monoton zunehmende* und wegen:

$$(1 + d_0)(1 + d_1)\cdots(1 + d_\nu) > 1 + (d_0 + d_1 + \cdots + d_\nu)$$

für $\nu = \infty$ selbst *in's Unendliche wachsende* Grösse ist, und dass diese *letztere* Eigenschaft den Grössen d_ν (im Gegensatz zu den c_ν) *ausschliesslich* zukommt*). Versteht man also wiederum unter M_ν *jede* beliebige positive monotone Function mit dem Grenzwerthe ∞ für $\nu = \infty$, so kann man aus der Recursionsformel:

$$\prod_0^\nu {}_\varkappa\, (1 + d_\varkappa) = M_\nu$$

eine weitere Form für alle möglichen d_ν ableiten.

*) Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar aus dem Fundamentalsatze über die Convergenz eines unendlichen Productes, dass nämlich

$$\prod_0^\infty {}_\varkappa\, (1 + a_\varkappa)$$

— wo $a_\varkappa > 0$ — einen endlichen und bestimmten Werth besitzt, sobald Σa_ν convergirt. Da es nun aber nicht ganz angemessen erscheinen mag, bei einer elementaren Begründung der Reihentheorie diejenige der unendlichen Producte als bekannt vorauszusetzen, so will ich der Vollständigkeit halber bemerken, dass

In durchaus analoger Weise könnte man die Grössen c_ν darstellen durch monoton zunehmende Functionen mit *endlichem* Grenzwerthe, da $\sum_0^\nu{}^\varkappa c_\varkappa$ und $\prod_0^\nu{}^\varkappa (1+c_\varkappa)$ derartige Functionen von ν sind. Die gesammte Theorie gewinnt aber erheblich an Uebersichtlichkeit, wenn man alles durch eine *einzige* Gattung von monotonen Functionen ausdrückt — also etwa durch die oben mit M_ν bezeichneten, für welche $M_\infty = \infty$ wird. Um dies auch für die Darstellung der c_ν zu erzielen, hat man nur zu beachten, dass $\sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa = S$ eine bestimmte endliche Grösse, $S - \sum_0^\nu{}^\varkappa c_\varkappa = \sum_{\nu+1}^\infty{}^\varkappa c_\varkappa$ eine positive, monoton *ab*nehmende Function mit der Grenze Null, also der reciproke Werth davon eine positive, monoton zunehmende Function mit dem Grenzwerthe ∞ und somit vom Typus M_ν ist. Man gewinnt also die gesuchte Formel zur Darstellung der Grössen c_ν, wenn man setzt:

$$\left(\sum_{\nu+1}^\infty{}^\varkappa c_\varkappa\right)^{-1} = M_\nu.$$

Eine analoge Betrachtung bezüglich des Productes $\prod_0^\nu{}^\varkappa (1+c_\varkappa)$ würde zu einer zweiten typischen Darstellung der c_ν durch Grössen M_ν führen: es zeigt sich indessen, dass dieselbe für die weitere Ent-

---

man dies — ohne auf die Theorie der unendlichen Producte irgendwie einzugehen — sehr einfach folgendermassen beweisen kann. Es sei

$$P_\nu = \prod_0^\nu{}^\varkappa (1+a_\varkappa) = P_m \cdot \prod_{m+1}^\nu{}^\varkappa (1+a_\varkappa).$$

Wegen der Convergenz von $\Sigma a_\varkappa$ lässt sich die Zahl m so bestimmen, dass

$$s_{m,\nu} = \sum_{m+1}^\nu{}^\varkappa a_\varkappa < \varepsilon, \quad \text{(wo } \varepsilon \text{ ein pos. ächter Bruch).}$$

Alsdann hat man:

$$\prod_{m+1}^\nu{}^\varkappa (1+a_\varkappa) < 1 + s_{m,\nu} + s_{m,\nu}^2 + \cdots + s_{m,\nu}^{\nu-m} < \frac{1}{1-\varepsilon},$$

also:

$$P_\nu < \frac{P_m}{1-\varepsilon},$$

woraus — da P_ν mit ν monoton zunimmt — die Existenz eines best. endl. Grenzwerthes für P_ν folgt.

wickelung der Theorie ohne besondere Bedeutung ist, weshalb hier nicht weiter darauf eingegangen werden soll*).

Dagegen wird sich späterhin ergeben, dass die zuerst angedeutete typische Form der c_ν sich darstellen lässt als specieller Fall einer anderen, welche vermittelst eines veränderlichen Parameters nicht nur jene Form der c_ν, sondern auch diejenige der d_ν umfasst, und die in Folge dessen die Aufstellung *allgemeiner disjunctiver Kriterien* für Divergenz und Convergenz auf Grund der oben auseinandergesetzten Methode ermöglicht.

Ehe ich nun an die weitere Ausführung der hier mitgetheilten, für das Folgende maassgebenden Grundgedanken gehe, stelle ich, um den Gang der Untersuchung späterhin nicht zu unterbrechen, im folgenden Paragraphen zunächst einige ganz elementare Formeln aus der Theorie der Exponentialgrösse und der natürlichen Logarithmen für späteren Gebrauch übersichtlich zusammen.

Dabei soll im Folgenden ein für alle Mal

$$M_\nu \quad \textit{oder} \quad \mathsf{M}_\nu$$

eine für jeden endlichen Werth von ν (von irgend einem bestimmten ab) endliche und positive, mit ν monoton zunehmende Grösse mit dem Grenzwerthe ∞ für $\nu = \infty$ bedeuten.

§ 2.

Zusammenstellung einiger Formeln aus der Theorie der Exponentialgrösse und der natürlichen Logarithmen.**)

Ich definire, wie üblich, die Exponentialfunction e^x durch die Gleichung:

$$e^x = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad (n = \infty).$$

*) Vgl. § 4.

**) Man pflegt die hier gegebenen Formeln — insbesondere die fundamentalen Beziehungen (a), (b), (c) — gewöhnlich durch Anwendung der Exponentialreihe zu beweisen. Da es mir aber methodisch consequenter erscheint, die Convergenztheorie, als einen wesentlichen Bestandtheil der *allgemeinen* Grössenlehre, *vor* der Einführung *specieller Reihenformen* zu begründen, während andererseits für die fertige Herstellung practisch brauchbarer Kriterienskalen die Exponentialgrössen und natürlichen Logarithmen schwerlich zu entbehren sind, so ziehe ich vor, die hierfür nothwendigen Beziehungen aus der Definition:

$$e^x = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

herzuleiten. Dies ist nun freilich keineswegs neu und hätte füglich übergangen werden können: da mir indessen die fragliche Ableitung in keinem der mir bekannten Lehrbücher mit hinreichender Strenge und Einfachheit durchgeführt scheint, so glaubte ich dieselbe der Vollständigkeit halber hier angeben zu sollen.

Da nun für ein positives ganzzahliges n:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots 1}{n^{n-1}}x^n,$$

also für $x > 0$:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \begin{cases} > 1 + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}x^2, \\ < 1 + x + \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{x^{n-1}-1}{x-1}, \end{cases}$$

so folgt für $n = \infty$ und für *jedes* positive x:

$$e^x \geqq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{also sicher:} \quad > 1 + x \qquad (0 < x \leqq \infty)$$

und falls noch $x \leqq 1$:

$$e^x \leqq 1 + x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x} < 1 + x + \frac{x^2}{1-x} \quad \text{d. h.} \quad < \frac{1}{1-x}$$
$$(0 < x \leqq 1).$$

Nimmt man in diesen beiden Ungleichungen die reciproken Werthe, so wird:

$$e^{-x} \begin{cases} < \frac{1}{1+x} & (0 < x \leqq \infty), \\ > 1 - x & (0 < x \leqq 1), \end{cases}$$

oder wenn man $-x$ statt x schreibt:

$$e^x \begin{cases} < \frac{1}{1-x} & (-\infty \leqq x < 0), \\ > 1 + x & (-1 \leqq x < 0). \end{cases}$$

Durch Zusammenfassung dieser Ungleichungen mit den zuvor für e^x aufgestellten ergiebt sich, wenn man noch beachtet, dass sämmtliche *Un*gleichungen für $x = 0$ in Gleichungen übergehen:

$$\text{(a)} \qquad e^x \begin{cases} \geqq 1 + x & (-1 \leqq x \leqq \infty), \\ \leqq \frac{1}{1-x} & (-\infty \leqq x \leqq 1), \end{cases}$$

wobei sich die Gleichheitszeichen auf den einzigen Werth $x = 0$ beziehen.

Setzt man in der ersten dieser Ungleichungen: $1 + x = z$, in der zweiten: $\frac{1}{1-x} = z$, so nehmen dieselben die Form an:

$$\text{(b)} \qquad \left\{\begin{matrix} e^{z-1} \geqq z \\ e^{1-\frac{1}{z}} \leqq z \end{matrix}\right\} \qquad (0 \leqq z \leqq \infty),$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\text{(c)}\qquad \lg z \begin{cases} \leqq z-1 \\ \geqq 1-\dfrac{1}{z} \end{cases} \quad (0 \leqq z \leqq \infty),$$

(wobei die Gleichheitszeichen sich auf den einzigen Werth $z = 1$ beziehen).

Durch die Substitution

$$z = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}$$

erhält man die für die gesammte folgende Convergenztheorie fundamentale Formel:

$$\text{(d)}\qquad \lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu = \lg \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} \begin{cases} \leqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}, \\ \geqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}. \end{cases}$$

Ersetzt man in dieser Relation M_ν durch $\lg M_\nu$ (wobei ν bezw. M_ν von vornherein so gross zu nehmen ist, dass $\lg M_\nu > 0$ wird) und bezeichnet, wie üblich, $\lg\lg x$ durch $\lg_2 x$, so ergiebt sich:

$$\text{(e)}\qquad \lg_2 M_{\nu+1} - \lg_2 M_\nu \begin{cases} \leqq \dfrac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{\lg M_\nu} \leqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg M_\nu}, \\ \geqq \dfrac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{\lg M_{\nu+1}} \geqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \lg M_{\nu+1}}. \end{cases}$$

Wird allgemein:

$$L_\varkappa(x) = \lg_0 x \,.\, \lg_1 x \,.\, \lg_2 x \ldots \lg_\varkappa x$$

gesetzt, wo $\lg_\varkappa x$ den $\varkappa$-fach iterirten Logarithmus von x bezeichnet und $\lg_0 x$ die Bedeutung von x haben soll (sodass also auch $L_0(x) = x$), so ist für jedes positive ganzzahlige $\varkappa$:

$$\text{(f)}\qquad \lg_\varkappa M_{\nu+1} - \lg_\varkappa M_\nu \begin{cases} \leqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_{\varkappa-1}(M_\nu)}, \\ \geqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_{\varkappa-1}(M_{\nu+1})}. \end{cases}$$

Denn angenommen diese Relation — deren Richtigkeit für $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$ bereits erwiesen ist — gelte für irgend einen bestimmten Werth $\varkappa$, so findet man durch Substitution von $\lg M_\nu$ statt M_ν zunächst:

$$\lg_{\varkappa+1} M_{\nu+1} - \lg_{\varkappa+1} M_\nu \begin{cases} \leqq \dfrac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{\lg_1 M_\nu \,.\, \lg_2 M_\nu \ldots \lg_\varkappa M_\nu}, \\ \geqq \dfrac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{\lg_1 M_{\nu+1} \,.\, \lg_2 M_{\nu+1} \ldots \lg_\varkappa M_{\nu+1}} \end{cases}$$

und daher mit Berücksichtigung von Formel (d):

$$\lg_{\varkappa+1} M_{\nu+1} - \lg_{\varkappa+1} M_\nu \begin{cases} \leqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_\nu)}, \\ \geqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_{\nu+1})}, \end{cases}$$

womit die Allgemeingültigkeit der Relation (f) erwiesen ist.

Genügt M_ν der Bedingung

$$M_{n+1} \sim M_n \quad (\text{für } n = \infty),$$

in welchem Falle offenbar:

$$\lg M_{n+1} \cong \lg M_n \quad \text{und allgemein:} \quad \lg_\varkappa M_{n+1} \cong \lg_\varkappa M_n$$

wird, so liefern die Ungleichungen (f) die Beziehung:

$$\text{(g)} \qquad \lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n \sim \frac{M_{n+1} - M_n}{L_{\varkappa-1}(M_n)} \sim \frac{M_{n+1} - M_n}{L_{\varkappa-1}(M_{n+1})},$$

welche unter der Voraussetzung, dass:

$$M_{n+1} \cong M_n,$$

übergehen in:

$$\text{(h)} \qquad \lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n \cong \frac{M_{n+1} - M_n}{L_{\varkappa-1}(M_n)} \cong \frac{M_{n+1} - M_n}{L_{\varkappa-1}(M_n)}.$$

Setzt man speciell $M_\nu = \nu$, so liefert die Formel (h) die bekannte Beziehung:

$$\text{(i)} \qquad \lg_\varkappa(n+1) - \lg_\varkappa(n) \cong \frac{1}{L_{\varkappa-1}(n)} \cong \frac{1}{L_{\varkappa-1}(n+1)}$$

oder anders geschrieben:

$$\text{(k)} \qquad \begin{cases} \lim L_\varkappa(n) \left\{ \dfrac{\lg_\varkappa(n+1)}{\lg_\varkappa(n)} - 1 \right\} = 1, \\ \lim L_\varkappa(n+1) \left\{ 1 - \dfrac{\lg_\varkappa(n)}{\lg_\varkappa(n+1)} \right\} = 1. \end{cases}$$

Man bemerke, dass diese *Special*formeln, welche bei dem gewöhnlichen directen Herleitungsverfahren eine ziemlich umständliche Rechnung erfordern, sich hier sammt den zu Grunde liegenden *allgemeineren* Formeln (f) bezw. (h) fast ohne Rechnung ergeben. Es beruht dies darauf, dass $\lg_\varkappa M_\nu$ eine Function von genau demselben Charakter wie M_ν selbst ist, und dass daher die Ausgangsformel (d) schon alle weiteren in sich enthält. Aus diesem Grunde wird man auch jede andere Art von Beziehungen für *iterirte* Logarithmen am kürzesten immer so ableiten können, dass man als Argument zunächst nicht ν bezw. x selbst, sondern M_ν bezw. M_x einführt und erst in dem Endresultate $M_\nu = \nu$ bezw. $M_x = x$ setzt.

§ 3.

Typische Formen der divergenten Reihen.

Definition. Eine *divergente* Reihe $\sum d_\nu$ soll um so *schwächer divergent* heissen, je *langsamer* $\sum_0^n d_\nu$ mit n in's Unendliche wächst.

Von zwei divergirenden Reihen $\sum d_\nu$, $\sum d_\nu'$ wird also die erstere *schwächer divergiren*, als die zweite, wenn:

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n}{S_n'} < 1,$$

$$\left(\text{wobei: } \sum_0^n d_\nu = S_n, \quad \sum_0^n d_\nu' = S_n' \quad \text{gesetzt ist}\right),$$

oder auch, anders geschrieben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n - S_p}{S_n' - S_q'} < 1,$$

(wo p, q beliebige *endliche* pos. ganze Zahlen),

da die Hinzufügung von *endlich* bleibenden Grössen im Zähler und Nenner den Grenzwerth des fraglichen Ausdruckes nicht alterirt.

Zur Erfüllung dieser Bedingung ist offenbar *hinreichend* (aber nicht nothwendig), dass von einer bestimmten Stelle $\nu \geqq m$ ab beständig:

$$\frac{d_\nu}{d_\nu'} < 1$$

bleibt. —

Lehrsatz I. *Das allgemeine Glied d_ν jeder beliebig vorgelegten divergenten Reihe lässt sich stets auf die Form bringen:*

$$d_\nu = M_{\nu+1} - M_\nu, \tag{3}$$

wobei M_ν bis auf eine additive Constante eindeutig bestimmt ist.

Umgekehrt ist die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $(M_{\nu+1} - M_\nu)$ stets divergent und zwar um so schwächer, je langsamer M_ν mit ν in's Unendliche wächst.

Beweis: Aus der Recursionsformel

$$M_{\nu+1} - M_\nu = d_\nu$$

findet man durch Substitution von $\nu = 0, 1, \ldots (n-1)$ und Addition:

(4)
$$M_n = M_0 + \sum_0^{n-1} {}_\nu\, d_\nu,$$

d. h. M_n ist in der That bis auf die additive Constante M_0 als positive, monoton zunehmende Function von n mit dem Grenzwerthe ∞ eindeutig bestimmt. Der Werth jener Constanten ist übrigens für die betreffende Darstellung von d_ν ganz ohne Belang, da dieselbe aus jedem einzelnen Gliede d_ν vollständig herausfällt. Man wird ihr also im allgemeinen den Werth Null, als den einfachsten beilegen können, wodurch dann

(4a)
$$M_n = \sum_0^{n-1} {}_\nu\, d_\nu$$

wird.

Betrachtet man jetzt umgekehrt eine Reihe mit dem Gliede $(M_{\nu+1} - M_\nu)$, so wird:

$$\sum_0^{n-1} {}_\nu\, (M_{\nu+1} - M_\nu) = - M_0 + M_n,$$

woraus sich ohne weiteres ergiebt, dass diese Reihe divergirt, und zwar um so schwächer, je langsamer M_n mit n in's Unendliche wächst.

Lehrsatz II. *Das allgemeine Glied δ_ν jeder divergenten Reihe lässt sich stets auf die Form bringen:*

(5)
$$\delta_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu},$$

wo M_ν bis auf einen constanten Factor eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt divergirt stets die Reihe mit dem Gliede $\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}$, und zwar um so schwächer, je langsamer M_ν mit ν zunimmt.

Beweis: Aus:

$$\delta_\nu = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} - 1$$

ergiebt sich zunächst:

$$M_{\nu+1} = M_\nu (1 + \delta_\nu)$$

und daher durch Substitution von $\nu = 0, 1, \ldots (n-1)$ und Multiplication:

(6)
$$M_n = M_0 \prod_0^{n-1} {}_\nu\, (1 + \delta_\nu),$$

sodass M_n in der That die sämmtlichen verlangten Eigenschaften besitzt. Der willkürlich bleibende Factor M_0 ist wiederum für die

Darstellung von δ_ν durch den Ausdruck (5) ganz ohne Belang, da er sich aus jedem Gliede forthebt. Man wird ihm am einfachsten den Werth 1 beilegen können, wodurch dann:

(6a) $$M_n = \prod_0^{n-1} {}^{\nu} (1 + \delta_\nu)$$

wird. —

Um zu erkennen, dass umgekehrt eine Reihe mit dem Gliede:

$$a_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu} = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} - 1$$

stets divergirt, hat man:

$$M_{\nu+1} = M_\nu(1 + a_\nu)$$

und durch Auflösung dieser Recursionsformel, analog wie oben:

$$M_n = M_0 \prod_0^{n-1} {}^{\nu} (1 + a_\nu).$$

Da nun das rechts stehende Product für $n = \infty$ einen *endlichen* Grenzwerth besitzen würde, wenn $\sum a_\nu$ *con*vergirte*), während nach Voraussetzung $M_\infty = \infty$ sein soll, so folgt, dass $\sum a_\nu$ *di*vergiren muss.

Zugleich ersieht man, dass die Glieder

$$a_\nu = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} - 1$$

um so weniger von *Null* abweichen, je näher die Quotienten $\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}$ an der Einheit liegen — d. h. die Glieder der Reihe sind um so kleiner, die Reihe selbst divergirt also um so *schwächer*, je *langsamer* M_ν mit ν zunimmt. —

Zusatz. Sind die Glieder $\bar{\delta}_\nu$ einer im übrigen beliebigen divergenten Reihe durchweg positiv und < 1 (wobei $\lim \bar{\delta}_n$ für $n = \infty$ auch $= 1$ werden darf), so ist offenbar auch $\sum \frac{\bar{\delta}_\nu}{1 - \bar{\delta}_\nu}$ eine divergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, und folglich auch das Product:

$$\prod_0^{n-1} {}^{\nu} \left(1 + \frac{\bar{\delta}_\nu}{1 - \bar{\delta}_\nu}\right) = \prod_0^{n-1} {}^{\nu} (1 - \bar{\delta}_\nu)^{-1}$$

eine mit n monoton zunehmende, positive Function mit dem Grenzwerthe ∞, also vom Charakter M_n. Setzt man daher etwa:

---

*) s. die Randbem. gegen Schluss des § 1.

(7) $$M_n = M_0 \prod_0^{n-1} {}^{\nu} (1 - \bar{\delta}_\nu)^{-1},$$

wo M_0 wiederum eine beliebige positive Constante bedeutet, so findet man:

(8) $$\bar{\delta}_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$$

als weitere typische Form für das allgemeine Glied *jeder* divergenten Reihe, deren Glieder durchweg unter der Einheit liegen (event. für $\nu = \infty$ auch gegen den Werth 1 convergiren dürfen). Man erkennt dann, ganz analog wie oben, auch umgekehrt, dass die Reihe mit dem allg. Gliede $\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$ stets divergirt, und zwar um so schwächer, je langsamer M_ν mit ν zunimmt.

Haben die Glieder $\bar{\delta}_\nu$ nur die Eigenschaft positiv zu sein und unter einer *beliebigen* positiven Grösse γ zu liegen, so kann man die zuletzt angestellte Betrachtung offenbar auf $\frac{\bar{\delta}_\nu}{\gamma}$ anwenden und erhält auf diese Weise:

$$\bar{\delta}_\nu = \gamma \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}},$$

wobei dann:

$$M_n = M_0 \prod_0^{n-1} {}^{\nu} \left(1 - \frac{\bar{\delta}_\nu}{\gamma}\right)^{-1}$$

zu setzen ist. —

Folgerungen aus den vorangehenden Sätzen. Da ausser der Reihe mit dem Gliede:

$$a_\nu = M_{\nu+1} - M_\nu$$

nach dem bisher Gesagten auch stets die Reihen $\sum \delta_\nu$, $\sum \bar{\delta}_\nu$, wo:

$$\delta_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu} \qquad \bar{\delta}_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$$

$$= \frac{d_\nu}{M_\nu}, \qquad = \frac{d_\nu}{M_{\nu+1}}$$

divergiren, und die Verhältnisse

$$\frac{\delta_\nu}{d_\nu} = \frac{1}{M_\nu}, \qquad \frac{\bar{\delta}_\nu}{d_\nu} = \frac{1}{M_{\nu+1}}$$

für $\nu = \infty$ der Null zustreben; da ausserdem nach Satz I das allg. Glied *jeder* divergenten Reihe sich auf die Form d_ν bringen lässt, so folgt, dass für *jede* divergente Reihe $\sum d_\nu$ solche Reihen

$\sum \delta_\nu$, $\sum \bar{\delta}_\nu$ existiren, welche *schwächer* und zwar, genauer gesagt, *unendlich viel schwächer* divergiren als $\sum d_\nu$.

Setzt man wieder:

$$\sum_0^n d_\nu = S_n,$$

also nach Gl. (4a):

$$M_n = S_{n-1},$$

so kann man das obige Resultat auch folgendermassen aussprechen:

Mit der Reihe $\sum d_\nu$ divergiren stets auch die Reihen:

$$\sum \frac{d_\nu}{S_{\nu-1}} \quad \text{und:} \quad \sum \frac{d_\nu}{S_\nu}.\text{*)}$$

Da man nun aus jeder der beiden letzten Reihen nach demselben Principe, nach welchem dieselben aus $\sum d_\nu$ entstehen, wiederum zwei unendlich viel schwächer divergirende Reihen ableiten kann, u. s. f. — so ist hiermit zugleich ein Mittel gegeben, um — auf Grund der im § 1 gemachten Bemerkung über die Kriterien erster Art — eine unbegrenzte Scala von immer wirksameren Divergenzkriterien erster Art herzustellen.

Für die wirkliche Anwendung zur Prüfung einer beliebig vorgelegten Reihe $\sum a_\nu$ würden aber diese Kriterien — falls die beiden ersten d. h. die mit d_ν und δ_ν (oder $\bar{\delta}_\nu$) gebildeten versagen sollten — kaum brauchbar sein, da die zur Bildung jener successive immer schwächer divergirenden Reihen erforderlichen Summationen im allgemeinen nicht ausführbar sein werden.**)

Die Sätze (I) und (II) liefern aber noch eine andere Methode, um aus $\sum d_\nu$, $\sum \delta_\nu$ schwächer divergirende Reihen abzuleiten —

---

*) Die Divergenz der Reihe $\sum \frac{d_\nu}{S_{\nu-1}}$ hat bekanntlich Abel (Crelle's Journal, Bd. 3, p. 81), diejenige der Reihe $\sum \frac{d_\nu}{S_\nu}$ hat Dini (a. a. O. p. 8) zuerst bewiesen.

**) Diese Schwierigkeit fällt nur bei $\sum_0^{n-1} d_\nu$, $\sum_0^n d_\nu$ weg, da man ja hier:

$$\sum_0^{n-1} d_\nu = M_n \quad \text{bezw.} \quad \sum_0^n d_\nu = M_{\nu+1}$$

willkürlich wählen und daraus umgekehrt d_ν bestimmen kann.

nämlich die Einführung von langsamer zunehmenden Functionen an Stelle des ursprünglich gewählten M_ν. Hier bieten sich nun, wenn man von einem irgendwie fixirten M_ν ausgeht, naturgemäss $M_\nu{}^\varrho$ — wo ϱ positiv und < 1 — und $\lg M_\nu$ als die nächstliegenden und einfachsten dar.

Bildet man nun zunächst:

$$d_{\varrho,\nu} = M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho$$

und vergleicht diesen Ausdruck mit demjenigen für d_ν, so ergiebt sich:

$$\frac{d_{\varrho,\nu}}{d_\nu} = \frac{M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho}{M_{\nu+1} - M_\nu} = \frac{1-q_\nu^\varrho}{1-q_\nu} \cdot \frac{1}{M_{\nu+1}^{1-\varrho}} \quad \text{wo: } q_\nu = \frac{M_\nu}{M_{\nu+1}}.$$

Um dieses Verhältniss für unendlich wachsende ν zu prüfen, bemerke man, dass der Factor

$$\frac{1-q_\nu^\varrho}{1-q_\nu}$$

für jedes ν — auch für $\nu = \infty$ — stets endlich und von Null verschieden bleibt. Dies bedarf keines Beweises, wenn die Beziehung:

$$q_\nu = \frac{M_\nu}{M_{\nu+1}} < 1,$$

welche für jedes endliche ν bestehen muss, auch für $\nu = \infty$ erfüllt bleibt. Ist dagegen für $\nu = \infty$ $\lim q_\nu = 1$ (oder *einer* der etwaigen verschiedenen Werthe von $\lim q_\nu = 1$), so hat man bekanntlich:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1-q_\nu^\varrho}{1-q_\nu} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1-(1-\varepsilon)^\varrho}{\varepsilon} = \varrho.$$

Hieraus folgt, dass für $n = \infty$:

$$d_{\varrho,n} \sim \frac{d_\nu}{M_{\nu+1}^{1-\varrho}}$$

wird, und es leistet somit die Reihe mit dem allg. Gliede $d_{\varrho,\nu}$ für die Bildung von Divergenzkriterien nicht mehr und nicht weniger als diejenige mit dem etwas einfacher aus d_ν hervorgehenden Gliede: $\frac{d_\nu}{M_{\nu+1}^{1-\varrho}}$. Letztere divergirt aber immerhin noch *stärker*, als die bereits zuvor aufgestellte und als divergent erkannte Reihe

$$\sum \bar{\delta}_\nu = \sum \frac{d_\nu}{M_{\nu+1}},$$

und es zeigt sich daher, dass man aus $\sum d_\nu$ durch Einführung von M_ν^ϱ an Stelle von M_ν, wie klein man auch die positive Grösse ϱ nehmen mag, niemals eine Reihe erzeugen kann, welche die bereits

als divergent erkannte Reihe $\sum \frac{d_\nu'}{M_{\nu+1}}$ an Langsamkeit der Divergenz auch nur erreicht, geschweige denn übertrifft.

Betrachtet man aber zweitens die Substitution von $\lg M_\nu$ an Stelle von M_ν und setzt etwa:

$$d_\nu' = \lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu,$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Formel (d) des § 2 unmittelbar die Beziehung:

$$\bar{\delta}_\nu \leqq d_\nu' \leqq \delta_\nu$$

und man erkennt auf diese Weise, dass $\sum d_\nu'$ in Bezug auf Schnelligkeit der Divergenz die Mitte hält zwischen $\sum \bar{\delta}_\nu$ und $\sum \delta_\nu$.

Ist nun insbesondere M_ν so beschaffen, dass:

$$M_{n+1} \cong M_n,$$

(ein Fall, der, wie sich später zeigen wird, bei der Bildung von Divergenz- und Convergenzkriterien hauptsächlich in Betracht kommt), so wird für $n = \infty$ auch:

$$\bar{\delta}_n \cong d_n' \cong \delta_n,$$

d. h. es bringt in diesem Falle die Substitution von $\lg M_\nu$ an Stelle von M_ν in Bezug auf Verlangsamung der Convergenz dieselbe Wirkung hervor, wie der Uebergang von d_ν zu

$$\delta_\nu = \frac{d_\nu}{S_{\nu-1}} \quad \text{oder zu} \quad \bar{\delta}_\nu = \frac{d_\nu}{S_\nu}.$$

Wendet man jetzt denselben Substitutionsprocess auf den Term

$$\delta_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}$$

an und bezeichnet den resultirenden Ausdruck mit δ_ν', so ergiebt sich mit Anwendung der ersten Ungleichung (d) des § 2:

$$\delta_\nu' = \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{\lg M_\nu} \leqq \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg M_\nu}.$$

Mithin divergirt auch die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(9) \qquad \delta_\nu^{(1)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg M_\nu} = \frac{\delta_\nu}{\lg M_\nu} = \frac{d_\nu}{L_1(M_\nu)}$$

(wegen: $\delta_\nu^{(1)} \geqq \delta_\nu'$) — und zwar, wie man unmittelbar erkennt, unendlich viel schwächer als $\sum \delta_\nu$.*) Und wenn man in $\delta_\nu^{(1)}$ wieder M_ν durch $\lg M_\nu$ ersetzt, wodurch:

*) Es verdient bemerkt zu werden, dass der aus:

$$\bar{\delta}_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$$

$$\delta_\nu'' = \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{\lg M_\nu \lg_2 M_\nu} \leqq \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg M_\nu \lg_2 M_\nu}$$

als allgemeines Glied einer noch schwächer divergirenden Reihe sich ergiebt, so erkennt man, dass auch die Reihe mit dem allg. Gliede:

$$\delta_\nu^{(2)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg M_\nu \lg_2 M_\nu} = \frac{\delta_\nu^{(1)}}{L_2 M_\nu}$$

divergirt, und zwar unendlich viel schwächer als $\sum \delta_\nu^{(1)}$.

Schliesst man in dieser Weise weiter fort, so ergiebt sich allgemein, dass die Reihe mit dem allg. Gliede:

(10) $$\delta_\nu^{(\varkappa)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_\nu)} = \frac{d_\nu}{L_\varkappa(M_\nu)}$$

$$\left(\text{wo: } M_\nu = \sum_0^{\nu-1} d_\lambda \quad \text{nach Gl. (4a)}\right)$$

stets *divergirt*, und dass man eine unbegrenzte Scala von beständig schwächer convergirenden Reihen erhält, wenn man der Reihe nach $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ setzt.

---

nach Analogie von $\delta_\nu^{(1)}$ gebildete Term:

$$\bar{\delta}_\nu^{(1)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \lg M_{\nu+1}}$$

nicht immer eine divergirende Reihe zu liefern braucht. Denn, wenn selbstverständlich auch diejenige Reihe wieder divergirt, welche aus $\bar{\delta}_\nu$ durch Substitution von $\lg M_\nu$ für M_ν entsteht, also die mit dem allg. Gliede:

$$\bar{\delta}_\nu' = \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{\lg M_{\nu+1}},$$

so folgt durch Anwendung der *ersten* Ungl. (d) des § 2 nur soviel, dass die Reihe mit dem allg. Gliede:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg M_{\nu+1}} = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} \cdot \bar{\delta}_\nu^{(1)}$$

sicher divergirt. Dagegen ist ein analoger Schluss für die Reihe der $\bar{\delta}_\nu^{(1)}$ *nicht* möglich, weil ja nach der zweiten Ungl. (d):

$$\bar{\delta}_\nu^{(1)} \leqq \bar{\delta}_\nu'.$$

In der That wird die Reihe $\Sigma \bar{\delta}_\nu^{(1)}$ wegen:

$$\bar{\delta}_\nu^{(1)} = \left(1 - \frac{M_\nu}{M_{\nu+1}}\right) \frac{1}{\lg M_{\nu+1}} < \frac{1}{\lg M_{\nu+1}}$$

sicher *con*vergiren, sobald $\sum \frac{1}{\lg M_{\nu+1}}$ convergirt, also z. B. wenn

$$M_\nu \geqq c^{\nu^p}, \quad \text{wo } p > 1.$$

§ 4.

Typische Formen der convergenten Reihen.

Definition. Eine *convergente* Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu = s$ heisst um so *schwächer* convergent, je *langsamer* $\sum_0^n {}^\nu c_\nu = s_n$ mit unbegrenzt wachsendem n sich der Grenze s, d. h. je langsamer die Differenz $(s - s_n) = \sum_{n+1}^\infty c_\nu$ gegen Null convergirt, wenn n in's Unendliche wächst. Von zwei convergirenden Reihen $\sum c_\nu$, $\sum c_\nu'$ wird also die erstere *schwächer convergiren*, als die zweite, wenn:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s - s_n}{s' - s_n'} > 1$$

$$\left(\text{wo } s' - s_n' = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu' - \sum_0^n {}^\nu c_\nu' = \sum_{n+1}^\infty {}^\nu c_\nu'\right)$$

ist. Hierfür ist offenbar *hinreichend* (aber nicht nothwendig), dass von einer bestimmten Stelle ν ab beständig

$$\frac{c_\nu}{c_\nu'} > 1$$

bleibt. —

Lehrsatz III. *Das allgemeine Glied jeder convergenten Reihe lässt sich stets, und zwar nur auf eine einzige Weise in die Form setzen:*

$$c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu}. \tag{11}$$

Umgekehrt ist die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu}$$

stets convergent, und zwar um so schwächer, je langsamer M_ν mit ν in's Unendliche wächst.

Beweis: Aus Gl. (11) hat man zur Bestimmung von M_ν die Recursionsformel:

$$M_{\nu+1}^{-1} = M_\nu^{-1} - c_\nu,$$

woraus durch Substitution von $\nu = 0, 1, \ldots (n-1)$ und Addition folgt:

$$M_n^{-1} = M_0^{-1} - \sum_0^{n-1} {}^\nu c_\nu.$$

Die noch fragliche Constante bestimmt sich hier vollkommen eindeutig durch die Bedingung, dass M_n^{-1} für $n = \infty$ verschwinden soll, so dass also:

$$0 = M_0^{-1} - \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu$$

und daher schliesslich:

$$M_n^{-1} = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu - \sum_0^{n-1} {}^\nu c_\nu = \sum_n^\infty {}^\nu c_\nu \tag{12}$$

d. h. M_n besitzt in der That die verlangten Eigenschaften.

Umgekehrt hat man:

$$\sum_0^{n-1} {}^\nu \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu} = \sum_0^{n-1} {}^\nu (M_\nu^{-1} - M_{\nu+1}^{-1}) = M_0^{-1} - M_n^{-1}$$

woraus sich — wegen $\lim M_n = \infty$ ergiebt, dass diese Reihe stets convergirt, und zwar um so *schwächer*, je *langsamer* M_n mit n in's Unendliche wächst.

Ein Analogon zu dem Lehrsatze III, welcher zu jeder divergenten Reihe eine unendlich viel schwächer divergirende finden lehrte, existirt hier zunächst nicht. Versucht man nämlich mit Benützung desselben Grundgedankens, welcher zu Satz II geführt hat, d. h. aus der Betrachtung der unendlichen Producte $\prod (1 \pm c_\nu)^{\pm 1}$ typische Formen für c_ν abzuleiten, so ergeben sich die Ausdrücke:

$$c_\nu' = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu(M_{\nu+1} \pm 1)} \quad \text{und} \quad c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}(M_\nu \pm 1)}$$

welche — wie die Vergleichung mit (11) zeigt — für den hier vorliegenden Zweck nichts Neues bieten, da die betreffenden Reihen nicht stärker und nicht schwächer convergiren, als diejenige mit dem Gliede $\dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu}$.

Um also hier von einer Reihe $\sum c_\nu$ zu irgend einer schwächer convergirenden zu gelangen, ist man auf die Einführung langsamer zunehmender Functionen an Stelle von M_ν angewiesen. Ich substituire nun zunächst wieder M_ν^ϱ ($\varrho > 0$) für M_ν und setze:

$$c_{\varrho,\nu} = \frac{M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho}{M_{\nu+1}^\varrho M_\nu^\varrho},$$

so wird, für $\varrho < 1$, $\sum c_{\varrho,\nu}$ schwächer convergiren, als $\sum c_\nu$.

Wendet man jetzt auf den Ausdruck $c_{\varrho,\nu}$ dieselbe Umformung an, wie auf den oben mit $d_{\varrho,\nu}$ bezeichneten, so ergiebt sich

$$c_{\varrho,\nu} = \frac{M_{\nu+1}^{\varrho} - M_{\nu}^{\varrho}}{M_{\nu+1} - M_{\nu}} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_{\nu}}{M_{\nu+1}^{\varrho} \cdot M_{\nu}^{\varrho}}$$

$$= \frac{1 - q_{\nu}^{\varrho}}{1 - q_{\nu}} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_{\nu}}{M_{\nu+1} \cdot M_{\nu}^{\varrho}} \quad \left(\text{wo } q_{\nu} = \frac{M_{\nu}}{M_{\nu+1}}\right)$$

und da der erste Factor der rechten Seite, wie oben bemerkt, stets *endlich* und *von Null verschieden* bleibt, so folgt, dass die Reihe mit dem allg. Gliede:

$$k_{\varrho,\nu} = \frac{M_{\nu+1} - M_{\nu}}{M_{\nu+1} M_{\nu}^{\varrho}}$$

gleichfalls convergirt, und dass für $n = \infty$

$$c_{\varrho,n} \sim k_{\varrho,n}$$

wird, d. h. es leistet der etwas einfacher aus c_{ν} abzuleitende Term $k_{\varrho,\nu}$ für die Aufstellung von Kriterien erster Art genau dasselbe, wie der mühsamer zu berechnende $c_{\varrho,\nu}$. Da im übrigen $\sum c_{\varrho,\nu}$ nach Satz III um so schwächer convergirt, je langsamer M_{ν}^{ϱ} mit ν zunimmt, so erhält man den folgenden, für die gesammte Convergenztheorie äusserst wichtigen Satz:

Lehrsatz IV. *Die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:*

$$k_{\varrho,\nu} = \frac{M_{\nu+1} - M_{\nu}}{M_{\nu+1} M_{\nu}^{\varrho}} \tag{13}$$

convergirt für jeden positiven Werth von ϱ, *und zwar um so schwächer, je langsamer* M_{ν}^{ϱ} *mit* ν *in's Unendliche wächst.*

Vergleicht man den Ausdruck $k_{\varrho,\nu}$ einerseits mit dem Term c_{ν} des Satzes III — nämlich:

$$k_{\varrho,\nu} = M_{\nu}^{1-\varrho} \cdot c_{\nu}, \quad \text{wobei nach Gl. (12):} \quad M_{\nu} = \left(\sum_{\nu}^{\infty} c_{\lambda}\right)^{-1},$$

andererseits mit dem Ausdrucke $\bar{\delta}_{\nu}$ des Satzes I (s. Zusatz, Gl. (8)), nämlich:

$$k_{\varrho,\nu} = \frac{\bar{\delta}_{\nu}}{M_{\nu}^{\varrho}}, \quad \text{wobei nach Gl. (7):} \quad M_{\nu} = \prod_{0}^{\nu-1}{}_{\lambda} (1 - \bar{\delta}_{\lambda})^{-1},$$

so ergeben sich für den Lehrsatz IV noch die folgenden beiden Fassungen:

Lehrsatz IVa. *Ist c_ν das Glied einer beliebigen convergenten Reihe, so convergirt für $\varrho > 0$ auch stets die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:*

$$k_{\varrho,\nu} = M_\nu^{1-\varrho} c_\nu, \quad wo \quad M_\nu = \left(\sum_\nu^\infty {}^\lambda c_\lambda\right)^{-1},$$

d. h. wenn man speciell $\varrho < 1$, also $1 - \varrho > 0$ nimmt: — wie schwach auch $\sum c_\nu$ convergiren möge, so giebt es stets Reihen, welche unendlich viel schwächer convergiren.

Lehrsatz IVb. *Ist $\bar{\delta}_\nu$ das allgemeine Glied einer beliebigen divergenten Reihe, deren Glieder durchweg unter der Einheit liegen (bezw. für $\nu = \infty$ dieselbe auch erreichen dürfen), so convergirt stets die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:*

$$k_{\varrho,\nu} = \frac{\bar{\delta}_\nu}{M_\nu^\varrho}, \quad wo \quad M_\nu = \prod_0^{\nu-1} {}^\lambda (1 - \bar{\delta}_\nu)^{-1},$$

wie klein auch die positive Zahl ϱ gewählt werden mag, und zwar um so schwächer (bei festgehaltenem ϱ), je schwächer $\sum \bar{\delta}_\nu$ divergirt.

Zusatz I. Da der Ausdruck:

$$c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu}$$

als ein specieller Fall von:

$$k_{\varrho,\nu} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho M_\nu}$$

erscheint — nämlich $c_\nu = k_{1,\nu}$ — so folgt, dass in der Form $\sum k_{\varrho,\nu}$ sicher *alle* überhaupt existirenden convergenten Reihen enthalten sind. Während aber unter den Reihen der Form $\sum c_\nu = \sum k_{1,\nu}$ *jede* convergente Reihe *ein*mal und *nur ein*mal vorkommt, muss die Form $\sum k_{\varrho,\nu}$ wegen der Willkürlichkeit des positiven Exponenten ϱ die *nämliche* Reihe *unendlich oft* erzeugen. Damit soll indessen nicht gesagt sein, dass man nach willkürlicher Festsetzung eines von 1 verschiedenen positiven Werthes ϱ für das Glied c_ν jeder beliebig vorgelegten convergenten Reihe nun auch wirklich die entsprechende Form $k_{\varrho,\nu}$ (mit

jenem speciell fixirten Werthe ϱ) hinschreiben kann. Versucht man nämlich, wie früher, M_ν jetzt aus der Recursionsformel:

$$c_\nu = k_{\varrho,\nu} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\varrho}$$

zu bestimmen, so wird der Endausdruck für M_ν nicht nur äusserst complicirt, sondern er hängt insbesondere von dem hier — wie stets — willkürlich bleibenden Anfangswerthe M_0 in so verwickelter Weise ab, dass nicht recht ersichtlich ist, ob *überhaupt* resp. *für welche Wahl von* M_0 der resultirende Ausdruck M_ν die verlangte Eigenschaft besitzt stets mit ν monoton ins Unendliche zu wachsen.

Dagegen lässt sich folgendes aussagen. Da man vermöge der Substitution $M_\nu = \mathsf{M}_\nu^\varrho$ — wo $\mathsf{M}_\nu = M_\nu^{\frac{1}{\varrho}}$ für $\varrho > 0$ eine Function vom Charakter M_ν — das allg. Glied c_ν *jeder* convergenten Reihe in die Form setzen kann:

$$c_\nu = \frac{\mathsf{M}_{\nu+1}^\varrho - \mathsf{M}_\nu^\varrho}{\mathsf{M}_{\nu+1}^\varrho \mathsf{M}_\nu^\varrho}$$

(wo ϱ beliebig vorgeschrieben werden darf), so wird wiederum der Ausdruck:

$$k_{\varrho,\nu} = \frac{\mathsf{M}_{\nu+1} - \mathsf{M}_\nu}{\mathsf{M}_{\nu+1} \mathsf{M}_\nu^\varrho} = \frac{1 - q_\nu}{1 - q_\nu^\varrho}\, c_\nu \qquad \left(q_\nu = \frac{\mathsf{M}_\nu}{\mathsf{M}_{\nu+1}}\right)$$

in Folge der Endlichkeit des Factors $\dfrac{1 - q_\nu}{1 - q_\nu^\varrho}$ die Eigenschaft besitzen, dass für $n = \infty$

$$c_n \sim k_{\varrho,n}$$

wird. Es entspricht somit dem allgemeinen Gliede c_ν *jeder* beliebigen convergenten Reihe bei beliebig vorgeschriebenem positivem ϱ stets auch ein Term der Form $k_{\varrho,\nu}$, welcher bei der Aufstellung von Kriterien erster Art dasselbe leistet, wie c_ν selbst.

Zusatz II. Ausser der Reihe mit dem Gliede

$$(13) \qquad k_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\varrho} \qquad (\varrho > 0)$$

(wobei ich jetzt der Einfachheit halber k_ν statt $k_{\varrho,\nu}$ schreibe) convergirt offenbar stets auch die Reihe mit dem Gliede:

$$(14) \qquad \bar{k}_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^{1+\varrho}} = \left(\frac{M_\nu}{M_{\nu+1}}\right)^\varrho k_\nu.$$

Dagegen werden die Terme:

(15) $$\bar{l}_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^\varrho M_\nu} = \left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^{1-\varrho} k_\nu,$$

(16) $$l_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu^{1+\varrho}} = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} \cdot k_\nu$$

für *jedes* positive ϱ nur dann sicher convergente Reihen liefern, wenn $\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}$ stets unter einer endlichen Grenze bleibt*), wenn also:

$$M_{n+1} \sim M_n,$$

in welchem Falle dann offenbar auch:

$$k_n \sim \bar{k}_n \sim \bar{l}_n \sim l_n$$

wird.

Um nun wiederum aus diesen Reihen noch schwächer convergirende abzuleiten, wird man jetzt für M_ν solche Functionen einzuführen haben, welche noch langsamer zunehmen, als M_ν^ϱ für jedes noch so kleine positive ϱ — also am einfachsten zunächst wieder $\lg M_\nu$. Wendet man diese Substitution zunächst auf $\bar{k}_\nu$ an und setzt:

$$\bar{k}'_\nu = \frac{\lg M_{\nu+1} - \lg M_\nu}{(\lg M_{\nu+1})^{1+\varrho}},$$

so lehrt die zweite Ungleichung (d) des § 2, dass die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

---

*) Diese Bedingung ist eine hinreichende, keine nothwendige. Man überzeugt sich nämlich leicht direct, dass die beiden fraglichen Reihen noch convergent bleiben, wenn man setzt:

$$M_\nu = a^{\nu^p} \quad (a > 1,\ p > 1),$$

obschon in diesem Falle

$$\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} = a^{(\nu+1)^p - \nu^p} > a^{p\nu^{p-1}}$$

mit ν ins Unendliche wächst. Hingegen wird bei schnellerer Zunahme von M_ν — z. B. für:

$$M_\nu = a^{p^\nu} \quad (a > 1,\ p > 1)$$

die Reihe Σl_ν divergent, wenn $\varrho \leqq p - 1$,

und die Reihe $\Sigma \bar{l}_\nu$, wenn $\varrho \leqq \frac{p-1}{p}$.

Obschon sich also die im Texte für die Convergenz von Σl_ν, $\Sigma \bar{l}_\nu$ angegebene Bedingung als erweiterungsfähig erweist, so erscheint diese Erweiterung doch zu unwesentlich, als dass sie die damit verbundene grössere Complication der betreffenden Bedingung aufwöge — weshalb ich es denn vorziehe, im Folgenden jene engere, aber sehr einfache Form der Bedingung:

$$M_{n+1} \sim M_n$$

beizubehalten.

$$\bar{k}_\nu^{(1)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}\,(\lg M_{\nu+1})^{1+\varrho}} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_1(M_{\nu+1})\,\lg^\varrho M_{\nu+1}}$$

gleichfalls convergirt (da $k_\nu^{(1)} \leqq \bar{k}_\nu$) und zwar wegen:

$$(\lg M_{n+1})^{1+\varrho} \prec M_{n+1}^\varrho$$

unendlich viel schwächer, als $\sum \bar{k}_\nu$.*)

Ersetzt man dann wieder in $\bar{k}_\nu^{(1)}$ M_ν durch $\lg M_\nu$, so gelangt man wieder unter Anwendung der zweiten Ungleichung (d) zu dem Ausdruck:

$$\bar{k}_\nu^{(2)} = \frac{M_{\nu-1} - M_\nu}{L_2(M_{\nu+1})\,\lg_2^\varrho M_{\nu+1}}$$

als dem allg. Gliede einer noch schwächer convergirenden Reihe. Und es ergiebt sich, wenn man in dieser Weise weiter fort schliesst, dass die Reihe mit dem allg. Gliede:

$$\text{(17 a)} \qquad \bar{k}_\nu^{(\varkappa)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_{\nu+1})\,\lg_\varkappa^\varrho M_{\nu+1}} \qquad (\varrho > 0)$$

convergirt, und dass man eine Skala von beständig schwächer convergirenden Reihen erhält, wenn man der Reihe nach $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ setzt.

Genügt nun M_ν wiederum der Bedingung

$$M_{n+1} \sim M_n \qquad (\text{also } \lg_\varkappa M_{n+1} \cong \lg_n M_n \text{ für } \varkappa \geqq 1),$$

so bilden offenbar auch die Reihen mit dem allg. Gliede:

$$\text{(17 b)} \qquad l_\nu^{(\varkappa)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_\nu)\,\lg_\varkappa^\varrho M_\nu} \qquad (\varrho > 0)$$

für $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$, eine solche Skala von beständig schwächer convergirenden Reihen. Dieselben gehen für $\varrho = 0$ in die früher (§ 3, Gl. (10)) aufgestellte Skala divergenter Reihen über, und sie divergiren also um so mehr für $\varrho < 0$.

---

*) Das gleiche Verfahren würde aus:

$$k_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}\,M_\nu^\varrho}$$

den Term:

$$k_\nu^{(1)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_1(M_{\nu+1})\,\lg^\varrho M_\nu}$$

erzeugt haben: indessen kann alsdann $\Sigma k_\nu^{(1)}$ *stärker* convergiren, als Σk_ν, nämlich dann, wenn M_ν so rasch zunimmt, dass von irgend einer Stelle ν ab:

$$\lg M_{\nu+1} \geqq M_\nu^\varrho$$

ist.

Setzt man den Anfangsterm der Skala (17b) — d. h. den für $\varkappa = 0$ resultirenden — in die Form:

$$l_\nu^{(0)} = l_\nu = \frac{\delta_\nu}{M_\nu^\varrho},$$

wo:

$$\delta_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu} = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} - 1,$$

so sagt die getroffene Festsetzung:

$$M_{n+1} \sim M_n$$

bezüglich der δ_ν nicht mehr und nicht weniger aus, als dass δ_ν stets unter einer endlichen Grenze bleiben soll. Da ausserdem $\sum \delta_\nu$ um so schwächer *di*vergirt, je langsamer M_ν zunimmt, und alsdann auch $\sum l_\nu$ um so schwächer *con*vergirt, so ergiebt sich an Stelle des Satzes IVb der folgende etwas allgemeinere:

Lehrsatz V. *Ist $\sum \delta_\nu$ eine divergente Reihe, deren Glieder nicht ins Unendliche wachsen, so convergirt die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:*

$$l_\nu = \frac{\delta_\nu}{M_\nu^\varrho}, \quad wo: \quad M_\nu = \prod_{0}^{\nu-1}{}^{\lambda} (1 + \delta_\lambda) \quad \text{(nach Gl. (6a))}$$

für jedes noch so kleine positive ϱ, und zwar — bei festgehaltenem ϱ — um so schwächer, je schwächer $\sum \delta_\nu$ divergirt. — Für $\varrho \leqq 0$ ist $\sum l_\nu$ divergent.

Durch die Sätze IVb und V ist zwischen den allgemeinen Formen der divergenten und der convergenten Reihen ein Zusammenhang hergestellt, welcher bereits gestatten würde *alle* bekannten elementaren Divergenz- und Convergenzkriterien aus einer gemeinsamen Quelle herzuleiten und noch erheblich zu verallgemeinern. Da aber die in jenen Sätzen auftretenden Glieder divergenter Reihen: $\bar{\delta}_\nu$, δ_ν noch den dort näher bezeichneten Einschränkungen zu genügen haben, so will ich, voller Allgemeinheit zu Liebe, noch einen Satz beweisen, der eine ähnliche Beziehung liefert zwischen divergenten Reihen *ohne* alle Einschränkung und gewissen daraus abgeleiteten convergenten Reihen, nämlich:

Lehrsatz VI. *Bedeutet $d_\nu = M_{\nu+1} - M_\nu$ das allgemeine Glied einer ganz beliebigen divergenten Reihe, so convergirt die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:*

(18) $$h_{\varrho,\nu} = \frac{d_\nu}{e^{\varrho M_{\nu+1}}}, \quad wo: \quad M_{\nu+1} = \sum_0^\nu{}^\lambda d_\lambda \quad \text{(nach Gl. (4a))}$$

für jedes noch so kleine positive ϱ, *und zwar — bei festgehaltenem* ϱ *— um so schwächer, je schwächer* $\sum \delta_\nu$ *divergirt; sie divergirt offenbar für* $\varrho \leqq 0$.

Beweis. Es ist:

$$h_{\varrho,\nu} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{e^{\varrho M_{\nu+1}}} < \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{1 + \varrho M_{\nu+1} + \frac{1}{2}\varrho^2 M_{\nu+1}^2}$$
$$< \frac{2}{\varrho^2} \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^2},$$

woraus nach Satz IV (Zusatz II, Gl. (14)) die Convergenz von $\sum h_{\varrho,\nu}$ hervorgeht.

Um die Abnahme der Glieder $h_{\varrho,\nu}$ mit derjenigen der früher mit $k_{\varrho,\nu}$ bezeichneten Terme (Gl. (13)) zu vergleichen, setze man:

$$M_\nu = \lg \mathsf{M}_\nu$$

also:

$$h_{\varrho,\nu} = \frac{\lg \mathsf{M}_{\nu+1} - \lg \mathsf{M}_\nu}{\mathsf{M}_{\nu+1}^\varrho}.$$

Alsdann ergiebt sich mit Beziehung der Ungleichungen (d) des § 2:

$$\frac{\mathsf{M}_{\nu+1} - \mathsf{M}_\nu}{\mathsf{M}_{\nu+1}^{1+\varrho}} \leqq h_{\varrho,\nu} \leqq \frac{\mathsf{M}_{\nu+1} - \mathsf{M}_\nu}{\mathsf{M}_\nu \mathsf{M}_{\nu+1}^\varrho}$$

oder wenn man jetzt wiederum

$$\frac{\mathsf{M}_{\nu+1} - \mathsf{M}_\nu}{\mathsf{M}_{\nu+1} \mathsf{M}_\nu^\varrho} = k_{\varrho,\nu}$$

setzt:

$$\left(\frac{\mathsf{M}_\nu}{\mathsf{M}_{\nu+1}}\right)^\varrho k_{\varrho,\nu} \leqq h_{\varrho,\nu} \leqq \left(\frac{\mathsf{M}_{\nu+1}}{\mathsf{M}_\nu}\right)^{1-\varrho} k_{\varrho,\nu}.$$

Hieraus folgt, dass für den Fall:

$$\mathsf{M}_{\nu+1} \sim \mathsf{M}_n$$

auch:

$$h_{\varrho,n} \sim k_{\varrho,n}$$

wird; d. h. es existirt dann zu jeder beliebigen Reihe $\sum k_{\varrho,\nu}$ und somit — nach Satz IV, Zusatz I — zu jeder Reihe $\sum c_\nu$ eine Reihe von der hier betrachteten Form $\sum h_{\varrho,\nu}$, welche bei der Aufstellung von Convergenzkriterien jene ersetzen kann.

Zugleich erkennt man aus dieser Beziehung, dass $\sum h_{\varrho,\nu}$ um so schwächer convergirt, je langsamer $\mathsf{M}_\nu^\varrho = e^{\varrho M_\nu}$ — also bei festgehaltenem ϱ — je langsamer M_ν zunimmt.

Ist die Bedingung $\mathsf{M}_{n+1} \backsim \mathsf{M}_n$ *nicht* erfüllt, so zeigt die Ungleichung

$$h_{\varrho,\nu} < \frac{2}{\varrho^2} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^2} < \frac{2}{\varrho^2} c_\nu$$

in Verbindung mit Lehrsatz III, dass man durch hinlänglich starke Zunahme von M auch jede beliebig starke Convergenz erzeugen kann. —

Zusatz. Ist $M_{n+1} \backsim M_n$, so convergirt offenbar auch die Reihe mit dem Gliede:

$$(19) \qquad \bar{h}_{\varrho,\nu} = \frac{d_\nu}{e^{\varrho M_\nu}}$$

für $\varrho > 0$, und zwar — bei constantem ϱ — gleichfalls um so schwächer, je schwächer $\sum d_\nu$ divergirt

§ 5.

Die Kriterien erster Art.

Da sich das allg. Glied *jeder* divergenten bezw. convergenten Reihe auf die Form:

$$\delta_\nu = \frac{1}{\Delta_\nu} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu} \quad \text{bezw.} \quad c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu}$$

bringen lässt, so ist man sicher *alle überhaupt existirenden Kriterien erster Art* zu erhalten, wenn man bildet:

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \lim \dfrac{M_n}{M_{n+1} - M_n} \cdot a_{n+p} = \lim \Delta_n \cdot a_{n+p} \geqq g > 0: & \textit{Divergenz}, \\ \lim \dfrac{M_{n+1} M_n}{M_{n+1} - M_n} \, a_{n+p} = \lim \Delta_n \cdot M_{n+1} \cdot a_{n+p} \leqq G < \infty: & \textit{Convergenz} \end{cases}$$

wobei es offenbar noch freisteht, die linke Seite mit einem beliebigen positiven, für jedes n endlich bleibenden und von Null verschiedenen Factor zu multipliciren, bezw. alle Factoren, welche diese Eigenschaft besitzen, ohne weiteres wegzulassen.

Man erhält indessen Kriterien von etwas bequemerer Form, wenn man die Fälle stärkster Divergenz und Convergenz bei den zur Bildung dieser Kriterien benützten typischen Reihenformen von vornherein ausschliesst, wodurch offenbar auch nur solche Kriterien verloren gehen, welche lediglich zur Prüfung von Reihen mit mindestens ebenso starker Divergenz bezw. Convergenz dienen könnten.

Zieht man z. B. von den divergenten Reihen nur diejenigen zur Vergleichung herbei, deren Glieder durchweg unter der Einheit liegen (event. im Unendlichen auch gegen die Einheit convergiren dürfen) und demgemäss — nach Satz II, Zusatz — sich stets in die Form setzen lassen:

$$\bar{\delta}_\nu = \frac{1}{\bar{\Delta}_\nu} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$$

und führt man ausserdem für die convergenten Reihen den Typus des Satzes IV ein — nämlich:

$$k_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\varrho} \quad (\varrho > 0)$$

welcher, wie dort bemerkt, *alle* convergenten Reihen umfasst*), so ergeben sich die folgenden paarweise correspondirenden Kriterien:

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \lim \dfrac{M_{n+1}}{M_{n+1} - M_n} \cdot a_{n+p} = \lim \bar{\Delta}_n \cdot a_{n+p} > g: & \textit{Divergenz}, \\[2ex] \lim \dfrac{M_{n+1} M_n^\varrho}{M_{n+1} - M_n} \cdot a_{n+p} = \lim \bar{\Delta}_n \cdot M_n^\varrho\, a_{n+p} < G: & \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Die Grössen M_ν sind keiner anderen Beschränkung unterworfen, als positiv zu sein und mit ν monoton ins Unendliche zu wachsen. Dabei werden, nach dem früher gesagten, die obigen Kriterien um so wirksamer, je langsamer die M_ν mit ν zunehmen, weil ja dann die betreffenden zur Vergleichung hervorgegangenen Reihen um so schwächer divergiren bezw. convergiren. Man kann also, von einem irgendwie fixirten M_ν ausgehend, durch Substitution von immer langsamer zunehmenden Functionen an Stelle von M_ν eine unbegrenzte Schaar von immer wirksameren, und ebenso durch Einführung von immer schneller wachsenden Functionen eine solche von beständig sich verschlechternden Kriterien aufstellen. Da es nun aber weder theoretisch, noch practisch ein sonderliches Interesse bietet, jene Kriterien nach der Seite der Verschlechterung hin ins Unbesimmte zu verfolgen, vielmehr die Aufstellung von *schwächeren* Kriterien eigentlich nur dann einen

---

*) Die analoge Einführung von

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\varrho} \quad (\text{wo: } \varrho \leqq 0) \text{ statt } \bar{\delta}_\nu$$

würde, wie unmittelbar zu ersehen, *keine* Verbesserung des Divergenzkriteriums ergeben, da der Fall $\varrho = 0$ — d. h. die Wahl $\bar{\delta}_\nu$ — die günstigste Form der betr. Bedingung liefert.

Dagegen stellt das *Con*vergenzkriterium (B) eine merkliche Verbesserung des in (A) enthaltenen dar, da der Exponent ϱ beliebig klein gewählt werden darf.

Sinn hat, wenn sich dieselben von den *wirksameren* wesentlich *durch grössere Einfachheit* auszeichnen, so scheint es angezeigt, M_ν in Bezug auf die Schnelligkeit des Zunehmens von vornherein einer passenden Beschränkung zu unterwerfen, welche lediglich so zu wählen sein wird, *dass die resultirenden Anfangskriterien möglichst einfach ausfallen.* Dies wird nun aber thatsächlich erzielt, wenn man die früher schon mehrfach benutzte Bedingung

$$M_{n+1} \sim M_n$$

einführt, welche also die Zunahme der M_ν in der Weise einschränkt, dass $\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}$ stets unter einer endlichen Grenze bleibt.

Der Verlust an Kriterien, welcher aus dieser Beschränkung resultirt, ist in der That ohne Belang. Bedient man sich nämlich für die zur Vergleichung herangezogenen divergenten Reihen wieder der Form:

$$\delta_\nu = \Delta_\nu^{-1} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu} = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} - 1,$$

so werden vermöge der genannten Bedingung offenbar nur diejenigen Reihen $\sum \delta_\nu$ ausgeschlossen, deren Glieder sämmtlich oder theilweise mit ν ins Unendliche wachsen, und — wie leicht zu sehen*) — von den convergenten Reihen mit dem allg. Gliede $\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\varrho}$ nur diejenigen, welche noch *stärker* convergiren, als eine geometrische Progression.

Da man dann noch — wegen $M_{n+1} \sim M_n$ — in dem Convergenzkriterium den Factor $M_{n+1} M_n^\varrho$ ohne weiteres durch $M_n^{1+\varrho}$ ersetzen kann, so erhält man jetzt *ein zusammengehöriges Paar correspondirender Kriterien* von folgender Form:

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \lim \dfrac{M_n}{M_{n+1} - M_n} \cdot a_{n+p} = \lim \Delta_n \cdot a_{n+p} > g: \textit{ Divergenz}, \\[2ex] \lim \dfrac{M_n^{1+\varrho}}{M_{n+1} - M_n} \cdot a_{n+p} = \lim \Delta_n M_n^\varrho a_{n+p} < G: \textit{ Convergenz.}^{**}) \end{cases}$$

---

*) Setzt man nämlich: $M_\nu = a^\nu$ $(a > 1)$, wobei dann $\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} = a$ der fraglichen Bedingung genügt, so wird:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\varrho} = \frac{a-1}{a} \left(\frac{1}{a^\varrho}\right)^\nu$$

also das Glied einer geometrischen Progression.

**) Will man M_n durch die Δ_ν ausdrücken, so ergiebt sich nach Gl. (6a):

$$M_\nu = \prod_0^{n-1} {}_\nu \frac{1 + \Delta_\nu}{\Delta_\nu}.$$

Um hieraus durch Einsetzen immer langsamer zunehmender Functionen M_ν eine Skala von immer wirksameren Kriterien abzuleiten, wird man etwa auf Grund der Betrachtungen von §§ 3 und 4 M_ν successive ersetzen durch $\lg M_\nu$, $\lg_2 M_\nu, \ldots, \lg_\varkappa M_\nu$, und erhält auf diese Weise mit Benützung der Formel (g) des § 2 — nach welcher unter der Voraussetzung $M_{n+1} \sim M_n$:

$$\lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n \sim \frac{M_{n+1} - M_n}{L_{\varkappa-1}(M_n)}$$

wird — die folgende Skala von Kriterien:

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \lim \dfrac{L_\varkappa(M_n)}{M_{n+1} - M_n} \cdot a_{n+p} > g: & \textit{Divergenz} \\[2ex] \lim \dfrac{L_\varkappa(M_n) \lg_\varkappa^\varrho M_n}{M_{n+1} - M_n}\, a_{n+p} < G: & \textit{Convergenz} \end{cases} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, \varrho > 0)$$

welche für $\varkappa = 0$ — in Folge der früher getroffenen Festsetzung, dass $L_0(x) = \lg_0 x$ die Bedeutung von x haben soll — auch die Anfangskriterien (C) als besonderen Fall in sich enthält.

Für die specielle Wahl $M_\nu = \nu$ nehmen die Kriterien (D) die bekannte Form*) an:

$$(\mathrm{D}') \quad \begin{cases} \lim L_\varkappa(n) \cdot a_{n+p} > g: & \textit{Divergenz}, \\ \lim L_\varkappa(n) \lg_\varkappa^\varrho n \cdot a_{n+p} < G: & \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Zur Herstellung von *disjunctiven Doppelkriterien* an Stelle der bisherigen Kriterien*paare* bediene ich mich der Methode, welche im § 1 (s. Gl. Ia) angegeben wurde, mit Benützung der typischen Form:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{e^{\sigma M_{\nu+1}}}$$

welche nach Satz VI für $\sigma \leqq 0$ das allg. Glied einer *divergenten*, für $\sigma > 0$ dasjenige einer *convergenten* Reihe darstellt. Aus der Vergleichung von a_{n+p} mit diesem Ausdrucke ergiebt sich, wenn man noch $-\varrho$ statt σ schreibt:

$$\left.\begin{matrix} \textit{Divergenz} \\ \textit{Convergenz} \end{matrix}\right\}, \text{ wenn von einem best. } \nu \text{ ab } \frac{a_{\nu+p}}{M_{\nu+1} - M_\nu} \begin{cases} > g \cdot e^{\varrho M_{\nu+1}} \; (\varrho \geqq 0), \\ < G \cdot e^{\varrho M_{\nu+1}} \; (\varrho < 0) \end{cases}$$

oder, wenn wiederum $F(x)$ eine mit x monoton zunehmende, eindeutige und eindeutig umkehrbare Function bedeutet:

$$F\left(\frac{a_{\nu+p}}{M_{\nu+1} - M_\nu}\right) \begin{cases} > F(g \cdot e^{\varrho M_{\nu+1}}) & (\varrho \geqq 0): \; \textit{Divergenz}, \\ < F(G \cdot e^{\varrho M_{\nu+1}}) & (\varrho < 0): \; \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Hierbei wird man nun, um den rechts auftretenden unbestimmten

*) Die Kriterien (D′) sind in dieser Form zuerst aufgestellt von Hrn. **Bonnet**, *Journ. de Mathém. T. VIII* (1843), *p.* 78.

Exponenten ϱ zu isoliren, am einfachsten $F(x) = \lg(x)$ wählen. Dividirt man dann noch die betreffenden Relationen durch $M_{\nu+1}$, so erhält man durch Uebergang zur Grenze:

$$\lim \frac{\lg\left(\dfrac{a_{n+p}}{M_{n+1}-M_n}\right)}{M_{n+1}} \begin{cases} > \varrho \text{ d. h. } > 0: & \textit{Divergenz}, \\ < \varrho \text{ d. h. } < 0: & \textit{Convergenz} \end{cases}$$

oder auch — da es üblicher ist, diese Art von Kriterien so zu schreiben, dass das *positive* Resultat dem Falle der *Convergenz* entspricht:

$$\text{(E)} \quad \lim \frac{\lg\left(\dfrac{M_{n+1}-M_n}{a_{n+p}}\right)}{M_{n+1}} = \lim \frac{\lg\left(\dfrac{d_n}{a_{n+p}}\right)}{\sum\limits_0^n d_\nu} \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Die M_ν bezw. d_ν unterliegen hierbei noch *gar keiner* Beschränkung. Führt man wieder die Bedingung

$$M_{n+1} \sim M_n$$

ein, so kann man statt (E) auch schreiben:

$$\text{(F, 1)} \quad \lim \frac{\lg\left(\dfrac{M_{n+1}-M_n}{a_{n+p}}\right)}{M_n} = \lim \frac{\lg\left(\dfrac{d_n}{a_{n+p}}\right)}{\sum\limits_0^{n-1} d_\nu} \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Durch Substitution von $\lg_{\varkappa+1} M_\nu$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$) für M_ν ergiebt sich alsdann — wiederum mit Berücksichtigung der Formel (g) des § 2 — die folgende Skala von disjunctiven Kriterien:*)

---

*) Die Kriterien (F, 1), (F, 2) sind auch von Herrn Dini abgeleitet worden (a. a. O. p. 14).

Das Anfangskriterium der Serie (F, 2) nämlich das auf:

$$\lim \frac{\lg\left(\dfrac{M_{n+1}-M_n}{a_{n+p}}\right)}{M_n}$$

bezügliche, hätte man auch erhalten, wenn man, statt von dem Ausdrucke:

$$\frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{e^{\varrho M_{\nu+1}}}$$

von dem zur Aufstellung des Convergenzkriteriums (C) benützten, nämlich:

$$\frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_\nu^{1+\varrho}}$$

ausgegangen wäre. In der That erscheint das obige disjunctive Kriterium genau gleichwerthig mit einem Kriterienpaare der Form:

$$(\mathrm{F},2)\qquad \lim\frac{\lg\left(\dfrac{M_{n+1}-M_n}{L_\varkappa(M_n)\,a_{n+p}}\right)}{\lg_{\varkappa+1}M_n}\begin{cases}<0: & \textit{Divergenz}.\\ >0: & \textit{Convergenz}.\end{cases}$$

Setzt man wiederum speciell $M_\nu=\nu$, so gehen die Kriterien (F, 1), (F. 2) in die bekannten über:

$$(\mathrm{G})\begin{cases}(1)\quad \lim\dfrac{\lg\left(\dfrac{1}{a_{n+p}}\right)}{n}\begin{cases}<0: & \textit{Divergenz},\\ >0: & \textit{Convergenz};\end{cases}\\[2ex] (2)\quad \lim\dfrac{\lg\left(\dfrac{1}{L_\varkappa(n)a_{n+p}}\right)}{\lg_{\varkappa+1}n}\begin{cases}<0: & \textit{Divergenz},\\ >0: & \textit{Convergenz}.\end{cases}\quad(\varkappa=0,1,2,\ldots).\end{cases}$$

Das erste dieser Kriterien lässt sich offenbar auch folgendermassen schreiben:

$$\lim\left(a_{n+p}^{\frac{1}{n}}\right)\begin{cases}>1: & \textit{Divergenz},\\ <1: & \textit{Convergenz}\end{cases}$$

und ist also identisch mit dem bekannten Cauchy'schen Fundamentalkriterium erster Art.*) Das Anfangskriterium ($\varkappa=0$) der Serie (G, 2), welches man auch in die folgende Form setzen kann:

$$\lim\frac{\lg\left(\dfrac{1}{a_{n+p}}\right)}{\lg n}\begin{cases}<1: & \textit{Divergenz},\\ >1: & \textit{Convergenz}\end{cases}$$

rührt gleichfalls von Cauchy**) her; während die übrigen ($\varkappa=1,2,\ldots$), die sich in analoger Weise so schreiben lassen:

$$\lim\frac{\lg\left(\dfrac{1}{L_{\varkappa-1}(n)\cdot a_{n+p}}\right)}{\lg_{\varkappa+1}n}\begin{cases}<1: & \textit{Divergenz},\\ >1: & \textit{Convergenz},\end{cases}$$

zuerst von Herrn Bertrand***) abgeleitet worden sind. —

Es soll schliesslich noch gezeigt werden, dass das in (G) enthaltene *Convergenz*kriterium noch eine gewisse formelle Verallgemeinerung

---

$$\lim\frac{M_n^{1+\varrho}}{M_{n+1}-M_n}\,a_{n+p}>g\quad(\varrho<0):\ \textit{Divergenz},$$

$$\lim\frac{M_n^{1+\varrho}}{M_{n+1}-M_n}\,a_{n+p}<G\quad(\varrho>0):\ \textit{Convergenz}.$$

*) Analyse algébr. p. 133.

**) desgl. p. 137.

***) Journal de Mathém. T. VII (1842), p. 37. — Eine einfachere Herleitung von Paucker: Crelle's Journal, Bd. 42 (1851), p. 139.

Die fraglichen Kriterien sind, wie Herr Bertrand a. a. O. (auch Herr Bonnet a. a. O.) gezeigt hat, nicht wesentlich verschieden von denjenigen, welche de Morgan in seinem Lehrbuche der Diff.- und Integr.-Rechnung abgeleitet hat (London, 1839).

gestattet. Bezeichnet man mit C_ν^{-1} das allg. Glied einer beliebigen convergenten Reihe, so ist für die Convergenz von $\sum a_\nu$ hinreichend, dass:

$$\lim C_n a_{n+p} < 1 \quad \text{also:} \quad \lim \lg \frac{1}{C_n\, a_{n+p}} > 0.$$

Da nun: $\lim \sum_0^n C_\nu^{-1}$ endlich und von Null verschieden ist, so kann man die letztere Bedingung ohne weiteres auch durch die folgende ersetzen:

$$\lim \frac{\lg \dfrac{1}{C_n a_{n+p}}}{\sum_0^n C_\nu^{-1}} > 0,$$

welche sich von dem Convergenzkriterium (E) offenbar nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle von $d_\nu = D_\nu^{-1}$ jetzt C_ν^{-1} steht. Bezeichnet man nun mit $\varphi(\nu)$ *eine ganz beliebig von ν abhängende positive Grösse*, so wird $\sum \frac{1}{\varphi(\nu)}$ entweder divergiren oder convergiren müssen, d. h. $\varphi(\nu)$ gehört sicher entweder der Classe der Zahlen D_ν oder derjenigen der Zahlen C_ν an. In Folge dessen ergiebt sich aber durch Zusammenfassung der zuletzt betrachteten Convergenzbedingung mit der entsprechenden in (E) das folgende, wie ich glaube, bisher noch nicht bekannte, *allgemeinste Convergenzkriterium erster Art*, welches das vollkommene Analogon zu dem *Kummer'schen Convergenzkriterium* (zweiter Art) bildet:

Die Reihe $\sum a_\nu$ ist stets convergent, wenn eine positive Zahl $\varphi(\nu)$ existirt, für welche

$$\text{(H)} \qquad \lim \frac{\lg \dfrac{1}{\varphi(n) a_{n+p}}}{\sum_0^n \dfrac{1}{\varphi(\nu)}} > 0$$

wird.

Setzt man $\sum_0^n \frac{1}{\varphi(\nu)} = \mathfrak{M}_{n+1}$, wo also $\mathfrak{M}_n$ eine positive, monoton zunehmende Function mit *beliebigem* (d. h. endlichem oder unendlich grossem) Grenzwerthe bedeutet, so kann man das obige Kriterium auch in die Form setzen:

$$\text{(H')} \qquad \lim \frac{\lg \dfrac{\mathfrak{M}_{n+1} - \mathfrak{M}_n}{a_{n+p}}}{\mathfrak{M}_{n+1}} > 0: \quad \textit{Convergenz.}$$

§ 6.

Ueber die Tragweite der Kriterien erster Art.

Ich knüpfe an die Theorie der Kriterien erster Art noch einige allgemeine Bemerkungen, welche dazu dienen sollen, über die Art ihrer Formulirung und ihre Tragweite mehr Klarheit zu schaffen, und insbesondere gewisse hierauf bezügliche und, wie ich glaube, ziemlich weit verbreitete Irrthümer zu widerlegen.

In der mehrfach citirten Abhandlung hat Herr Dini u. a. den folgenden Satz aufgestellt:*)

„Ist $\varphi(n)$ eine positive Function von n und $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ *divergent*, $\sum u_\nu$ dagegen *convergent*, so hat man *nothwendiger* Weise:

$$\lim \varphi(n) \cdot u_n = 0\text{“} —$$

und er hat im Anschlusse hieran auch die Bonnet'schen *Divergenz*-kriterien folgendermassen formulirt:

„Wenn $\sum u_n$ *convergirt*, so hat man *nothwendiger* Weise

$$\lim L_\varkappa(n) \cdot u_n = 0.\text{“}$$

Dass der obige allgemeine Satz nebst der daraus gezogenen Folgerung *nicht richtig sein kann***), geht schon daraus hervor, dass ja $\lim \varphi(n) \cdot u_n$ *wesentlich* von der Anordnung der Grössen u_ν abhängt, die Convergenz oder Divergenz von $\sum u_\nu$ aber *absolut nicht*. Um aber

---

*) a. a. O. p. 12.

**) Dem analogen Fehler bezüglich des für $\varkappa = 0$ resultirenden speciellen Grenzwerthes $\lim n \cdot u_n$ begegnet man ziemlich oft — z. B. auch in Bertrand's grossem *Traité de Calcul différentiel*, p. 232. — Von einer unrichtigen Auffassung des wahren Sachverhaltes zeugen auch die Bemerkungen, welche Herr Cesaro in der oben bereits citirten Note (a. a. O. p. 175, 176) über $\lim nu_n$ macht. Hier wird zwar zugegeben, dass $\lim nu_n$ bei einer *convergenten* Reihe oscilliren könne. Wenn es dann aber mit Bezug hierauf heisst: „*Il suffit de citer les séries simplement convergentes, déduites de la série harmonique. Cela arrive plus difficilement pour les séries absolument convergentes*“ — so erscheint schon von vornherein das Hereinziehen der „*einfachen*“ d. h. *bedingten* Convergenz in diese Betrachtung nicht recht logisch. Denn da die Schnelligkeit der Gliederabnahme bei der *bedingten* Convergenz *überhaupt gar keine Rolle spielt*, so hat es keinen rechten Sinn, hier gerade über $\lim nu_n$ eine *besondere* Aussage zu machen. Aber selbst wenn man die obige Gegenüberstellung von bedingt und unbedingt convergenten Reihen zulassen will, so hat jenes „*plus difficilement*“ doch nicht die geringste Berechtigung; denn auch hier liegt für positive u_ν die Sache, gerade wie bei $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$, wieder so, dass die *Existenz von* $\lim nu_n$, weil *wesentlich* von der *Anordnung* der u_ν abhängend, *mit der Convergenz oder Divergenz von* $\sum u_\nu$ *überhaupt nichts zu thun hat.*

diesen Punkt vollständig klar zu stellen, beweise ich jetzt den folgenden — auch späterhin noch zu verwendenden — Satz:

Es giebt keine für $\nu = \infty$ unendlich gross werdende positive Function $\varphi(\nu)$ von der Beschaffenheit, dass die Beziehung:

$$\lim \varphi(n) \cdot a_{n+p} \leqq G \quad (\textit{wo } G \geqq 0)$$

eine nothwendige Bedingung für die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$ bildet. Vielmehr kann man zu jeder beliebig vorgelegten Function $\varphi(\nu)$ mit dem Grenzwerthe ∞ die Terme jeder convergenten Reihe so anordnen, dass:

$$\lim \varphi(n)\, a_{n+p}$$

unter anderen Werthen beliebig (d. h. auch unendlich) grosse annimmt.

Beweis. Es sei $\sum c_\nu$ eine beliebige convergente Reihe, so zerlege man die Folge der Terme

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

auf ganz willkürliche Art in zwei unendliche Folgen:

$$c_0', c_1', c_2', \ldots,$$
$$c_0'', c_2'', c_2'', \ldots,$$

welche offenbar wiederum convergirende Reihen bilden werden.

Ferner möge

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$$

eine unbegrenzte Folge positiver, niemals zunehmender Zahlen bedeuten, deren Grenzwerth für $n = \infty$ je nach Bedarf als endlich oder Null angenommen werden soll.

Da nun $\frac{1}{\varphi(\nu)}$ — wie die Function $\varphi(\nu)$ im übrigen auch beschaffen sein mag — für hinlänglich grosse Werthe von ν jedenfalls beliebig klein werden muss, so kann man eine unbegrenzte Reihe von wachsenden, positiven ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda, \ldots$ construiren, dergestalt dass:

$$\frac{1}{\varphi(n_0)} \leqq \varepsilon_0 c_0', \quad \frac{1}{\varphi(n_1)} \leqq \varepsilon_1 c_1', \ldots, \frac{1}{\varphi(n_\lambda)} \leqq \varepsilon_\lambda c_\lambda', \ldots *)$$

also:

---

*) Hieraus folgt, beiläufig bemerkt, dass $\sum_\lambda \frac{1}{\varphi(n_\lambda)}$ convergirt. Ist also $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ divergent, so ergiebt sich: Man kann aus jeder *divergenten* Reihe mit schliesslich verschwindenden Gliedern unendlich viele *convergente* Reihen herausheben.

$$c'_\lambda \geqq \frac{1}{\varepsilon_\lambda \varphi(n_\lambda)}.$$

Setzt man jetzt:

$a_\nu = c''_\nu$, wenn ν *nicht* gerade von der Form $(n_\lambda + p)$,

dagegen:

$$a_{n_\lambda + p} = c'_\lambda,$$

so ist $\sum a_\nu$ von $\sum c_\nu$ lediglich in der Anordnung der Glieder verschieden, also sicher auch convergent. Dabei ist aber:

$$\varphi(n_\lambda) \cdot a_{n_\lambda + p} = \varphi(n_\lambda) \cdot c'_\lambda \geqq \frac{1}{\varepsilon_\lambda},$$

wird also für $\lambda = \infty$ (bezw. $n_\lambda = \infty$) je nach Wahl von $\lim \varepsilon_\lambda$ beliebig — und zwar für $\lim \varepsilon_\lambda = 0$ — unendlich gross, sodass also in der That unter den Werthen von $\lim \varphi(n) a_{n+p}$ solche vorhanden sind, welche jede beliebige Zahl G übersteigen. —

(Beispiel. Es sei $c_\nu = \frac{1}{\nu^2}$, $\varphi(\nu) = \nu$, also zunächst

$$\lim \varphi(n) \cdot c_n = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Man setze nun etwa:

$$c'_\nu = \frac{1}{(2\nu)^2}, \quad c''_\nu = \frac{1}{(2\nu - 1)^2}, \quad \varepsilon_\nu = \frac{4}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die Zahlen n_λ sind dann so zu bestimmen, dass:

$$\frac{1}{\varphi(n_\lambda)} \text{ d. h. } \frac{1}{n_\lambda} \leqq \frac{1}{\lambda^3}$$

und dieser Bedingung wird also genügt, wenn man setzt:

$$n_\lambda = \lambda^3$$

Nimmt man jetzt:

$a_\nu = \frac{1}{(2\nu - 1)^2}$, wenn ν *nicht* von der Form λ^3
(d. h. keine Cubikzahl)

dagegen:

$$a_{\lambda^3} = \frac{1}{(2\lambda)^2},$$

so hat man offenbar:

$$\lim \lambda^3 \cdot a_{\lambda^3} = \lim \frac{\lambda}{4} = \infty,$$

sodass also unter den Werthen von $\lim n \cdot a_n$ auch der Werth ∞ erscheint). —

Als specieller Fall ergiebt sich also — für $G = 0$ — aus dem soeben bewiesenen Satze, dass keine Function $\varphi(\nu)$ mit unendlichem

Grenzwerthe existiren kann, dergestalt dass $\lim \varphi(n) \cdot a_{n+p} = 0$ sein *müsste*, wenn $\sum a_\nu$ convergiren soll.*)

Dies findet vielmehr nur dann statt, wenn $\lim \varphi(n) a_{n+p}$ überhaupt *existirt* d. h. *eindeutig bestimmt* ist. In diesem Falle giebt es nur die beiden Möglichkeiten, dass *entweder:*

$$\lim \varphi(n) \,.\, a_{n+p} = 0$$

oder:

$$\lim \varphi(n) \cdot a_{n+p} \geqq g \quad \text{wo} \quad g > 0.$$

Die letztere Eventualität müsste aber, sobald nur $\varphi(\nu)$ so beschaffen ist, dass $\sum \frac{1}{\varphi(\nu)}$ divergirt, stets auch die Divergenz von $\sum a_\nu$ nach sich ziehen. Ist dagegen $\lim \varphi(n) a_{n+p}$ nicht bestimmt und $\sum \frac{1}{\varphi(\nu)}$ divergent, so kann man nur folgendes aussagen: Es muss die *untere Unbestimmt*heitsgrenze von $\lim \varphi(n) \cdot a_{n+p}$ den Werth Null haben, wenn $\sum a_\nu$ convergirt.

Es verdient nun aber auch noch des weiteren bemerkt zu werden, dass der durch die eben angestellte Betrachtung widerlegte Dini'sche

---

*) Diese falsche Annahme findet sich auch bei Du Bois Reymond und ist sogar auf einen Theil seiner Deductionen von bestimmend nachtheiligem Einflusse gewesen. A. a. O. p. 67, Art. VII heisst es nämlich:

„*angenommen es sei durch anderweitige Betrachtungen in Bezug auf eine gewisse Function $\varphi(p)$ (z. B. $\varphi(p) = 1$) festgestellt, dass keine Reihe Σu_p convergiren kann, bei der nicht $\lim \varphi(p) u_p = 0$.*"

Und im Anschluss hieran ist das Divergenzkriterium 2ter Art folgendermassen gefasst:

„*Es sei $\varphi(p)$ so gewählt, dass Σu_p nur convergiren kann, wenn $\lim \varphi(p) \,.\, u_p = 0$ ist, so divergirt Σu_p allemal, wenn*

$$\lim \left(\varphi(p) - \varphi(p+1) \frac{u_{p+1}}{u_p} \right)$$

negativ ist."

Die von Du Bois Reymond oben als Beispiel angeführte Function $\varphi(p) = 1$ erfüllt nun freilich diese Bedingung, und ebenso, wie ich hinzufügen will, jede für $p = \infty$ *nicht* unendlich werdende positive Function. Dies sind dann aber auch die einzigen derartigen Functionen $\varphi(p)$, während es sich doch bei näherem Zusehen an der betreffenden Stelle wesentlich auch *um etwaige Functionen $\varphi(p)$ mit dem Grenzwerthe* ∞ handelt: andernfalls würde sich nämlich das obige, allgemein sein sollende Divergenzkriterium 2ter Art auf das Cauchy'sche Fundamentalkriterium:

$$\lim \frac{u_{p+1}}{u_p} > 1$$

reduciren.

Da es nun aber, wie bewiesen, *derartige Functionen $\varphi(p)$ gar nicht giebt*, so wird damit nicht nur die von Du Bois Reymond gewählte Formulirung des angeführten Divergenzkriteriums, sondern auch ein Theil der damit in Verbindung stehenden Betrachtungen hinfällig. —

Satz selbst dann *unrichtig* ist, *wenn* $\varphi(\nu)$ *monoton zunimmt* und *die Glieder der Reihe* in der für das Zustandekommen eines bestimmten Grenzwerthes von $\lim \varphi(n) a_{n+p}$, günstigsten Weise, nämlich *monoton abnehmend* geordnet sind. In diesem Falle lässt sich nämlich zeigen, dass die Beziehung:

$$\lim \varphi(n) \cdot a_{n+p} = 0$$

zwar dann und *nur* dann eine *nothwendige* Bedingung für die Convergenz von $\sum a_\nu$ ist, wenn $\varphi(n) \precsim n$ ist; dass dagegen für $\varphi(n) \succ n$, auch wenn $\sum a_\nu$ convergirt, der fragliche Ausdruck unter anderen Werthen wiederum auch beliebig bezw. unendlich grosse annehmen kann.*)

Um zunächst die Nothwendigkeit der Bedingung

$$\lim \varphi(n) \quad a_{n+p} = 0 \quad \text{für:} \quad \varphi(n) \precsim n$$

zu erweisen, werde $\sum a_\nu$ als convergent und $a_{\nu+1} \leqq a_\nu$ angenommen. Alsdann kann man zu jeder beliebig klein vorzuschreibenden positiven Grösse ε eine positive ganze Zahl m bestimmen, dergestalt dass für $\nu \geqq m$ und jede noch so grosse Zahl μ:

$$a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \cdots + a_{\nu+\mu} < \varepsilon.$$

---

*) Es ist daher gleichfalls *unrichtig*, wenn Herr Catalan in seinem *Traité élémentaire des Séries* (p. 17) die Beziehungen:

$$\lim n \cdot u_n = 0,$$
$$\lim n \cdot \lg n \cdot u_n = 0,$$
$$\lim n \cdot \lg n \cdot \lg\lg n \cdot u_n = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

als *nothwendige* Bedingungen für die Convergenz jeder Reihe mit positiven *abnehmenden* Gliedern bezeichnet. Und wenn dort mit einfachem Hinweis auf die Divergenz von $\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n \cdot \lg n}$ gesagt wird: „*Ces conditions n'exigent aucune explication*" — so bedürfen jene Bedingungen nichtsdestoweniger einer genaueren Untersuchung, welche dann zeigt, dass thatsächlich *nur die erste* derselben richtig ist (s. im Text). —

Im übrigen muss ich gestehen, dass ich selbst früher die Ansicht von der *Nothwendigkeit* der fraglichen Bedingungen für die Convergenz von Reihen mit abnehmenden Gliedern getheilt habe — cf. *Math. Annal.* Bd. XXI, p. 365. Indessen habe ich gerade dort bereits darauf hingewiesen, dass die Beziehung $\lim n \cdot a_n b_n = 0$ als *nothwendige* Bedingung einer gewissen aus den niemals zunehmenden Grössen a_ν, b_ν zusammengesetzten Reihe erscheint, während

$$\lim L_\varkappa(n) \cdot a_n b_n \quad (\varkappa \geqq 1)$$

nicht zu verschwinden braucht. Diese mir seinerzeit auffallend erscheinende Thatsache findet jetzt ihre Erklärung darin, dass schon für die Convergenz von $\Sigma a_\nu b_\nu$ (wo die a_ν, b_ν niemals zunehmen sollen) *nur* die Bedingung $\lim n \cdot a_n b_n = 0$, *nicht* aber auch $\lim L\ (n)\ a_n b_n = 0$ $(\varkappa \geqq 1)$ sich nothwendig ergiebt.

Setzt man nun speciell $\mu = \nu$, so wird:

$$\nu \cdot a_{2\nu} < a_{\nu+1} + a_{\nu+2} \cdots + a_{2\nu} < \varepsilon$$

also

$$2\nu \cdot a_{2\nu} < 2\varepsilon.$$

Da ausserdem:

$$(2\nu+1) \cdot a_{2\nu+1} \leqq \frac{2\nu+1}{2\nu} \cdot 2\nu \cdot a_{2\nu} < \left(2 + \frac{1}{\nu}\right)\varepsilon$$

so folgt allgemein:

$$\lim n \cdot a_n = 0$$

und um so mehr:

$$\lim n \cdot a_{n+p} = 0.$$

Daraus ergiebt sich aber, dass auch stets:

$$\lim \varphi(n) \cdot a_{n+p} = 0$$

sobald:

$$\varphi(n) \precsim n.$$

Um aber zweitens zu zeigen, dass die fragliche Bedingung im Falle $\varphi(n) \succ n$ (also z. B. für $\varphi(n) = n \lg n$) *nicht* erfüllt zu sein braucht, habe ich folgendes Beispiel construirt.

Es werde gesetzt;

$$\varphi(\nu) = \nu \cdot \psi(\nu)$$

wo $\psi(\nu)$ mit ν monoton zunehmen und übrigens *beliebig langsam* ins Unendliche wachsen. Sei dann f die *inverse* Function von ψ (genauer gesagt: wenn die Gleichung $\varphi(\nu) = n$ mehrere Auflösungen der Form $\nu = f(n)$ zulässt, so soll $f(n)$ so gewählt werden, dass diese Grösse wesentlich positiv ist und mit n monoton ins Unendliche wächst — was offenbar stets und nur auf eine einzige Weise möglich ist); alsdann hat man:

$$f\big(\psi(\nu)\big) = \psi\big(f(\nu)\big) = \nu.$$

Ferner bezeichne k_ν eine beliebige positive, mit ν niemals abnehmende Grösse mit endlichem oder unendlichem Grenzwerthe, $\sum C_\nu^{-1}$ eine convergente Reihe mit niemals zunehmenden Gliedern.

Ich betrachte nun die Reihe:

$$(20) \qquad S = \sum_0^\infty{}^{\nu} \left\{ \frac{\varepsilon_0^{(\nu)}}{C_\nu f(k_\nu C_\nu)} + \frac{\varepsilon_1^{(\nu)}}{C_\nu f(k_\nu C_\nu)} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu^{(\nu)}}{C_\nu f(k_\nu C_\nu)} \right\}$$

wo:

$$\mu = [f(k_\nu C_\nu)] \text{ (d. h. die grösste in } f(k_\nu C_\nu) \text{ enth. gze. Zahl)}$$

und *entweder:*

$$\varepsilon_0^{(\nu)} = \varepsilon_1^{(\nu)} = \cdots = \varepsilon_\mu^{(\nu)} = 1$$

oder — wenn man nur wirklich *ab*nehmende Glieder (mit Ausschluss der Gleichheit) haben will — etwa:

$$1 + h_\nu = \varepsilon_0^{(\nu)} > \varepsilon_1^{(\nu)} > \cdots > \varepsilon_\mu^{(\nu)} = 1$$

wo die positive Grösse $h_\nu \leqq h$ nur so zu wählen ist, dass das Schlussglied jeder Gruppe, nämlich:

$$\frac{1}{C_\nu f(k_\nu C_\nu)}$$

immerhin noch grösser ist, als das Anfangsglied der folgenden, d. h.:

$$\frac{1+h_{\nu+1}}{C_{\nu+1} f(k_{\nu+1} C_{\nu+1})}.$$

Man erkennt nun zunächst, dass die Reihe S convergirt, denn man hat in jedem Falle:

$$S < \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{(1+h)(\mu+1)}{C_\nu f(k_\nu C_\nu)} \quad \text{d. h.} \quad < (1+h) \left\{ \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{C_\nu} + \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{C_\nu f(k_\nu C_\nu)} \right\}.$$

Bezeichnet man jetzt das zu irgend einem Werthe ν gehörige Schlussglied einer Gruppe mit a_{m_ν}, also mit m_ν die Stellenzahl dieses Gliedes innerhalb der Gesammtreihe, so ist offenbar:

$$m_\nu > \mu + 1 > f(k_\nu C_\nu)$$

und daher:

$$\varphi(m_\nu) \cdot a_{m_\nu} = m_\nu \cdot \psi(m_\nu) \frac{\varepsilon_\mu^{(\nu)}}{C_\nu f(k_\nu C_\nu)}$$

$$> f(k_\nu C_\nu) \cdot \psi\left(f(k_\nu C_\nu)\right) \frac{1}{C_\nu f(k_\nu C_\nu)} \quad \text{d. h.} > k_\nu$$

sodass also unter den Werthen von

$$\lim \varphi(n) \,.\, a_n$$

solche vorkommen, welche $\geqq k_\infty$ d. h. beliebig gross sind.*)

(Beispiel. Es sei $\psi(\nu) = \lg \nu$, also $f(\nu) = e^\nu$, und daher zunächst:

$$S = \sum{}^{\nu} \left\{ \frac{\varepsilon_0^{(\nu)}}{C_\nu e^{k_\nu C_\nu}} + \frac{\varepsilon_1^{(\nu)}}{C_\nu e^{k_\nu C_\nu}} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu^{(\nu)}}{C_\nu e^{k_\nu C_\nu}} \right\}.$$

Wählt man noch:

$C_\nu = \nu^r (r > 1)$, $k_\nu = \lg a \,.\, \nu^s$ $(a > 1,\ s > 0)$, also $\mu = [a^{\nu^{r+s}}]$ so wird:

$$S = \sum{}^{\nu} \left\{ \frac{\varepsilon_0^{(\nu)}}{\nu^r a^{\nu^{r+s}}} + \frac{\varepsilon_1^{(\nu)}}{\nu^r a^{\nu^{r+s}}} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu^{(\nu)}}{\nu^r a^{\nu^{r+s}}} \right\} \tag{21}$$

---

*) Hieraus folgt, dass die oben besprochene Du Bois Reymond'sche Deduction selbst dann nicht zu retten ist, wenn man die u_ν der Beschränkung unterwirft, mit ν niemals zuzunehmen. Hierdurch würden zwar solche Functionen $\varphi(p)$, welche $\leqq G \cdot p$ sind, in den Kreis der zulässigen eingeschlossen, *nicht* aber $\varphi(p) = p \cdot \lg p$, $p \cdot \lg p \cdot \lg_2 p$ etc. — Functionen, auf die es bei der Bildung des fraglichen Kriteriums gerade sehr wesentlich ankommt.

und diese convergente Reihe besitzt die Eigenschaft, dass unter den Werthen von $\lim (n \lg n \,.\, a_n)$ auch der Werth ∞ vorkommt, obschon die Glieder a_ν niemals zunehmen).

Der besondere Charakter solcher Reihen, wie die oben betrachtete lässt sich folgendermassen beschreiben: Die Gesammtheit ihrer Glieder zerfällt in Gruppen mit immer grösser werdender Gliederzahl, und zwar bleiben innerhalb jeder Gruppe die Glieder so lange *constant* oder nehmen doch *so langsam ab*, dass sie schliesslich *über* dem entsprechenden Gliede der divergenten Reihe $\sum \frac{1}{\varphi(\nu)}$ liegen, während sodann beim Uebergange von einer Gruppe zur anderen eine plötzliche, *relativ sehr rasche Abnahme* stattfindet, vermöge deren die Glieder tief genug unter $\frac{1}{\varphi(\nu)}$ herabsinken, um die Convergenz der Reihe zu sichern. Dieser Vorgang wird noch anschaulicher, wenn man die geometrische Repräsentation zu Hilfe nimmt und die Curven $y = \frac{1}{\varphi(x)}$ und $y = a_x$ mit einander vergleicht (wobei die Function a_x und nöthigenfalls auch $\varphi(x)$ aus a_ν, $\varphi(\nu)$ durch Interpolation so gebildet sein mögen, das a_x und $\varphi(x)$ stetig sind und monoton abnehmen bezw. niemals zunehmen). Die Curve $y = \frac{1}{\varphi(x)}$ wird dann für diejenigen Typen $\varphi(x)$, auf die es hier wesentlich ankommt, — wie $\varphi(x) = L_\varkappa(x)$ $(\varkappa \geq 1)$ — in sehr regelmässiger Weise successive fallend, mit wachsendem x sich asymptotisch der X-Axe nähern. Dagegen nimmt die Curve $y = a_x$ einen ungefähr treppenförmigen Verlauf mit immer länger werdenden Stufen, und zwar ragt jedesmal die ausspringende Ecke jeder Stufe *über* die Curve $y = \frac{1}{\varphi(x)}$ hinaus*), während die einspringende Ecke immer wieder verhältnissmässig tief *unter* dieselbe hinabsinkt. Hierdurch wird es schliesslich ermöglicht, dass die von der Curve $y = a_x$ und den beiden Axen begrenzte Fläche mit unendlich wachsendem x einer festen Grenze zustrebt, während die entsprechende Fläche für $y = \frac{1}{\varphi(x)}$ über alle Grenzen wächst. —

Als Hauptresultat der soeben angestellten Untersuchung ergiebt sich also:

Es ist *nicht* gestattet aus dem Divergenzkriterium erster Art, nämlich:

$$\lim D_n a_n > 0: \textit{Divergenz} \ —$$

---

*) Dieselbe bleibt dagegen, wie der erste Theil dieser Betrachtung lehrt, stets *unterhalb* der Curve $y = \frac{G}{x}$ d. h. unterhalb *jeder* gleichseitigen Hyperbel, welche die Coordinatenaxen zu Asymptoten hat.

zu schliessen, die Beziehung:

$$\lim D_n a_n = 0$$

bilde stets eine *nothwendige* Bedingung für die *Convergenz* von $\sum a_\nu$. Dies ist für beliebige a_ν nur dann richtig, wenn $\lim D_n a_n$ überhaupt *existirt;* ausserdem für niemals zunehmende a_ν, falls $D_n \precsim n$.

Was nun ferner die Tragweite der Kriterien erster Art, insbesondere der gewöhnlichen logarithmischen (Bonnet'schen) Kriterien betrifft, so scheint es mir, dass dieselbe im allgemeinen nicht unerheblich überschätzt wird. Allerdings ist die von Bonnet ausgesprochene Behauptung*): die betreffenden Kriterien seien hinreichend, um die Divergenz bezw. Convergenz *jeder* Reihe zu erkennen — schon von Du Bois Reymond durch die Aufstellung einer nachweisbar *convergenten* Reihe widerlegt worden, deren Glieder so langsam abnehmen, dass jedes logarithmische Convergenzkriterium von beliebig hoher Ordnung versagt.**) Den Grundgedanken, auf welchem die Existenz solcher Reihen basirt, hatte freilich schon Herr Bonnet selbst ausgesprochen, indem er an der betreffenden Stelle hinzufügte: Es könnte ein Zweifel über die Beschaffenheit einer Reihe nur dann entstehen, wenn ihr allgemeines Glied für $n = \infty$ so verschwände, wie der Ausdruck $(n \,.\, \lg n \lg_2 n \ldots)^{-1}$ bei unendlich grosser Anzahl der betreffenden Factoren. In dieser Form ist der fragliche Gedanke freilich nicht ohne weiteres brauchbar, denn — wie gross auch n angenommen werden mag — so kann man durch hinlängliche Vergrösserung von $\varkappa$ stets erzielen, dass $\lg_\varkappa n$ ein ächter Bruch, also $\lg_{\varkappa+1} n$ negativ und somit alle folgenden iterirten Logarithmen complex werden.***) Man kann indessen durch eine sehr einfache und eigentlich auf der Hand liegende Modification erzielen, dass das von Herrn Bonnet intendirte

*) Journ. de Mathém. T. VIII, p. 79.

**) a. a. O. 88.

***) Es erscheint daher zunächst vollkommen richtig, wenn Herr Catalan in seinem *Traité élémentaire des Séries* bemerkt:

„*Faute d'avoir fait cette remarque* (nämlich, dass $\lg_\varkappa n$ für hinlänglich grosse $\varkappa$ complex wird) *un géomètre a pensé, qu'une série peut avoir pour terme général*

$$\frac{1}{n \lg n (\lg\lg n) \cdots}$$

le nombre des facteurs du dénominateur étant infini et que le cas de cette série (dont tous les termes seraient imaginaires!) est en quelque sorte le point de jonction des séries convergentes et des séries divergentes."

Wenn nun aber Herr Catalan gerade aus dem Complexwerden von $\lg_\varkappa n$ die *absolute* Wirksamkeit der Bonnet'schen Kriterien folgendermassen zu erschliessen sucht:

„*L'application des règles . . . permettra toujours de savoir, si la série à*

Resultat wirklich zum Vorschein kommt. Man braucht nämlich nur, statt die Anzahl der betreffenden Factoren *schlechthin* unendlich werden zu lassen, Ausdrücke von der Form zu bilden:

$$(22)\qquad u_\nu = \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)}, \qquad v_\nu = \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)\lg^{\varrho}_{\varkappa_\nu}(\nu)},$$

wobei man die Anzahl $\varkappa_\nu$ der logarithmischen Factoren allmählich und schliesslich über alle Grenzen wachsen lässt, aber nur in dem Maasse, dass $\varkappa_\nu$ *keinesfalls früher* einen gewissen ganzzahligen Werth annimmt, bevor nicht ν so gross geworden ist, dass $\lg_{\varkappa_\nu}(\nu)$ positiv und $\geqq 1$ wird. Alsdann ist in der That evident, dass u_ν, v_ν positiv bleiben und im Unendlichen so verschwinden, dass sie auf keins der logarithmischen Kriterien von beliebig hoher Ordnung reagiren (d. h. die Divergenzkriterien liefern stets den Grenzwerth 0, die Convergenzkriterien den Grenzwerth ∞).

Dem Typus v_ν gehört das allg. Glied der Du Bois Reymond'schen Reihe an: bei dieser ist die Zunahme der Zahl $\varkappa_\nu$ für wachsende Werthe von ν so regulirt, das die Partialsummen derjenigen Glieder, welche jedesmal zu dem nämlichen Werthe $\varkappa_\nu$ gehören, unter gewissen — durch bestimmte Integrale zu ermittelnden — Grenzen liegen, welche die Convergenz der Gesammtreihe erkennen lassen.

Es fragt sich nun: Was geschieht, wenn man die Zahl $\varkappa_\nu$ noch merklich *schneller*, wie bei der Du Bois Reymond'schen Reihe wachsen lässt, etwa in der Weise, dass $\varkappa_\nu$ jedesmal einen gewissen ganzzahligen Werth *sofort* annimmt, wenn ν gerade den kleinsten Werth erreicht, für welchen $\lg_{\varkappa_\nu}(\nu) \geqq +1$ wird?

Es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle $\sum v_\nu$ und *a fortiori* $\sum u_\nu$ *divergiren* — womit dann als Ergänzung zu der Du Bois Reymond'schen *convergenten* Reihe, auch Beispiele von *divergenten* Reihen gewonnen wären, bei denen sämmtliche logarithmische Kriterien versagen.

---

laquelle on les applique est convergente ou divergente; c'est a dire que l'on n'aura pas indéfiniment:

$$\frac{1}{n} > u_n > \frac{1}{n^{1+\varkappa}}, \quad \frac{1}{n\lg n} > u_n > \frac{1}{n(\lg n)^{1+\varkappa}}, \cdots$$

En effet, quelle que soit la valeur attribuée à n, les fonctions $\lg n$, $\lg\lg n$, $\lg\lg\lg n, \ldots$ *finissent par devenir imaginaires"* —
so begeht er einen weit schwereren Fehler, als der, welchen er Herrn Bonnet vorwirft. Denn die obige Schlussweise hat überhaupt keinen Sinn, während die Bonnet'sche Ansicht auf einen durchaus richtigen und, wie im Texte gezeigt wird, durch eine leichte Modification fruchtbar zu machenden Grundgedanken beruht.

Ich will den fraglichen Beweis nicht an den Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$, sondern an einem noch etwas allgemeineren Reihentypus führen, welcher zugleich auch noch Beispiele *convergirender* Reihen von der Art der Du Bois Reymond'schen, aber von etwas durchsichtigerem Bildungsgesetze und *rein elementar nachweisbarer* Convergenz liefern wird.

Es werde gesetzt:

$$e = e_1, \; e^{e_1} = e_2, \; e^{e_2} = e_3, \; \ldots, \; e^{e_{m-1}} = e_m \ldots,$$

sodass also

$$\begin{array}{llll}
\lg_1 e_1 = 1, & \lg_1 e_2 = e_1, & \lg_1 e_3 = e_2, \ldots, & \lg_1 e_m = e_{m-1}, \\
 & \lg_2 e_2 = 1, & \lg_2 e_3 = e_1, & \lg_2 e_m = e_{m-2}, \\
 & & \lg_3 e_3 = 1, & \ldots\ldots\ldots \\
 & & & \lg_\varkappa e_m = e_{m-\varkappa}, \\
 & & & \ldots\ldots\ldots \\
 & & & \lg_m e_m = 1.
\end{array}$$

Sodann soll $\varkappa_\nu$ als ganzzahlige Function der ganzen Zahl ν definirt werden durch die Beziehung:

(23) $\varkappa_\nu = m$ wenn: $e_m < \nu < e_{m+1}$ d. h. wenn $[e_m + 1] \leqq \nu \leqq [e_{m+1}]$.

Es bleibt also $\varkappa_\nu$ constant, solange sich ν innerhalb zweier Grenzen von der Form e_m und e_{m+1} bewegt, und wächst erst wieder um eine Einheit, sobald ν den Werth e_{m+1} überschreitet. Hieraus folgt, dass für $n = \infty$

$$\lim \varkappa_n = \infty$$

wird. Andererseits lässt sich aber zeigen, dass $\varkappa_\nu$ — von einer jedesmal anzugebenden Stelle ab — langsamer zunimmt, als $\lg_\lambda \nu$ für einen beliebig gross vorzuschreibenden Werth λ.

Bezeichnet man nämlich mit μ eine gewisse positive ganze Zahl und bestimmt ν so, dass:

$$e_{\lambda+\mu} < \nu < e_{\lambda+\mu+1},$$

so wird:

$$\lg_\lambda \nu > \lg_\lambda e_{\lambda+\mu} \text{ d. h. } > e_\mu$$

und:

$$\varkappa_\nu = \lambda + \mu$$

also:

$$\frac{\lg_\lambda \nu}{\varkappa_\nu} > \frac{e_\mu}{\lambda + \mu}$$

d. h. grösser, als eine durch Wahl von μ — also auch von ν — beliebig gross zu machende Zahl. Man hat daher für jedes noch so grosse λ:

(24) $$\lim \frac{\lg_\lambda n}{\varkappa_n} = \infty. \text{ —}$$

Das allgemeine Glied der zu untersuchenden Reihe soll nun lauten:

$$w_\nu = \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu) \cdot \varkappa_\nu^r}. \tag{25}$$

Man erkennt dann in Folge der Beschaffenheit von $\varkappa_\nu$ ohne weiteres die Richtigkeit der Beziehungen:

$$\lim L_\lambda(n) \cdot w_n = 0$$

und:

$$\lim L_\lambda(n) \cdot \lg_\lambda^\varrho n \cdot w_n = \infty \quad (\varrho > 0)$$

d. h. die Terme w_ν reagiren auf keins der logarithmischen Kriterien von beliebig hoher Ordnung:

Um nun die Beschaffenheit der Reihe $\sum w_\nu$ zu eruiren, bringe man dieselbe auf die Form:

$$\sum^\nu w_\nu = \sum^\mu W_\mu$$

wo W_μ die Gesammtheit der Glieder bezeichnet, für welche $\varkappa_\nu$ den constanten Werth μ besitzt. Da nun gemäss der Definition von $\varkappa_\nu$

$$\varkappa_\nu = \mu \quad \text{wenn:} \quad [e_\mu + 1] \leqq \nu \leqq [e_{\mu+1}]$$

so hat man:

$$W_\mu = \frac{1}{\mu^r} \sum_{[e_\mu+1]}^{[e_{\mu+1}]} {}^{\nu} \frac{1}{L_\mu(\nu)}.$$

Nun ist nach Ungl. (f) des § 2:

$$\lg_{\mu+1} M_{\nu+1} - \lg_{\mu+1} M_\nu \begin{cases} \leqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\mu(M_\nu)}, \\[2ex] \geqq \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\mu(M_{\nu+1})} \end{cases}$$

und daher, wenn man in der ersten dieser Ungleichungen $M_\nu = \nu$, in der zweiten $M_{\nu+1} = \nu$ setzt und mit der rechten Seite zu schreiben anfängt:

$$\frac{1}{L_\mu(\nu)} \begin{cases} \geqq \lg_{\mu+1}(\nu+1) - \lg_{\mu+1}(\nu), \\ \leqq \lg_{\mu+1}(\nu) - \lg_{\mu+1}(\nu-1). \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich aber:

$$\sum_{[e_\mu+1]}^{[e_{\mu+1}]} \frac{1}{L_\mu(\nu)} \begin{Bmatrix} \geqq \lg_{\mu+1}[e_{\mu+1}+1] - \lg_{\mu+1}[e_\mu + 1] \\ \leqq \lg_{\mu+1}[e_{\mu+1}] \quad\;\; - \lg_{\mu+1}[e_\mu] \end{Bmatrix} = \vartheta_\mu$$

wo ϑ_μ eine positive Grösse bedeutet, die für jeden Werth μ endlich und von Null verschieden ist. (Beiläufig bemerkt hat man:

$$\lg_{\mu+1}(e_{\mu+1}) = 1, \quad \lg_{\mu+1}(e_\mu) = 0,$$

sodass also ϑ_μ für hinlänglich grosse Werthe von μ beliebig wenig von 1 verschieden ist). Man findet somit:

$$W_\mu = \frac{\vartheta_\mu}{\mu^r}$$

und schliesslich:

$$\sum^\nu w_\nu = \sum^\mu \frac{\vartheta_\mu}{\mu^r},$$

sodass man die *Divergenz* von $\sum w_\nu$ für $r \leqq 1$, die *Convergenz* für $r > 1$ erkennt.*) Von den beiden Reihen:

$$(26) \qquad \sum \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)\cdot\varkappa_\nu}, \qquad \sum \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)\cdot\varkappa_\nu^{1+\varrho}} \qquad (\varrho > 0)$$

divergirt somit die erstere und *convergirt* die zweite *schwächer* als jede der gewöhnlichen logarithmischen Reihen.**)

Dass es aber wiederum *noch schwächer* divergirende bezw. convergirende Reihen geben muss, folgt aus den allgemeinen Sätzen der §§ 3 und 4. Im übrigen erkennt man aus dem Gange des letzten Beweises ohne weiteres, dass die Divergenz bezw. Convergenz der betreffenden Reihen erhalten bleibt, wenn man den Factor $\varkappa_\nu$ durch $L_\iota(\varkappa_\nu)$ bezw. $L_\iota(\varkappa_\nu)\lg_\iota^\varrho(\varkappa_\nu)$ ersetzt, d. h. von den beiden Reihen:

$$(27) \qquad \sum \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)\,L_\iota(\varkappa_\nu)}, \qquad \sum \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)\,L_\iota(\varkappa_\nu)\lg_\iota^\varrho(\varkappa_\nu)} \qquad (\varrho > 0)$$

ist die erste divergent, die zweite convergent, wie gross man auch ι als positive ganze Zahl fixiren mag. Hierbei kann man nun wiederum noch den *festen* Index ι durch einen mit $\varkappa_\nu$ in derselben Weise, wie

---

*) Hieraus folgt für $r = 0$ die Divergenz der oben (Gl. 22) eingeführten Reihe mit dem Gliede:

$$u_\nu = \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)}.$$

Um auch die Divergenz der Reihe mit dem allg. Gliede

$$v_\nu = \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)\lg_{\varkappa_\nu}^\varrho(\nu)}, \qquad (\varrho > 0)$$

zu erkennen (d. h. bei der hier fixirten Bedeutung von $\varkappa_\nu$), hat man nur zu beachten, dass

$$\lg_{\varkappa_\nu}(\nu) < \lg_{\varkappa_\nu}(e_{\varkappa_\nu+1}) \text{ d. h. } < e$$

also:

$$v_\nu > \frac{1}{e^\varrho} u_\nu.$$

**) Natürlich könnte man diese und ähnliche Reihen zur Aufstellung von schärferen Kriterien, als die bisher abgeleiteten benützen. Vgl. hierüber auch die letzte Randbem. zu § 10.

$\varkappa_\nu$ mit ν, allmählich zunehmenden $\iota_{\varkappa_\nu}$ ersetzen, welcher schliesslich gleichfalls über alle Grenzen wachsen wird, wenn auch langsamer, als jeder beliebig oft iterirte Logarithmus von $\varkappa_\nu$. Die resultirenden Reihen:

$$(28) \qquad \sum \frac{1}{L_{\varkappa_n}(\nu)\, L_{\iota_{\varkappa_\nu}}(\varkappa_\nu) \cdot \iota_{\varkappa_\nu}}, \quad \sum \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)\, L_{\iota_{\varkappa_\nu}}(\varkappa_\nu) \cdot \iota_{\varkappa_\nu}^{1+\varrho}}$$

divergiren bezw. convergiren dann noch schwächer, als die Reihen (28) — u. s. f. in infinitum.

Die entsprechenden Glieder eines solchen correspondirenden *Paares* dieser divergenten und convergenten Reihen unterscheiden sich immer nur durch den letzten Factor und können somit, da man die Zunahme dieses Factors ins Unbegrenzte verlangsamen kann, einander unbegrenzt genähert werden.

Zugleich ist auch leicht ersichtlich, wie man die zuletzt betrachteten Ausdrücke zu verallgemeinern hat, um solche Reihen zu erhalten, für welche jedes Divergenz- oder Convergenzkriterium einer *beliebigen* Skala von der Form (D) versagen muss.

Ich möchte aber ferner auch noch auf gewisse andere, wie ich glaube, bisher nicht betrachtete Reihentypen mit niemals zunehmenden Gliedern hinweisen, deren Divergenz bezw. Convergenz sich noch leichter erkennen lässt, und welche gleichfalls auf keins der logarithmischen Kriterien reagiren. Hierher gehört z. B. die oben bereits als *convergent* erkannte Reihe (Gl. 21):

$$(29\text{a}) \qquad S = \sum a_n = \sum_1^\infty{}_\nu \left\{ \frac{\varepsilon_0^{(\nu)}}{\nu^r\, a^{\nu^{r+s}}} + \frac{\varepsilon_1^{(\nu)}}{\nu^r\, a^{\nu^{r+s}}} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu^{(\nu)}}{\nu^r\, a^{\nu^{r+s}}} \right\}$$

$(a > 1,\ r > 1,\ s > 0)$, für welche, wie gezeigt, schon:

$$\lim n \lg n \,.\, a_n$$

für gewisse Formen von n den Werth ∞ annimmt, was dann offenbar *a fortiori* auch für

$$\lim \left(L_\varkappa(n) \lg_\varkappa^\varrho n \,.\, a_n \right)$$

gilt, d. h. die sämmtlichen logarithmischen Convergenzkriterien versagen auch hier, zwar nicht in der Weise (wie bei den unmittelbar betrachteten Reihen), dass der fragliche Grenzwerth definitiv $= \infty$ wird, sondern so, dass er eine unendlich grosse obere Unbestimmtheitsgrenze besitzt.

Setzt man in der obigen Reihe $r = 1$, so wird die resultirende Reihe:

$$(29\text{b}) \qquad S' = \sum a'_\nu = \sum_1^\infty{}_\nu \left\{ \frac{\varepsilon_0^{(\nu)}}{\nu \cdot a^{\nu^{1+s}}} + \frac{\varepsilon_1^{(\nu)}}{\nu \cdot a^{\nu^{1+s}}} + \cdots + \frac{\varepsilon_\mu^{(\nu)}}{\nu \cdot a^{\nu^{1+s}}} \right\}$$

offenbar *divergent* (da die Summe oder Gliedergruppe sich nur um einen endlich bleibenden Factor von $\frac{1}{\nu}$ unterscheidet), während die Untersuchung von

$$\lim\left(L_\varkappa(n)\,.\,a_n'\right)$$

hier den Werth *Null* ergiebt, sobald man für a_n' das *Anfangsglied* einer Gruppe nimmt. Es versagen somit hier sämmtliche logarithmische Divergenzkriterien durch das Auftreten des Werthes Null als unterer Unbestimmtheitsgrenze.

Erscheint nun durch den Hinweis auf diese letzteren verhältnissmässig sehr einfachen Reihentypen S und S' das Gebiet derjenigen Reihen, für welche die gewöhnlichen Kriterien erster Art versagen, nicht unerheblich erweitert, so sollte meine Bemerkung von der Ueberschätzung jener Kriterien sich doch weniger auf diese immerhin exceptionellen Fälle, als vielmehr darauf beziehen, dass dieselben im Grunde genommen nur für Reihen mit *„im wesentlichen" abnehmenden* Gliedern brauchbar sind, d. h. genauer gesagt, für solche Reihen, bei denen die Schwankungen in der Ab- und Zunahme der Glieder gewisse Grenzen nicht überschreiten, dergestalt dass die Glieder der Reihe immer noch durchweg *über* bezw. *unter* den entsprechenden einer Reihe von der Form $\sum \frac{g}{L_\varkappa(\nu)}$ bezw. $\sum \frac{G}{L_\varkappa(\nu)\lg_\varkappa^\varrho \nu}$ liegen. Diese Eigenschaft hängt aber wiederum ganz wesentlich von der *Anordnung* der Glieder ab und kann, falls sie vorhanden, durch blosse Umordnung der Glieder derartig zerstört werden, dass jedes Divergenz- und Convergenzkriterium der gewöhnlichen logarithmischen oder auch jeder beliebigen anderen Skala versagen muss.

Die Richtigkeit dieser Behauptung bezüglich der *Convergenz*kriterien folgt ohne weiteres aus dem im Anfange dieses Paragraphen bewiesenen Hülfssatze: derselbe lehrt in der That — sobald man die dort mit $\varphi(n)$ bezeichnete Grösse so wählt, dass $\sum \frac{1}{\varphi(\nu)}$ *convergirt* — dass man durch Umordnung der Reihenglieder a_ν stets das Versagen des auf $\lim \varphi(n)\,.\,a_n$ bezüglichen Convergenzkriteriums herbeiführen kann. Um das Analoge für die *Divergenz*kriterien zu zeigen, beweise ich noch den folgenden ähnlichen Satz:

Es giebt keine positive Function $\varphi(\nu)$ von der Beschaffenheit, dass die Beziehung:

$$\lim \varphi(n)\,.\,a_{n+p} \geqq g > 0$$

eine nothwendige Bedingung für die Divergenz der Reihe $\sum a_\nu$ bildet. Vielmehr kann man für jede Function $\varphi(\nu)$ die Terme jeder beliebigen divergenten Reihe mit schliesslich verschwindenden Gliedern so anordnen, dass:

$$\lim \varphi(n) \, . \, a_{n+p}$$

unter anderen Werthen auch den Werth 0 *annimmt.**)

Beweis: Da $\lim a_n = 0$ sein soll, so muss jedenfalls $\lim \varphi(n) = \infty$ sein, wenn $\lim \varphi(n) \, . \, a_{n+p}$ von Null verschieden ausfallen soll. Man kann daher eine unbegrenzte Folge positiver ganzer Zahlen $n_0, n_1, \ldots, n_\lambda, \ldots$ so fixiren, dass die Grössen

$$\frac{1}{\varphi(n_1)}, \; \frac{1}{\varphi(n_2)}, \; \ldots, \; \frac{1}{\varphi(n_\lambda)}, \; \ldots$$

beständig abnehmen. Sei nun $\sum d_\nu$ eine beliebig vorgelegte *divergente* Reihe und $\lim d_n = 0$, so kann man aus der Folge der Grössen d_ν eine Partialreihe herausheben, deren Terme mit d'_λ bezeichnet und so ausgewählt werden sollen, dass:

$$d_0' \leqq \frac{\varepsilon_0}{\varphi(n_0)}, \; d_1' \leqq \frac{\varepsilon_1}{\varphi(n_1)}, \; \ldots, \; d_\lambda' \leqq \frac{\varepsilon_\lambda}{\varphi(n_\lambda)}, \; \ldots$$

wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\lambda, \ldots$ positive abnehmende Grössen mit dem Grenzwerthe Null bedeuten.

Bezeichnet man ferner die nach Aushebung der Reihe d_λ' übrig bleibenden Terme d_ν mit d_ν'' und setzt:

$$a_\nu = d_\nu'', \text{ wenn } \nu \textit{ nicht} \text{ von der Form } n_\lambda + p \text{ ist}$$

dagegen:

$$a_{n_\lambda + p} = d_\lambda'$$

so folgt erstens, dass $\sum a_\nu$ als eine blosse Umordnung von $\sum d_\nu$ divergirt, und zweitens, dass:

$$\lim \varphi(n_\lambda) a_{n_\lambda + p} \leqq \lim \varepsilon_\lambda = 0$$

wird — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist. —

Wenn nun auch aus diesen Betrachtungen deutlich hervorgeht, dass bei Reihen *mit beliebig ab- und zunehmenden Gliedern* die Skala der gewöhnlichen logarithmischen Kriterien oder irgend eine andere aufs Gerathewohl gebildete Skala im allgemeinen versagen muss, so soll damit doch keineswegs gesagt sein, dass nicht für *jede* irgendwie

---

*) Dieser Satz bildet mit dem zu Anfang dieses Paragraphen bewiesenen zusammen offenbar eine Ergänzung zu dem bekannten von Abel herrührenden Satze (Crelle's Journal Bd. 3, p. 80):

Es giebt keine Function $\varphi(\nu)$ von der Beschaffenheit, dass von den beiden Beziehungen:

$$\lim \varphi(n) \cdot a_{n+p} = 0,$$
$$\lim \varphi(n) \cdot a_{n+p} > 0$$

die erstere eine hinreichende Bedingung für die Convergenz, die letzte eine solche für die Divergenz von Σa_ν darstellt.

vorgelegte Reihe $\sum a_\nu$ *wirksame* Divergenz- bezw. Convergenzkriterien *existiren.* Denn bezeichnet $f(\nu)$ eine positive Function, welche der Bedingung genügt:

$$f(n) \sim \frac{1}{a_n}$$

so liefert ja der Ausdruck $\lim f(n) \,.\, a_n$ einen von Null und Unendlich verschiedenen Grenzwerth, stellt also unter allen Umständen ein *wirksames* Divergenz- oder Convergenzkriterium dar: aber dasselbe lehrt erst dann erkennen, ob $\sum a_\nu$ divergirt oder convergirt, wenn man über die Beschaffenheit von $\sum \frac{1}{f(\nu)}$ orientirt ist, was im wesentlichen darauf hinausläuft, dass man von vornherein wissen müsste, ob $\sum a_\nu$ divergirt oder convergirt. Mit anderen Worten: durch diesen *Existenz*beweis von stets wirksamen Kriterien ist für die wirkliche *Feststellung* der Divergenz bezw. Convergenz nichts gewonnen. Bei Reihen mit beliebig ab- und zunehmenden Gliedern wird man immer wesentlich auf Special-Untersuchungen von Fall zu Fall angewiesen sein. Insbesondere kann hier unter Umständen die Prüfung passender *Gliedergruppen* statt der einzelnen Glieder, mit anderen Worten die Bildung *zusammengesetzter Kriterien*, wie solche im § 1 schematisch beschrieben wurde, von Nutzen sein: doch lassen sich allgemeine Regeln hierüber nicht angeben.

§ 7.

Die Kriterien zweiter Art.

Als allgemeiner Typus der Kriterien zweiter Art ergab sich (§ 1, Gl. II):

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \lim P_n(D_n a_{n+p} - D_{n+1} a_{n+p+1}) < 0: \; \textit{Divergenz}, \\ \lim P_n(C_n a_{n+p} - C_{n+1} a_{n+p+1}) > 0: \; \textit{Convergenz}, \end{cases}$$

wo P_n einen ganz beliebigen positiven Factor (der für $n = \infty$ auch unendlich werden darf), D_ν^{-1} bez.w C_ν^{-1} das allg. Glied einer divergenten bezw. convergenten Reihe bezeichnet. Man erhält hieraus die gewöhnliche Form der Kriterien zweiter Art, wenn man setzt

$$P_n = \frac{1}{a_{n+p}} \quad \text{oder} \quad P_n = \frac{1}{a_{n+p+1}} \cdot$$

Bei der letzteren Wahl*) ergiebt sich:

*) Ich gebe der Form mit dem Quotienten $\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}$ vor derjenigen mit dem reciproken Werthe den Vorzug, weil bei den in der Praxis hauptsächlich vorkommenden Fällen, nämlich bei Reihen mit abnehmenden Gliedern, die Entwickelung jenes Quotienten nach Potenzen von n sich ein wenig einfacher zu gestalten pflegt, als diejenige des reciproken Werthes.

$$(\text{II a})\qquad \begin{cases} \lim\left(D_n \dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}\right) < 0: \text{ Divergenz,} \\ \lim\left(C_n \dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - C_{n+1}\right) > 0: \text{ Convergenz} \end{cases}$$

und man hat jetzt nur für D_ν bezw. C_ν die in §§ 3 und 4 aufgestellten typischen Formen einzusetzen, um die fertigen Kriterien zu erhalten. Die Einführung der betreffenden Ausdrücke für C_ν gestattet nun aber das *Convergenz*kriterium so umzuformen, dass dessen linke Seite mit derjenigen des *Divergenz*kriteriums identisch wird. Setzt man zur Abkürzung:

$$P_n(C_n a_{n+p} - C_{n+1} a_{n+p+1}) = k_n$$

sodass also die Beziehung:

$$\lim k_n > 0$$

Convergenz anzeigt, so wird, wenn man nach Satz VI des § 4:

$$C_\nu = D_\nu \cdot e^{\varrho M_{\nu+1}}, \quad D_\nu^{-1} = d_\nu = M_{\nu+1} - M_\nu$$

einführt, wobei die wesentlich *positive* Grösse *ϱ beliebig klein* genommen werden darf:

$$\begin{aligned} k_n = {} & P_n e^{\varrho M_{n+1}}(D_n a_{n+p} - D_{n+1} a_{n+p+1}) \\ & - P_n e^{\varrho M_{n+1}} D_{n+1}\, a_{n+p+1} \left\{ e^{\varrho(M_{n+2} - M_{n+1})} - 1 \right\} \end{aligned}$$

und wenn man jetzt über den willkürlichen Factor P_n so verfügt, dass man

$$P_n \cdot e^{\varrho M_{n+1}} a_{n+p+1} = 1$$

setzt:

$$k_n = D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} - \frac{e^{\varrho d_{n+1}} - 1}{d_{n+1}}.$$

Es ergiebt sich daher für $\sum a_\nu$ *Convergenz*, wenn:

$$(30)\qquad \lim\left(D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}\right) > \lim \frac{e^{\varrho d_{n+1}} - 1}{d_{n+1}}$$

wird.

Ist nun $\lim d_{n+1} = 0$, so besitzt die rechte Seite der Ungl. (30) den Grenzwerth ϱ (wie, beiläufig bemerkt, ohne weiteres aus den Ungleichungen (a) des § 2: $1 + x \leqq e^x \leqq \frac{1}{1-x}$ erkannt wird), wird also mit ϱ beliebig klein. Ist dagegen $\lim d_{n+1}$ endlich oder unbestimmt mit endlicher oberer Grenze, so kann man den fraglichen Grenzwerth

gleichfalls durch Wahl von ϱ beliebig klein machen $\Big($denn, aus $e^x \leqq \frac{1}{1-x}$ folgt: $\frac{e^{\varrho d_{n+1}}-1}{d_{n+1}} \leqq \frac{\varrho}{1-\varrho d_{n+1}}\Big)$. Somit erkennt man zunächst, dass die Beziehung:

$$\lim\left(D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}\right) > 0 \tag{31}$$

sicherlich die *Convergenz* der Reihe $\sum a_\nu$ anzeigt, sobald D_ν so gewählt wird, dass $\lim D_n$ *von Null verschieden* ist.*) Der Fall aber, dass $\lim D_\nu$ oder die untere Grenze von $\lim D_\nu$ den Werth *Null* hat, lässt sich unmittelbar auf den eben betrachteten zurückführen. Hat man nämlich — unter der eben genannten Voraussetzung:

$$\lim\left(D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}\right) \geqq k > 0,$$

so wähle man eine beliebige positive Zahl $k' < k$. Alsdann ist:

$$\lim\left\{D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - (D_{n+1}+k')\right\} \geqq k - k' > 0$$

und um so mehr:

$$\lim\left\{(D_n+k') \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - (D_{n+1}+k')\right\} \geqq k - k' > 0$$

---

*) Unterwirft man die D_ν von vornherein dieser Beschränkung, so kann man nach § 4 für C_ν auch eine der Formen

$$D_\nu e^{\varrho M_\nu}, \quad D_\nu M_\nu^\varrho, \quad D_\nu M_{\nu+1}^\varrho$$

einführen. Der letzte dieser Ausdrücke liefert dann bei analoger Behandlung statt des Grenzwerthes auf der rechten Seite von Gl. (30) den folgenden:

$$\lim D_{n+1}\left\{\left(\frac{M_{n+2}}{M_{n+1}}\right)^\varrho - 1\right\} = \lim \frac{(1+d_{n+1})^\varrho - 1}{d_{n+1}}$$

welcher — für $\lim d_{n+1} = 0$ — wiederum $= \varrho$ und — falls $\lim d_{n+1} > 0$ — immerhin mit ϱ beliebig klein wird. Man wird also wiederum auf Gleichung (31) geführt. —

Die beiden anderen Ausdrücke für C_ν geben in ähnlicher Weise das zu Gl. (31) analoge Convergenzkriterium, in welchem statt des Quotienten $\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}$ dessen reciproker Werth auftritt. Dasselbe lautet:

$$\lim\left(D_n - D_{n+1}\frac{a_{n+p+1}}{a_{n+p}}\right) > 0.$$

woraus jetzt nach dem oben gesagten die Convergenz von $\sum a_\nu$ folgt, da ja $\lim (D_n + k')$ von Null verschieden.*)

Das Convergenzkriterium (31) gilt somit für ganz beliebige D_ν *ohne alle Einschränkung.*

Durch Combination desselben mit dem ursprünglichen *Convergenzkriterium* (IIa) ergiebt sich, wenn $\varphi(\nu)$ eine in ganz beliebiger Weise von ν abhängige *positive* Grösse bedeutet (welche ja wiederum entweder zu den C_ν oder zu den D_ν gehören muss), das *allgemeinste Convergenzkriterium zweiter Art*, nämlich:

Die Reihe $\sum a_\nu$ ist convergent, wenn eine positive Grösse $\varphi(\nu)$ existirt, derart, dass:

$$\text{(I)} \qquad \lim \left\{ \varphi(n) \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - \varphi(n+1) \right\} > 0.$$

Dies ist nun aber das Kummer'sche Convergenzkriterium,**) als dessen Analogon unter den Kriterien erster Art sich früher das Kriterium (H) ergab. Man kann die Richtigkeit dieses durch die geradezu frappirende Allgemeinheit seiner Fassung äusserst merkwürdigen Kriteriums *a posteriori* leicht in weit einfacherer Weise darthun:***) indessen scheint mir die wahre Grundlage desselben und

---

*) Ist geradezu $\lim D_n = 0$, so erkennt man übrigens ohne weiteres, dass die Ungleichung (31) nur dann bestehen kann, wenn $\lim \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} = \infty$ ist, in welchem Falle also die Reihe Σa_ν gerade den *stärksten* Grad von Convergenz besitzt.

**) *Crelle's Journal*, *Bd.* 13, *p.* 172. Die von Herrn Kummer hinzugefügte Bedingung $\lim \varphi(n) \cdot a_n = 0$ hat zuerst Herr Dini (a. a. O. Art. 19) als überflüssig erkannt, später hat auch Du Bois Reymond (a. a. O. Art. VII) die Richtigkeit des fraglichen Kriteriums *ohne* jene Nebenbedingung erwiesen. Eine sehr einfache und durchsichtige Formulirung dieses Beweises findet sich bei Stolz, Vorl. über allg. Arithmetik, Bd. I, p. 259.

***) Vgl. die oben citirte Stelle bei Stolz; ferner: Jensen (Zeuthen Tidskrift T. II, p. 63). Herr Jensen hat nämlich das fragliche Kriterium, obschon dasselbe längst in alle grösseren Compendien übergegangen ist, ein halbes Jahrhundert nach Herrn Kummer's Publication von neuem entdeckt und dieser Entdeckung solche Wichtigkeit beigemessen, dass er dieselbe gleich an *drei* verschiedenen Stellen veröffentlichte — ausser a. a. O.: Comptes rendus, T. 106 (1888, I) p. 729 und: Nouv. Ann. de Math., 3ième Série, T. VII, p. 196; dazu kommt noch ein Referat in Teixeira's Jornal etc., T. VIII, p. 157. Auf eine Replik des Herrn Cesaro (Comptes rendus, T. 106, p. 1142), dass jenes Kriterium nichts weniger als neu sei, hat sodann Herr Jensen zum mindesten die Bemerkung, dass die Kummer'sche Bedingung $\lim \varphi(n)\, a_n = 0$ überflüssig sei, als *sein* specielles Eigenthum reklamirt (a. a. O. p. 1520). Dem hat nun

seine Stellung innerhalb der gesammten Convergenztheorie erst durch die hier gegebene Ableitung zu voller Evidenz zu kommen. —

Verbindet man ferner das Convergenzkriterium (31) mit dem *Divergenz*kriterium (II a), so erhält man das disjunctive Doppelkriterium zweiter Art:

$$\text{(K)} \qquad \lim\left(D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}\right) \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz}, \\ > 0: \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Um hieraus wiederum ganze Skalen von derartigen Kriterien abzuleiten, hat man für D_ν^{-1} successive das allgemeine Glied von immer *schwächer divergirenden* Reihen, also für D_ν immer *schneller zunehmende* Grössen einzusetzen. Dass auf diese Weise für das *Divergenz*kriterium eine beständige Verbesserung erzielt wird, liegt auf der Hand. Bezüglich des *Convergenz*kriteriums hat man nur zu beachten, dass dasselbe in seiner ursprünglichen Fassung (IIa), nämlich:

$$\lim\left(C_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - C_{n+1}\right) > 0$$

offenbar um so wirksamer sein muss, je *langsamer* die Grössen C_ν zunehmen, weil ja die zur Vergleichung für $\sum a_\nu$ dienende Reihe $\sum C_\nu^{-1}$ dann um so *schwächer convergirt.* Transformirt man nun, wie geschehen, dieses Convergenzkriterium dadurch, dass man C_ν durch $e^{\varrho M_{\nu+1}}$ ersetzt, so entspricht nach Satz VI (§ 3) einer *schwächeren Convergenz* der Reihe $\sum C_\nu^{-1}$ auch eine *schwächere Divergenz* der Reihe $\sum D_\nu^{-1}$, d. h. einer *langsameren* Zunahme der Grössen C_ν eine *schnellere* Zunahme der Grössen D_ν, und die Einführung von solchen *schneller* zunehmenden Grössen D_ν muss daher auch eine *Verbesserung* des *Con*vergenzkriteriums (I) hervorbringen. Der wahre innere Grund dieser auf den ersten Blick doch wohl auffallend erscheinenden Thatsache dürfte durch die hier gegebene Erklärung erst völlig deutlich geworden sein.

Um nun zunächst ein Anfangskriterium für die aus (I) zu bildende Skala zu gewinnen, setze ich:

$$D_\nu^{-1} = M_{\nu+1} - M_\nu$$

wobei — nach dem früher gesagten — die D_ν^{-1} d. h. die Glieder der zur Vergleichung herangezogenen divergenten Reihe ohne wesentliche

---

wiederum Du Bois-Reymond (a. a. O. T. 107, p. 941) mit Hinweis auf seine Abhandlung über Convergenztheorie widersprochen. Man vergl. indessen die vorige Anmerkung.

Beschränkung der Allgemeinheit so angenommen werden dürfen, dass dieselben nicht ins Unendliche wachsen, was für die Grössen M_ν offenbar die Bedingung:

$$M_{n+1} \cong M_n$$

involvirt. Da dann ferner — nach § 3 die Terme

$$\frac{1}{D_\nu^{(\varkappa)}} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_{\nu+1})} = \frac{1}{D_\nu L_\varkappa(M_{\nu+1})}$$

für $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ eine Skala von beständig schwächer divergirenden Reihen definiren, so werden die Beziehungen:

$$(\mathrm{K}') \quad \begin{cases} (1)\ \lim \lambda_n = \lim\left(D_n \dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}\right) \lesseqgtr 0, & \text{wo also: } D_\nu = \dfrac{1}{M_{\nu+1} - M_\nu}, \\ (2)\ \lim \lambda_n^{(\varkappa)} = \lim\left(D_n^{(\varkappa)} \dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}^{(\varkappa)}\right) \lesseqgtr 0, & \text{,, \quad ,,} \quad D_\nu^{(\varkappa)} = D_\nu L_\varkappa(M_{\nu+1}) \end{cases}$$

die gesuchte Skala von Kriterien zweiter Art darstellen.

Da indessen die Art der Verschärfung, welche beim Uebergange von irgend einem dieser Kriterien zum nächstfolgenden erzielt wird, hier keineswegs so unmittelbar ersichtlich ist, wie bei den Kriterien erster Art, so soll die Beziehung zwischen $\lim \lambda_n$ und $\lim \lambda_n^{(0)}$, sowie allgemein diejenige zwischen $\lambda_n^{(\varkappa)}$ und $\lambda_n^{(\varkappa+1)}$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$) noch genauer untersucht werden. Aus:

$$\lambda_n = D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1},$$

$$\lambda_n^{(\varkappa)} = D_n M_{n+1} \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} M_{n+2}$$

folgt durch Elimination von $\dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}$:

$$\lambda_n^{(0)} - M_{n+1}\lambda_n = D_{n+1}(M_{n+2} - M_{n+1}) \text{ d. h. } = -1$$

also:

$$(32) \qquad \lambda_n^{(0)} = -1 + M_{n+1}\lambda_n$$

d. h.: Ist $\lim \lambda_n$ *nicht* Null und von bestimmtem Vorzeichen (wenn auch nicht nothwendig selbst bestimmt), liefert somit das Kriterium $\lim \lambda_n$ eine unzweideutige Entscheidung, so wird offenbar $\lim \lambda_n^{(0)}$ *unendlich* mit dem Vorzeichen von $\lim \lambda_n$, giebt somit dieselbe Auskunft wie λ_n gleichsam in vergrössertem Massstabe.

Ist dagegen $\lim \lambda_n = 0$ oder unbestimmt mit der einen Unbest.-Grenze Null, in welchem Falle also das betreffende Kriterium ver-

sagt*), so wird $\lim \lambda_n^{(0)}$ offenbar stets ein ***bestimmtes Vorzeichen*** besitzen, wenn nicht gerade $\lim M_n \lambda_n = 1$ ist oder so oscillirt, dass einer von den verschiedenen Werthen dieses Ausdruckes $= 1$ ist. Das Kriterium $\lim \lambda_n^{(0)}$ liefert also ausser in dem letztgenannten Falle eine Entscheidung, und hierin liegt die *Verbesserung*, welche dasselbe im Vergleiche mit $\lim \lambda_n$ darbietet.

Wenn endlich $\lim \lambda_n$ zwischen zwei Werthen *mit verschiedenem Vorzeichen* oscillirt, so hat $\lim \lambda_n^{(0)}$ die Unbest.-Grenzen $\pm \infty$, versagt also gleichfalls.

---

*) Ist λ_n *negativ* unbestimmt mit der Unbest.-Grenze ***Null*** oder wird geradezu $\lim \lambda_n = 0$ in der Weise, dass die Annäherung an Null ausschliesslich von der Seite der *negativen* Zahlen stattfindet, so kann man nach einer im § 1 an die allgemeine Form der Divergenzkriterien (II) geknüpften Bemerkung noch mit Sicherheit auf die *Divergenz* von Σa_ν schliessen. Ein ähnlicher Schluss bezüglich der *Convergenz* ist dagegen *nicht* gestattet, falls etwa $\lim \lambda_n$ von der Seite der *positiven* Zahlen gegen Null convergirt oder die Null zur Unbest.-Grenze hat: denn der entsprechende Schluss bei dem *Convergenz*kriterium (II) des § 1 beruhte *wesentlich* darauf, dass dort, an Stelle der in λ_n auftretenden Grössen D_ν, Grössen C_ν standen und über den Factor P_n — welcher zur Ableitung des *Convergenz*kriteriums λ_n vollständig bestimmt werden musste — noch willkürlich verfügt werden konnte.

Dies ist nun der Punkt, wo das Kummer'sche *Divergenzkriterium* in Wirksamkeit tritt, welches sich mit Benützung der hier angewendeten Bezeichnungen folgendermassen formuliren lässt:

$$\text{Ist}\quad 1)\ \lim D_n a_{n+p} = 0,$$
$$2)\ \lim \lambda_n = 0,$$
$$3)\ \lim \frac{D_n a_{n+p}}{\lambda_n} > 0,$$

so *divergirt* die Reihe Σa_ν.

(NB. Bei der von Herrn Kummer gegebenen Formulirung steht an Stelle der Grösse D_ν eine *beliebige* positive Grösse, die etwa wiederum $\varphi(\nu)$ genannt werden möge. Gehört nun aber $\varphi(\nu)$ der Classe der Zahlen C_ν an, so zieht die Bedingung 1): $\lim \varphi(n)\, a_{n+p} = 0$ ohne Weiteres die *Convergenz* von Σa_ν nach sich — d. h. in diesem Falle kann die Bedingung 3) unter keinen Umständen erfüllt sein. Mit andern Worten: man hat bei der Anwendung des Kummer'schen Divergenzkriteriums für die Zahlen $\varphi(\nu)$ gar keine andere Wahl als die Classe der Zahlen D_ν).

Das obige Kummer'sche *Divergenzkriterium*, welches bei seiner Anwendung die Erfüllung von nicht weniger als *drei* Bedingungen erfordert, ist *kein allgemeines* Kriterium, wie das entsprechende *Convergenzkriterium* oder das *allgemeine Divergenzkriterium* zweiter Art, (K); dasselbe stellt sich vielmehr als ein *specielles Ergänzungskriterium* zu dem allgemeinen Convergenzkriterium dar und konnte demgemäss unter den im Texte entwickelten *allgemeinen* Kriterien keinen Platz finden. In Wahrheit wird es aber durch das allgemeine Divergenzkriterium zweiter Art mit seinen Verschärfungen — s. Formel (K') — vollständig überflüssig gemacht.

Zur Ableitung des analogen Resultates für zwei beliebige Kriterien $\lambda_n^{(\varkappa)}$, $\lambda_n^{(\varkappa+1)}$ der Serie $(K', 2)$ hat man für $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\lambda_n^{(\varkappa)} = D_n L_\varkappa(M_{n+1}) \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} L_\varkappa(M_{n+2}),$$

$$\lambda_n^{(\varkappa+1)} = D_n L_{\varkappa+1}(M_{n+1}) \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} L_{\varkappa+1}(M_{n+2})$$

und hieraus:

$$\lambda_n^{(\varkappa+1)} - \lg_{\varkappa+1}(M_{n+1}) \cdot \lambda_n^{(\varkappa)}$$
$$= - D_{n+1} L_\varkappa(M_{n+2}) \left\{ \lg_{\varkappa+1} M_{n+2} - \lg_{\varkappa+1} M_{n+1} \right\}.$$

Da aber nach Formel (h) des § 2:

$$\lg_{\varkappa+1} M_{n+2} - \lg_{\varkappa+1} M_{n+1} \cong \frac{M_{n+2} - M_{n+1}}{L_\varkappa(M_{n+2})}$$

d. h.

$$\lim D_{n+1} L_\varkappa(M_{n+2}) \left\{ \lg_{\varkappa+1} M_{n+2} - \lg_{\varkappa+1} M_{n+1} \right\} = 1,$$

so wird:

$$(33) \qquad \lim \lambda_n^{(\varkappa+1)} = -1 + \lim \lg_{\varkappa+1}(M_{n+1}) \cdot \lambda_n^{(\varkappa)}$$

und die Vergleichung dieser Beziehung mit Gl. (22) zeigt, dass beim Uebergange von $\lambda_n^{(\varkappa)}$ zu $\lambda_n^{(\varkappa+1)}$ eine ganz analoge Verbesserung stattfindet, wie bei demjenigen von λ_n zu $\lambda_n^{(0)}$.

Hiernach besitzt die Skala (K') von Kriterien zweiter Art die folgenden Eigenschaften:

1) Wenn irgend *ein* Kriterium der Skala eine Entscheidung liefert, so gilt das gleiche von allen *folgenden* Kriterien.

2) Versagt irgend ein Kriterium in der Weise, dass die *Null* als Grenzwerth oder als Unbestimmtheitsgrenze zum Vorschein kommt, so *kann* das folgende Kriterium eine Entscheidung liefern*).

3) Resultirt für irgend *ein* Kriterium ein unbestimmter *Werth mit Unbest.-Grenzen verschiedenen Vorzeichens*, dann gilt das gleiche für *alle folgenden* Kriterien, d. h. dann versagt *die ganze Scala*.

---

*) Man kann in diesem Falle, statt das betreffende „folgende" Kriterium wirklich zu bilden, auf Grund der Gleichungen (32), (33) etwas einfacher auch so schliessen:

Ist $\lim \lambda_n = 0$, *so hat man:*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Divergenz}\\ \textit{Convergenz}\end{array}\right\}\text{wenn: } \lim M_{n+1}\lambda_n \left\{\begin{array}{l}<1\\ >1.\end{array}\right.$$

Desgleichen, wenn $\lim \lambda_n^{(\varkappa)} = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Divergenz}\\ \textit{Convergenz}\end{array}\right\}\text{wenn: } \lim \lg_{\varkappa+1}(M_{n+1}) \cdot \lambda_n^{(\varkappa)} \left\{\begin{array}{l}<1\\ >1.\end{array}\right.$$

Hieraus geht insbesondere deutlich hervor, dass man *keineswegs* von irgend einem bestimmten Anfangskriterium ausgehend durch hinlängliche Fortsetzung der betreffenden Scala immer zu einer Entscheidung gelangen muss. Vielmehr erscheint die Möglichkeit einer solchen Entscheidung definitiv ausgeschlossen, sobald der *sub* 3) erwähnte Fall eintritt.

Es kommt also hierbei *sehr wesentlich* auf eine passende Wahl des *Anfangs*kriteriums an. Dass es im übrigen auch hier wieder für *jede* beliebige Reihe $\sum a_\nu$ ein solches Kriterium geben *muss*, welches eine unzweideutige Entscheidung liefert, lässt sich leicht zeigen.

Sei nämlich zunächst $\sum a_\nu$ *divergent*, so bestimme man M_ν aus der Gleichung:

$$a_{\nu+p+1} = M_{\nu+1} - M_\nu$$

und setze;

$$D_{\nu+1}^{-1} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}},$$

wo dann $\sum D_\nu^{-1}$ thatsächlich divergirt. Hierdurch wird:

$$\lim \left(D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} \right)$$

$$= \lim \left(\frac{M_n}{M_n - M_{n-1}} \cdot \frac{M_n - M_{n-1}}{M_{n+1} - M_n} - \frac{M_{n+1}}{M_{n+1} - M_n} \right) = -1$$

zeigt also unzweideutig die *Divergenz* von $\sum a_\nu$ an.

Wenn dagegen $\sum a_\nu$ *convergirt*, so kann man (nach Satz III, § 3) M_ν bestimmen aus der Gleichung:

$$a_{n+p+1} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu}$$

und wenn sodann:

$$D_{\nu+1}^{-1} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}$$

gesetzt wird, so ergiebt sich:

$$\lim \left(D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} \right)$$

$$= \lim \left(\frac{M_{n-1}}{M_n - M_{n-1}} \cdot \frac{M_n - M_{n-1}}{M_n M_{n-1}} \cdot \frac{M_{n+1} \cdot M_n}{M_{n+1} - M_n} - \frac{M_n}{M_{n+1} - M_n} \right) = +1$$

d. h. der betreffende Ausdruck giebt in diesem Falle ein wirksames *Convergenz*kriterium.

Selbstverständlich ist auch hier durch diesen *Existenz*beweis für die wirkliche Feststellung der Divergenz oder Convergenz einer beliebig

vorgelegten Reihe absolut nichts gewonnen, da ja zur Bildung der obigen Kriterien die Beschaffenheit der fraglichen Reihe bekannt sein muss.

Setzt man in der allgemeinen Kriterienskala (K′) speciell $M_\nu = \nu - 1$, also $D_\nu = 1$, so ergeben sich die bekannten Kriterien:

$$(\mathrm{L}) \begin{cases} (1)\ \lim \lambda_n = \lim\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - 1\right) \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz} \\ > 0: \textit{Convergenz.} \end{cases} \\ (2)\ \lim \lambda_n^{(\varkappa)} = \lim\left(L_\varkappa(n)\,\dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - L_\varkappa(n+1)\right) \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz} \\ > 0: \textit{Convergenz.} \end{cases} \end{cases}$$

Das Anfangskriterium ist das bekannte Fundamentalkriterium zweiter Art, welches Cauchy direct durch Vergleichung von $\sum a_\nu$ mit einer geometrischen Progression abgeleitet hat*). Von den Kriterien der Serie (L, 2) ist das erste, welches sich auch auf die Form:

$$(\mathrm{L}', 1) \qquad \lim n\left(\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - 1\right) \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz} \\ > 1: \textit{Convergenz} \end{cases}$$

bringen lässt, das Raabe'sche**), die übrigen rühren (abgesehen von einem unwesentlichen Unterschied in der Form) von Bertrand her***).

Aus der zuvor angestellten Untersuchung über den Werth der allgemeinen Kriterienskala (K′) ergiebt sich die folgende, für die praktische Anwendung der Kriterien (*L*) wichtige Bemerkung: Nimmt $\lim \lambda_n = \lim\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - 1\right)$ sowohl negative als positive Werthe an,

*) Anal. algébr. p. 134.

**) Zeitschrift für Physik und Mathematik von Baumgartner und Ettinghausen, T. X. — Das betreffende Kriterium wurde zum zweiten Male entdeckt von Duhamel (Journ. de Mathém. T. IV, p. 214; vgl. auch: T. VI, p. 85).

***) Journ. de Mathém. T. VII, p. 43; vgl. auch: Bonnet, Journ. de Mathém. T. VIII, p. 89, und Paucker, Crelle's Journal, Bd. 42, p. 143. —

Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, dass die Gauss'schen Kriterien (Disquis. circa seriem infinitam etc. — Ges. Werke, Bd. III, p. 138) mit Ausnahme eines einzigen besonderen Falles sich unmittelbar aus dem *ersten* Kriterium der Serie (L, 2) — dem Raabe'schen — ableiten lassen, worauf schon Herr Kummer (a. a. O. p. 174) aufmerksam gemacht hat, und dass jener eine noch übrig bleibende Fall sich mit Hülfe des *zweiten* Kriteriums der Serie (L, 2) — also des ersten Bertrand'schen — sich erledigen lässt (vgl. Schlömilch in dessen Zeitschr. für Math. Bd. X, p. 74). — Das gleiche gilt übrigens im Wesentlichen auch von den Kriterien des Herrn Weierstrass (Crelle's Journal, Bd. 51, p. 22), welche, auf Reihen mit complexen Gliedern sich beziehend, jene Gauss'schen als specielle Fälle umfassen (vgl. Stolz, Vorl. über allg. Arith. Bd. 1, p. 267, Bd. II, p. 145).

d. h. liegt der Quotient $\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}$, wie gross man auch n nehmen möge, um eine angebbare Grösse theils unterhalb und theils oberhalb der Einheit, so versagt nicht bloss das *Anfangs*kriterium (d. h. das Cauchy'sche Fundamentalkriterium) sondern *alle* Kriterien der Scala (L). Ihre Anwendung kommt also ein für allemal nur dann in Frage, wenn $\lim \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}$ entweder geradezu $= 1$ ist oder die Einheit zur Unbestimmtheitsgrenze hat.

Ist insbesondere $\lim \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} = 1$, also:

$$\lim \lambda_n = \lim \left(\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - 1 \right) = 0,$$

so hängt die Divergenz oder Convergenz der Reihe zunächst von dem Ausfall des Raabe'schen Kriteriums (L', 1) ab. Liefert dieses den Grenzwerth 1, d. h. ist:

$$\lim \lambda_n^{(0)} = \lim \left(n \cdot \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - (n+1) \right) = 0,$$

so kann man nach Gl. (33) — indem man dort $\varkappa = 0$, $M_\nu = \nu - 1$ setzt — das nächste in Frage kommende, auf $\lim \lambda_n^{(1)}$ bezügliche Kriterium auch durch das folgende ersetzen:*)

$$\lim \lg n \cdot \lambda_n^{(0)} = \lim \lg n \left(n \cdot \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - (n+1) \right) \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz} \\ > 1: \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

*) In diesem Kriterium ist dasjenige, welches Herr Cahen (*Nouv. Ann. de Mathém.* 3^{ième} *Série*, *T. V*, *p.* 535) als Ergänzung zu dem Raabe'schen Kriterium aufgestellt hat, als *Theil* enthalten. Dasselbe lautet mit Anwendung der hier gebrauchten Bezeichnungen:

„*Ist*

$$\lim \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \right) = 0,$$

so **divergirt** $\sum a_\nu$ *allemal, wenn*

$$\lim n \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \right) \textit{ nicht } \infty.\text{“}$$

In der That: Hat man

$$\lim n \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \right) \leqq G,$$

so folgt:

$$\lim \lg n \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \right) \leqq 0,$$

sodass sich also mit Hülfe des im Texte gegebenen Kriteriums Divergenz ergiebt.

Und allgemein: Findet man, dass für irgend einen Werth $\varkappa$:

$$\lim \lambda_n^{(\varkappa)} = \lim \left(L_\varkappa(n) \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - L_\varkappa(n+1) \right) = 0,$$

so hängt die Beschaffenheit der Reihe $\sum a_\nu$ von den Beziehungen ab:

$$(\mathrm{L}',2) \qquad \lim \lg_{\varkappa+1} n \cdot \lambda_n^{(\varkappa)}$$

$$= \lim \lg_{\varkappa+1} n \left(L_\varkappa(n) \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - L_\varkappa(n+1) \right) \begin{cases} < 1: & \textit{Divergenz} \\ > 1: & \textit{Convergenz.} \end{cases}$$

Die bisher betrachteten Kriterien zweiter Art gehören nach dem im § 1 Gesagten ausschliesslich dem *einfachsten* Typus dieser Kategorie an, und man erhält andere Formen solcher Kriterien, sobald man statt der in Betracht kommenden Grössen passende monotone Functionen derselben einführt.

Um gleich wieder disjunctive Kriterien zu erhalten, werde nach Analogie von:

$$C_\nu = D_\nu e^{\varrho M_{\nu+1}} \qquad (\varrho > 0)$$

in dem Divergenzkriterium D_ν ersetzt durch:

$$D_\nu \cdot e^{\varrho M_{\nu+1}} \qquad (\varrho \leqq 0).$$

Alsdann ergiebt sich aus den von irgend einer bestimmten Stelle ν ab als gültig angenommenen Beziehungen:

$$\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} e^{\varrho(M_{\nu+2} - M_{\nu+1})} \begin{cases} \textit{Divergenz} & \text{für } \varrho \leqq 0 \\ \textit{Convergenz} & \text{für } \varrho > 0 \end{cases}$$

und daher, wenn wiederum $F(x)$ eine monotone Function mit den früher angegebenen Eigenschaften bedeutet:

$$F\left(\frac{D_\nu a_{\nu+p}}{D_{\nu+1} a_{\nu+p+1}} \right) \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} F(e^{\varrho D_{\nu+1}^{-1}}) \begin{cases} \textit{Divergenz} & \text{für } \varrho \leqq 0 \\ \textit{Convergenz} & \text{für } \varrho > 0. \end{cases}$$

Um die rechts auftretende Grösse ϱ zu isoliren, erscheint es wiederum am einfachsten $F(x) = \lg x$ zu setzen, und man erhält auf diese Weise, wenn man noch berücksichtigt, dass ϱ in jedem Falle beliebig klein genommen werden darf, durch Uebergang zur Grenze:

$$(\mathrm{M}) \qquad \lim D_{n+1} \lg \frac{D_n a_{n+p}}{D_{n+1} a_{n+p+1}} \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz} \\ > 0: & \textit{Convergenz} \end{cases}$$

als die gesuchte neue Form der disjunctiven Kriterien zweiter Art. Die D_ν unterliegen hierbei *keinerlei* besonderer Beschränkung. Schliesst man dagegen von vornherein wieder solche D_ν aus, für welche $\lim D_n$ durchweg oder zum Theil verschwindet, so hätte man auch von der Form:

$$C_\nu = D_\nu \cdot e^{\varrho M_\nu} \quad \text{(s. Gl. (19), § 4)}$$

ausgehen können, wobei man an Stelle des Kriteriums (M) das folgende erhalten hätte:

$$\text{(N, 1)} \qquad \lim D_n \lg \frac{D_n a_{n+p}}{D_{n+1} D_{n+p+1}} \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz} \\ > 0: \textit{Convergenz.} \end{cases}$$

Ersetzt man hier wiederum D_ν durch $D_\nu L_\varkappa(M_{\nu+1})$, so ergiebt sich zu dem Anfangskriterium (N, 1) die folgende Scala von ähnlichen Kriterien:

$$\text{(N, 2)} \quad \lim D_n \cdot L_\varkappa(M_{n+1}) \lg \frac{D_{n+1} L_\varkappa(M_{n+1}) a_{n+p}}{D_n L_n(M_{n+2}) a_{n+p+1}} \begin{cases} <0: \textit{Divergenz} \\ >0: \textit{Convergenz,} \end{cases}$$

(wo $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ gesetzt werden kann). Für $M_\nu = \nu - 1$, also $D_\nu = 1$ resultirt aus (N, 1), (N, 2) die folgende speciellere Scala:

$$\text{(O)} \quad \begin{cases} (1) \ \lim \lg \dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz} \\ > 0: \textit{Convergenz.} \end{cases} \\[2ex] (2) \ \lim L_\varkappa(n) \cdot \lg \dfrac{L_\varkappa(n) \cdot a_{n+p}}{L_\varkappa(n+1) \cdot a_{n+p+1}} \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz} \\ > 0: \textit{Convergenz.} \end{cases} \end{cases}$$

Das Anfangskriterium ist offenbar gleichbedeutend mit:

$$\lim \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} \lesseqgtr 1,$$

also mit dem Cauchy'schen Fundamentalkriterium.

Von den Kriterien der Serie (O, 2) lässt sich das erste, nämlich:

$$\lim n \lg \frac{n a_{n+p}}{(n+1) \cdot a_{n+p+1}} \lesseqgtr 0$$

mit Hülfe der Beziehung:

$$\lim n \lg \frac{n}{n+1} = - \lim \lg \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = - \lg e = -1$$

auch in die Form setzen:

$$\lim n \lg \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz} \\ > 1: \textit{Convergenz} \end{cases}$$

und wurde thatsächlich in dieser Form von Schlömilch aufgestellt. Dieses Kriterium — welches genau dieselbe Tragweite, wie das Raabe'sche besitzt*) — steht, wie es bisher wohl den Anschein hatte, keineswegs isolirt da, gehört vielmehr, wie sich hier ergiebt, einem ganz allgemeinen Typus und innerhalb desselben der speciellen Scala (O, 2) an, deren weitere Glieder in Bezug auf ihre Tragweite den Bertrand'schen Kriterien der Scala (L, 2) äquivalent sind.*)

---

*) Vgl. hierüber den folgenden Paragraphen.

Das in (M) enthaltene Convergenzkriterium lässt sich schliesslich noch in der Weise verallgemeinern, dass es als ein Parallelkriterium zu dem Kummer'schen erscheint. Da nämlich mit der Reihe $\sum C_\nu^{-1}$ offenbar auch die mit dem allgemeinen Gliede

$$\frac{1}{C_\nu e^{\varrho \mathfrak{M}_{\nu+1}}}, \quad \text{wo:} \quad \mathfrak{M}_{\nu+1} - \mathfrak{M}_\nu = C_\nu^{-1}, \qquad \varrho > 0$$

convergirt, so ergiebt sich für die Reihe der a_ν:

$$\text{Convergenz, wenn:} \quad \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} > \frac{C_{\nu+1}}{C_\nu} e^{\varrho(\mathfrak{M}_{\nu+2} - \mathfrak{M}_{\nu+1})}$$

$$\text{d. h.:} \quad \frac{C_\nu a_{\nu+p}}{C_{\nu+1} a_{\nu+p+1}} > e^{\varrho C_{\nu+1}^{-1}}$$

also, wenn man logarithmirt und zur Grenze übergeht:

$$(34) \qquad \lim C_{n+1} \lg \frac{C_\nu a_{n+p}}{C_{n+1} a_{n+p+1}} > \varrho > 0.$$

Durch Combination dieses Convergenzkriteriums mit dem in (M) enthaltenen ergiebt sich — wenn $\varphi(\nu)$ wieder eine beliebige positive Function bedeutet:

Die Reihe $\sum a_\nu$ *convergirt, wenn für irgend eine positive Grösse* $\varphi(n)$

$$(\mathrm{P}) \qquad \lim \varphi(n+1) \lg \frac{\varphi(n)\, a_{n+p}}{\varphi(n+1)\, a_{n+p+1}} > 0 \text{ —}$$

ein Kriterium, dessen vollständige Analogie mit dem Kummer'schen evident ist. —

§ 8.

Beziehungen der Kriterien zweiter Art unter einander und zu denjenigen erster Art.

Wie bereits im Anschlusse an die Kriterien (O) bemerkt wurde, besitzen dieselben die nämliche Tragweite, wie die bekannten Kriterien zweiter Art der Skala (L). Um die allgemeinste, dieser Behauptung zu Grunde liegende Beziehung zu eruiren, betrachte ich die Grenzwerthe der beiden Ausdrücke:

$$(35) \qquad \begin{cases} u_\nu = \varphi(\nu) \dfrac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - \varphi(\nu+1), \\[2ex] v_\nu = \varphi(\nu+1) \lg \dfrac{\varphi(\nu)\, a_{\nu+p}}{\varphi(\nu+1)\, a_{\nu+p+1}}. \end{cases}$$

Hierbei soll $\varphi(\nu)$ wesentlich positiv und $\lim \varphi(n)$ *entweder* als *endlich und bestimmt oder* als *unendlich gross* angenommen werden (die Fälle:

$\lim \varphi(n) = 0$ oder unbestimmt — bieten kein besonderes Interesse). Da man im ersten dieser beiden Fälle ohne Beschränkung der Allgemeinheit offenbar $\lim \varphi(n) = 1$ annehmen darf, so wird bei dieser Annahme:

$$(36) \qquad \begin{cases} \lim u_n = \lim \left(\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - 1\right), \\ \lim v_n = \lim \lg \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}, \end{cases}$$

d. h.

$$(37) \qquad \begin{cases} \lim v_n = \lim \lg(1 + u_n), \\ \lim u_n = \lim \left(e^{v_n} - 1\right), \end{cases}$$

woraus ohne Weiteres erkannt wird, dass in diesem Falle $\lim u_n$ und $\lim v_n$ stets gleiches Vorzeichen besitzen, bezw. gleichzeitig verschwinden oder unbestimmt werden.

Sei jetzt zweitens $\lim \varphi(n) = \infty$, so mögen — um gleich den allgemeinsten Fall in's Auge zu fassen — A und B die Unbestimmtheitsgrenzen von $\lim u_n$ bedeuten. Alsdann muss sich zu einer beliebig klein anzunehmenden Grösse $\varepsilon > 0$ eine positive ganze Zahl m bestimmen lassen, dergestalt dass für $\nu \geqq m$:

$$A - \varepsilon < \varphi(\nu)\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - \varphi(\nu+1) < B + \varepsilon$$

und daher:

$$\varphi(\nu+1)\lg\left(1 + \frac{A-\varepsilon}{\varphi(\nu+1)}\right) < \varphi(\nu+1)\lg\frac{\varphi(\nu)\,a_{\nu+p}}{\varphi(\nu+1)\,a_{\nu+p+1}}$$
$$< \varphi(\nu+1)\lg\left(1 + \frac{B+\varepsilon}{\varphi(\nu+1)}\right).$$

Da nun allgemein für $-1 \leqq z \leqq \infty$:

$$\frac{z}{1+z} < \lg(1+z) < z \quad \big(\S\ 2,\ \text{Formel (c)}\big)$$

und ν jedenfalls so gross genommen werden kann, dass im Falle eines negativen A: $\left|\frac{A-\varepsilon}{\varphi(\nu+1)}\right| < 1$, so hat man:

$$(38) \qquad \frac{A-\varepsilon}{1 + \frac{A-\varepsilon}{\varphi(\nu+1)}} < v_\nu < B + \varepsilon.$$

Der erste Ausdruck convergirt für $\nu = \infty$ gegen den Werth $A - \varepsilon$, und da ε von vornherein beliebig klein gemacht werden kann, so ergiebt sich schliesslich:

$$A \leqq \lim v_n \leqq B,$$

d. h. das Unbest.-Intervall von $\lim v_n$ ist mit demjenigen von $\lim v_n$ identisch oder fällt in dasselbe hinein.

Es habe nun umgekehrt $\lim v_n$ die Unbest.-Grenzen A und B, so kann man analog für $\nu \geqq m$ setzen:

$$A - \varepsilon < \varphi(\nu+1) \lg \frac{\varphi(\nu)\, a_{\nu+p}}{\varphi(\nu+1)\, a_{\nu+p+1}} < B + \varepsilon,$$

also:

$$\varphi(\nu+1)\left\{e^{\frac{A-\varepsilon}{\varphi(\nu+1)}} - 1\right\} < \varphi(\nu)\frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}}$$
$$- \varphi(\nu+1) < \varphi(\nu+1)\left\{e^{\frac{B+\varepsilon}{\varphi(\nu+1)}} - 1\right\}$$

und wegen:

$$z < e^z - 1 < \frac{z}{1-z} \qquad (-1 \leqq z \leqq +1) \qquad \big(\S\ 2,\ \text{Formel (a)}\big),$$

um so mehr:

$$A - \varepsilon < u_\nu < \frac{B+\varepsilon}{1 - \dfrac{B+\varepsilon}{\varphi(\nu+1)}}$$

d. h. schliesslich wiederum:

$$A \leqq \lim u_n \leqq B,$$

in Worten: Das Unbest.-Intervall von $\lim u_n$ ist mit demjenigen von $\lim v_n$ identisch oder fällt in dasselbe hinein.

Aus der Zusammenfassung *beider* Resultate folgt mit Nothwendigkeit, dass $\lim u_n$ und $\lim v_n$ stets die *gleichen* Unbest.-Grenzen haben müssen. Ist nun insbesondere $A = B$ d. h. besitzt *einer* der Ausdrücke $\lim u_n$, $\lim v_n$ einen *bestimmten* Grenzwerth (einschl. Null), so hat der andere *denselben* Werth. — Auch ist ohne Weiteres zu ersehen, dass diese Resultate noch gültig bleiben, wenn eine oder beide Unbest.-Grenzen in's Unendliche rückt, etwa $A = -\infty$, $B = +\infty$, oder wenn $A = B = \pm\infty$ wird.

Hieraus erkennt man aber, dass unter der Voraussetzung eines unendlich grossen $\lim \varphi(\nu)$ das Kummer'sche Convergenzkriterium und das am Schlusse des vorigen Paragraphen abgeleitete Kriterium (P) ganz gleiche Resultate liefern. Und es gilt — für $\lim D_n = \infty$ — das nämliche von den disjunctiven Kriterien:

$$\lim\left(D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}\right) \lesseqgtr 0,$$

$$\lim D_{n+1} \lg \frac{D_n a_{n+p}}{D_{n+1} a_{n+p+1}} \lesseqgtr 0,$$

(insbesondere also auch von den Raabe-Bertrand'schen Kriterien (L) und den Kriterien der Skala (O)).

Um nun auch noch die Tragweite der disjunctiven Kriterien *zweiter* Art mit derjenigen der entsprechenden *erster* Art zu vergleichen, genügt es — infolge des eben gefundenen Resultates — *eine* der beiden auf-

gestellten Hauptformen der Kriterien zweiter Art in Betracht zu ziehen. Ich wähle die zweite, oben mit v_n bezeichnete Form*), ersetze jedoch hierbei $\varphi(n)$ von vornherein durch D_ν, weil solche $\varphi(\nu)$, für welche $\sum \varphi(\nu)^{-1}$ convergirt, — wie die betreffende Entwicklung lehrt — kein bemerkenswerthes Resultat geben. Sei also

(40) $$v_n = D_{n+1} \lg \frac{D_n a_{n+p}}{D_{n+1} a_{n+p+1}}$$

und andererseits:

(41) $$t_n = \frac{\lg \frac{1}{D_n a_{n+p}}}{\sum_0^n D_\nu^{-1}} \quad \left(\text{Gl. (E), § 5}\right).$$

Werden dann die Unbest.-Grenzen von $\lim v_n$ wieder mit A und B bezeichnet, so hat man, analog wie oben, für $\nu \geqq m$

$$A - \varepsilon < D_{\nu+1} \lg \frac{D_\nu a_{\nu+p}}{D_{\nu+1} a_{\nu+p+1}} < B + \varepsilon.$$

Substituirt man, nachdem man alles durch $D_{\nu+1}$ dividirt, für ν der Reihe nach die Werthe $m, m+1, \cdots (n-1)$ und addirt die resultirenden Ungleichungen, so wird:

$$(A - \varepsilon) \cdot \sum_{m+1}^n D_\nu^{-1} < \lg \frac{D_m a_{m+p}}{D_n a_{n+p}} < (B + \varepsilon) \sum_{m+1}^n D_\nu^{-1}$$

und daher:

$$(A - \varepsilon) \cdot \frac{\sum_{m+1}^n D_\nu^{-1}}{\sum_0^n D_\nu^{-1}} < t_n + \frac{\lg D_m a_{m+p}}{\sum_0^n D_\nu^{-1}} < (B + \varepsilon) \frac{\sum_{m+1}^n D_\nu^{-1}}{\sum_0^n D_\nu^{-1}}.$$

Da nun offenbar für $n = \infty$

$$\sum_0^n D_\nu^{-1} \cong \sum_m^n D_\nu^{-1},$$

so ergiebt sich wiederum:

$$A \leqq \lim t_n \leqq B.$$

Der Process, welcher zu dieser Beziehung führte, ist nun aber — wie man sich leicht überzeugt — hier *nicht* umkehrbar. In Folge dessen kann man hier nur soviel schliessen, dass das Unbest.-Intervall

*) Weil dieselbe mit dem zu vergleichenden Kriterium erster Art schon von vornherein etwas mehr formelle Aehnlichkeit hat.

von $\lim t_n$ entweder in dasjenige von $\lim v_n$ hineinfällt oder damit identisch ist. Daraus folgt, falls A und B gleiches Vorzeichen besitzen, dass $\lim t_n$ das nämliche Vorzeichen hat, und speciell für $B = A$, d. h. für

$$\lim v_n = A$$

auch

$$\lim t_n = A$$

wird (wobei A eventuell auch unendlich gross werden darf). Dagegen wäre der umgekehrte Schluss hier nicht gestattet, d. h. es kann $\lim t_n$ einen *bestimmten* Grenzwerth haben, während $\lim v_n$ oscillirt.

Specialisirt man jetzt D_ν wiederum in der Weise, dass man zunächst $D_\nu = 1$ setzt, so wird

$$\lim v_n = \lim \lg \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}},$$

$$\lim t_n = \lim \frac{\lg \frac{1}{a_{n+p}}}{n} = \lim \lg \frac{1}{a_{n+p}^{\frac{1}{n}}}$$

und man erhält somit den bekannten Cauchy'schen Satz*), dass

$$\lim \sqrt[n]{a_{n+p}} = \lim \frac{a_{n+p+1}}{a_{n+p}}$$

wird, sobald der *letztere* dieser beiden Grenzwerthe *existirt*, d. h. endlich und bestimmt oder in bestimmter Weise unendlich gross ist.

Betrachtet man ferner solche D_ν, für welche $\lim D_n = \infty$, so wird, wenn man wiederum noch:

$$u_n = D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1}$$

setzt, nach dem zuvor bewiesenen Satze, $\lim u_n$ und $\lim v_n$ identisch, und es ergiebt sich daher das folgende Resultat:

Liefern die Kriterien zweiter Art:

$$\lim u_n = \lim \left(D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} \right)$$

oder: $\qquad (\lim D_n = \infty)$

$$\lim v_n = \lim D_{n+1} \lg \left(\frac{D_n a_{n+p}}{D_{n+1} a_{n+p+1}} \right)$$

bezüglich der Reihe $\sum a_\nu$ *eine Entscheidung oder versagen sie in der Weise, dass der Grenzwerth Null zum*

*) Analyse algébr. p. 53.

Vorschein kommt, so gilt das Gleiche von dem Kriterium erster Art:

$$\lim t_n = \lim \frac{\lg (D_n a_{n+p})^{-1}}{\sum_0^n {}^{\nu} D_\nu^{-1}}.$$

Dagegen kann $\lim t_n$ *eine bestimmte Entscheidung liefern, wenn* $\lim u_n$, $\lim v_n$ *durch das Auftreten unbestimmter Grenzwerthe versagen.**)

Substituirt man in den Ausdrücken u_ν, v_ν, t_ν an Stelle von D_ν:

$$D_\nu L_\varkappa(M_{\nu+1}) \quad \textit{wo:} \quad D_\nu^{-1} = M_{\nu+1} - M_\nu, \qquad \varkappa = 0, 1, 2, \cdots$$

so möge gesetzt werden:

$$u_n^{(\varkappa)} = D_n L_\varkappa(M_{n+1}) \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} L(M_{n+2}), \tag{42}$$

$$v_n^{(\varkappa)} = D_{n+1} L(M_{n+2}) \lg \frac{D_n L_\varkappa(M_{n+1}) a_{n+p}}{D_{n+1} L_\varkappa(M_{n+2}) a_{n+p+1}}, \tag{43}$$

$$t_\nu^{(\varkappa)} = \frac{\lg \left(D_n L_\varkappa(M_{n+1}) \cdot a_{n+p}\right)^{-1}}{\sum_h^n {}^{\nu} \left(D_\nu L_\varkappa(M_{\nu+1})\right)^{-1}} \tag{44}$$

---

*) Hieraus kann man noch den folgenden Schluss ziehen: Ist

$$\lim u_n = \lim v_n = \lim t_n = -\varrho,$$

d. h. wesentlich negativ, so hat man von einem best. n ab:

$$\frac{\lg (D_n a_{n+p})^{-1}}{\sum_0^n {}^{\nu} D_\nu^{-1}} = -\varrho_n,$$

wo ϱ_n wesentlich positiv und $\lim \varrho_n = \varrho$ — also:

$$D_n a_{n+p} = e^{\varrho_n \sum_0^n {}^{\nu} D_\nu^{-1}}$$

und daher:

$$\lim D_n a_{n+p} = \infty.$$

Ebenso ergiebt sich, falls:

$$\lim u_n = \lim v_n = \lim t_n = +\varrho,$$

$$D_n a_{n+p} = e^{-\varrho_n \sum_0^n {}^{\nu} D_\nu^{-1}}$$

und daher:

$$\lim D_n a_{n+p} = 0.$$

(Vgl. Du Bois Reymond a. a. O. p. 68, Art. VII).

(wobei in dem letzten Ausdrucke die Summationsgrenze h so zu wählen ist, dass $L_\varkappa(M_{n+1})$ reell und positiv wird). Alsdann findet offenbar zwischen den Grenzwerthen dieser drei Ausdrücke genau dieselbe Beziehung statt, wie zwischen denjenigen von u_n, v_n, t_n.

Um noch den Nenner von $t_n^{(\varkappa)}$ für $n=\infty$ umzuformen, führe ich für M_ν wieder die Bedingung ein:

$$M_{n+1} \sim M_n$$

(vermöge deren man übrigens auch in $\lim v_n^{(\varkappa)}$ den Factor $L(M_{n+2})$ durch $L(M_{n+1})$ ersetzen kann). Da alsdann nach Formel (f) des § 2:

$$\lg_{\varkappa+1} M_{n+1} - \lg_{\varkappa+1} M_n \cong \frac{M_{n+1}-M_n}{L_\varkappa(M_{n+1})} \quad \text{d. h.} \quad \cong \left(D_n L_\varkappa(M_{n+1})\right)^{-1},$$

so kann man setzen für $\nu \geqq m$

$$\left(D_\nu L_\varkappa(M_{\nu+1})\right)^{-1} = \vartheta_\nu (\lg_{\varkappa+1} M_{\nu+1} - \lg_{\varkappa+1} M_\nu),$$

wo m so fixirt werden kann, dass ϑ_ν beliebig wenig von der Einheit abweicht. Hieraus folgt durch Substitution von $\nu = m, (m+1), \ldots n$ und Summation:

$$\sum_m^n {}_\nu \left(D_\nu L_\varkappa(M_{\nu+1})\right)^{-1} = \vartheta(\lg_{\varkappa+1} M_{n+1} - \lg_{\varkappa+1} M_m),$$

wo ϑ einen Mittelwerth aus $\vartheta_m, \vartheta_{m+1}, \ldots \vartheta_n$ bezeichnet, welcher gleichfalls beliebig wenig von 1 verschieden sein muss. Mithin erhält man für $n=\infty$, wenn man noch links die *endliche* Summe von h bis $m-1$ hinzufügt und rechts das endliche Glied $\lg_{\varkappa+1} M_m$ fortlässt:

$$\sum_h^n {}_\nu \left(D_\nu L_\varkappa(M_{\nu+1})\right)^{-1} \cong \lg_{\varkappa+1} M_{n+1} \cong \lg_{\varkappa+1} M_n.$$

In Folge dessen ergiebt sich schliesslich:

$$(45) \qquad \lim t_n^{(\varkappa)} = \lim \frac{\lg\left(D_n L_\varkappa(M_{n+1})\, a_{n+p}\right)^{-1}}{\lg_{\varkappa+1} M_{n+1}}$$

$$= \lim \frac{\lg\left(D_n L_\varkappa(M_n)\, a_{n+p}\right)^{-1}}{\lg_{\varkappa+1} M_n} \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

in voller Uebereinstimmung mit der unter (F, 2), § 5 aufgestellten Form der Skala von disjunctiven Kriterien erster Art.

Setzt man wieder $M_\nu = \nu - 1$, so wird:

$$u_n^{(\varkappa)} = L_\varkappa(n) \cdot \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - L_\varkappa(n+1),$$

$$v_n^{(\varkappa)} = L_\varkappa(n) \cdot \lg \frac{L_\varkappa(n) \cdot a_{n+p}}{L_\varkappa(n+1)\, a_{n+p+1}}$$

und es folgt aus dem bisher Gesagten, dass die Existenz eines Grenzwerthes für $u_n^{(\varkappa)}$ oder $v_n^{(\varkappa)}$ stets die des nämlichen Grenzwerthes für:

$$t_n^{(\varkappa)} = \frac{\lg\left(L\ (n)\, a_{n+p}\right)^{-1}}{\lg_{\varkappa+1} n}$$

nach sich zieht — aber *nicht* umgekehrt. Damit ist insbesondere die Beziehung zwischen den gewöhnlichen, disjunctiven, logarithmischen Kriterien erster und zweiter Art (den Cauchy-Bertrand'schen und den Raabe-Bertrand'schen) festgestellt.

§ 9.

Besondere Kriterien für Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern.

I. Die Kriterien dritter Art.

Die bisher aufgestellten Kriterien gelten für Reihen mit ganz beliebigen positiven Gliedern. Zwar wurde im § 6 darauf aufmerksam gemacht, dass die Tragweite der gewöhnlichen logarithmischen und ähnlich gebildeter Kriterien sich thatsächlich nur auf Reihen mit „*im wesentlichen*“ abnehmenden Gliedern erstreckt (worunter solche zu verstehen waren, bei denen die Schwankungen in der Ab- und Zunahme der Glieder gewisse, verhältnissmässig enge Grenzen nicht übersteigen), und das gilt auch, wie aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen hervorgeht, in noch erhöhtem Masse von den Kriterien zweiter Art. Dies liegt aber keineswegs in der *Form* der allgemeinen Kriterien — wie ja auch ausdrücklich gezeigt werden konnte, dass für jede Reihe $\sum a_\nu$ *brauchbare* Kriterien erster und zweiter Art *existiren* — vielmehr in dem Umstande, dass man bezüglich der Wahl von analytisch durchforschten und rechnerisch hinlänglich brauchbaren Functionen M_ν auf ein verhältnissmässig äusserst enges Gebiet angewiesen ist. Die betreffenden Functionen M_ν — wie ν selbst, e^ν, $\lg \nu$ — sind dann stets von einer so ausserordentlich *tiefgehenden Gesetzmässigkeit**), dass auch die daraus gebildeten D_ν bezw. C_ν *monoton* ausfallen und demgemäss Kriterien liefern, welche nur für Reihen mit „*im wesentlichen monotonen*“ Gliedern brauchbar sind.

Von den bisher betrachteten Kriterien *principiell* verschieden sind jedoch diejenigen, zu deren Aufstellung ich mich jetzt wende, und welche sich nach Herleitung und Form *ausschliesslich* auf Reihen mit *monoton variirenden* Gliedern beziehen. Offenbar wird es sich hierbei aber — da Reihen mit *niemals abnehmenden* Gliedern ohne Weiteres

*) Dieselbe drückt sich analytisch darin aus, dass auch die *sämmtlichen* Differenzen bezw. Differentialquotienten dieser Functionen wiederum *monoton* sind.

als *divergent* erkannt werden — ausschliesslich um solche mit *niemals zunehmenden* Gliedern handeln.

Besitzt nun eine Reihe dieser Kategorie die Eigenschaft, dass entweder die *Differenzen* zweier consecutiver Glieder oder diejenigen ihrer reciproken Werthe sich in einfacherer Form darstellen als die Glieder selbst, so wird es — geradeso wie die Prüfung von Reihen mit relativ einfach gebildeten Glieder*quotienten* die Bildung der Kriterien zweiter Art veranlasste — nahe liegen, Kriterien *„dritter Art“* zu bilden, die wesentlich von dem Grenzwerthe der Differenz $a_n - a_{n+1}$ oder $a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}$ abhängen.

Zunächst erkennt man freilich, dass man aus Beziehungen der Form:

$$a_{\nu+p} - a_{\nu+p+1} \begin{cases} \leqq d_\nu - d_{\nu+1}, \\ \geqq c_\nu - c_{\nu+1}, \end{cases} \qquad (\nu \geqq m)$$

welche also aussagen, dass die Glieder a_ν von einer bestimmten Stelle ab nicht stärker bezw. nicht schwächer abnehmen als diejenigen einer gewissen divergenten bezw. convergenten Reihe, im allgemeinen *nicht* — wie aus den entsprechenden Beziehungen zwischen Gliederquotienten — die Divergenz bezw. Convergenz von $\sum a_\nu$ erschliessen kann*), ausser wenn von vornherein feststeht, dass schon $a_{m+p} \geqq d_m$ bezw. $a_{m+p} \leqq c_m$. Immerhin lassen sich Kriterien, welche auf der Beschaffenheit von $\lim (a_n - a_{n+1})$ beruhen, durch folgende einfache Betrachtung ableiten.

Man hat identisch:

$$\sum_0^n a_\nu = a_0 + \sum_1^{n-1} \nu (a_\nu - a_{\nu+1}) + n a_n$$

und hieraus erkennt man *erstens*, dass $\sum a_\nu$ sicher *divergirt*, wenn $\sum \nu(a_\nu - a_{\nu+1})$ divergirt; dafür ist aber hinreichend, dass:

(Q, 1) $$\lim n D_n (a_n - a_{n+1}) \geqq g.$$

Zweitens ergiebt sich, dass $\sum a_\nu$ *convergirt*, wenn:

$$\lim n a_n = 0$$

ist (eine Bedingung, welche in der That für die *Convergenz* einer

*) Die Differenzen $a_{\nu+p} - a_{\nu+p+1}$ bestimmen die *absolute*, die Quotienten $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ die *relative* Abnahme der Glieder. Durch die ersteren, von irgend einer bestimmten Stelle $\nu = m$ an genommen, sind die einzelnen Glieder selbst bis auf eine *additive*, durch die letzteren bis auf eine *multiplicative* Constante bestimmt: die erstere ist aber auf die Divergenz bezw. Convergenz der Reihe von *wesentlichem* Einflusse, die letztere *nicht*.

Reihe mit niemals zunehmenden Gliedern als *nothwendig* erkannt wurde — s. § 6) und ausserdem $\sum \nu(a_\nu - a_{\nu+1})$ *convergirt*, wenn also:

$$(\mathrm{Q}, 2) \qquad \lim n C_n (a_n - a_{n+1}) \leqq G.$$

Die auf diese Weise sich ergebenden Kriterien dritter Art sind also identisch mit den Kriterien erster Art für $\sum \nu(a_\nu - a_{\nu+1})$ und bieten somit nichts wesentlich Neues.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn man statt der Differenzen der Reihenglieder a_ν diejenigen der reciproken Werthe $a_\nu^{-1} = A_\nu$ in Betracht zieht. Hier lässt sich in der That aus dem Bestehen der Ungleichungen:

$$(46) \qquad A_{n+p+1} - A_{\nu+p} \begin{cases} \leqq G(D_{\nu+1} - D_\nu), \\ \geqq g(C_{\nu+1} - C_\nu), \end{cases} \qquad (\nu \geqq m)$$

stets auf die Divergenz bezw. Convergenz von $\sum A_\nu^{-1}$ schliessen. Man erhält nämlich durch Substitution von $\nu = m, m+1, \cdots, (n-1)$ und Addition:

$$A_{n+p} - A_{m+p} \begin{cases} \leqq G(D_n - D_m), \\ \geqq g(C_n - C_m), \end{cases}$$

oder:

$$\frac{1}{A_{n+p}} \begin{cases} \geqq \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{D_n + A}, & \text{wo: } A = \frac{A_{m+p}}{G} - D_m, \\ \leqq \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{C_n + B}, & \text{wo: } B = \frac{A_{m+p}}{g} - C_m. \end{cases}$$

Hieraus folgt dann aber, da A, B feste endliche Constanten bedeuten, ohne Weiteres die Divergenz bezw. Convergenz von $\sum A_\nu^{-1}$.

Nimmt man statt der Ungleichungen (46) wieder diejenigen zwischen den betreffenden Grenzwerthen, so erhält man als Fundamentalform für die gesuchten Kriterien dritter Art die Beziehungen:

$$(\mathrm{R}) \begin{cases} (1) \ \lim \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{D_{n+1} - D_n} \leqq G & \text{d. h. } \textit{nicht } \infty\text{: } \textit{Divergenz.} \\ (2) \ \lim \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{C_{n+1} - C_n} \geqq g & \text{d. h. } \textit{nicht} \text{ Null: } \textit{Convergenz.} \end{cases}$$

Die D_ν und C_ν können hierbei wiederum ganz beliebig gewählt werden, und zwar wird man offenbar um so wirksamere Kriterien erhalten, je schneller die Differenz $D_{\nu+1} - D_\nu$ bezw. je langsamer die Differenz $C_{\nu+1} - C_\nu$ mit ν wächst. Es erscheint nun wiederum angemessen bei der Aufstellung eines Anfangskriteriums die D_ν von vornherein in gewisser Weise einzuschränken: es sollen demgemäss die D_ν mit ν in's Unendliche wachsen und zwar so, dass $D_{\nu+1} - D_\nu$

stets *über* einer endlichen Grenze bleibt. Wählt man sodann für D_ν die Form:

$$D_\nu = \frac{M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu} = \left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} - 1\right)^{-1},$$

so folgt aus $\lim D_n = \infty$ für die M_ν die Bedingung:

$$M_{n+1} \cong M_n.$$

Setzt man alsdann:

$$C_\nu = \frac{M_\nu^{1+\varrho}}{M_{\nu+1} - M_\nu} = D_\nu \cdot M_\nu^\varrho \qquad (\varrho > 0),$$

so lässt sich zunächst zeigen, dass man die im Convergenzkriterium (R) auftretenden Differenzen $C_{n+1} - C_n = D_{n+1} M_{n+1}^\varrho - D_n M_n^\varrho$ durch die einfachere $(D_{n+1} - D_n) M_n^\varrho$ ersetzen kann.

Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} C_{\nu+1} - C_\nu &= D_{\nu+1} M_{\nu+1}^\varrho - D_\nu M_\nu^\varrho \\ &= M_{\nu+1}^\varrho (D_{\nu+1} - D_\nu) + D_\nu (M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho) \end{aligned}$$

oder:

$$\frac{C_{\nu+1} - C_\nu}{(D_{\nu+1} - D_\nu) M_\nu^\varrho} = \left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^\varrho + \frac{1}{D_{\nu+1} - D_\nu} \cdot \frac{\left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}\right)^\varrho - 1}{\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} - 1}$$

und daher:

$$\lim \frac{C_{n+1} - C_n}{(D_{n+1} - D_n) M_\nu^\varrho} = 1 + \varrho \lim \frac{1}{D_{n+1} - D_n},$$

d. h. endlich und von Null verschieden.

Man kann daher das Convergenzkriterium (R) jetzt folgendermassen schreiben:

(R, 3) $$\lim \frac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{(D_{n+1} - D_n) M_\nu^\varrho} \geqq g: \quad \textit{Convergenz.}$$

Um aus (R) eine Skala von derartigen Kriterien abzuleiten, wird man nach dem früher Gesagten D_ν, C_ν etwa ersetzen durch:

$$D_\nu^{(\varkappa)} = \frac{M_\nu \Lambda_\varkappa(M_\nu)}{M_{\nu+1} - M_\nu} = D_\nu \Lambda_\varkappa(M_\nu),$$

$$C_\nu^{(\varkappa)} = \frac{M_\nu \Lambda_\varkappa(M_\nu) \lg_\varkappa^\varrho M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu} = D_\nu \Lambda_\varkappa(M_\nu) \lg_\varkappa^\varrho M_\nu \qquad (\varrho > 0),$$

wo

$$\Lambda_\varkappa(x) = \lg_1 x \cdot \lg_2 x \cdots \lg_\varkappa x \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots).$$

Dabei lassen sich nun die in den betreffenden Kriterien zunächst auftretenden Differenzen

$$D_{n+1}^{(\varkappa)} - D_n^{(\varkappa)} \quad \text{bezw.} \quad C_{n+1}^{(\varkappa)} - C_n^{(\varkappa)}$$

durch die einfacheren

$$(D_{n+1} - D_n)\,\Lambda_\varkappa(M_\nu) \quad \text{bezw.} \quad (D_{n+1} - D_n)\,\Lambda_\varkappa(M_\nu)\,\lg_\varkappa^\varrho M_\nu$$

ersetzen. Es ist nämlich:

$$D_{\nu+1}^{(\varkappa)} - D_\nu^{(\varkappa)} = D_{\nu+1}\Lambda_\varkappa(M_{\nu+1}) - D_\nu\Lambda_\varkappa(M_\nu)$$
$$= \Lambda_\varkappa(M_{\nu+1})\,\{D_{\nu+1} - D_\nu\} + D_\nu\,\{\Lambda_\varkappa(M_{\nu+1}) - \Lambda_\varkappa(M_\nu)\}$$

also:

$$(47) \qquad \frac{D_{\nu+1}^{(\varkappa)} - D_\nu^{(\varkappa)}}{(D_{\nu+1} - D_\nu)\,\Lambda_\varkappa(M_\nu)} = \frac{\Lambda_\varkappa(M_{\nu+1})}{\Lambda_\varkappa(M_\nu)} + \frac{1}{D_{\nu+1} - D_\nu}\cdot P_\nu^{(\varkappa)}$$

wo:

$$P_\nu^{(\varkappa)} = \frac{D_\nu\,\{\Lambda_\varkappa(M_{\nu+1}) - \Lambda_\varkappa(M_\nu)\}}{\Lambda_\varkappa(M_\nu)}$$
$$= \frac{\lg_\varkappa M_{\nu+1}\cdot D_\nu\,\{\Lambda_{\varkappa-1}(M_{\nu+1}) - \Lambda_{\varkappa-1}(M_\nu)\}}{\Lambda_\varkappa(M_\nu)}$$
$$+ \frac{\Lambda_{\varkappa-1}(M_\nu)\cdot D_\nu\,\{\lg_\varkappa(M_{\nu+1}) - \lg_\varkappa(M_\nu)\}}{\Lambda_\varkappa(M_\nu)}$$
$$= \frac{\lg_\varkappa M_{\nu+1}}{\lg_\varkappa M_\nu}\cdot P_\nu^{(\varkappa-1)} + D_\nu\frac{\lg_\varkappa M_{\nu+1} - \lg_\varkappa M_\nu}{\lg_\varkappa M_\nu}.$$

Da aber nach Formel (h) des § 2:

$$\lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n \cong \frac{M_{n+1} - M_n}{L_{\varkappa-1}(M_n)} \quad \text{d. h.} \cong \frac{1}{D_n\Lambda_{\varkappa-1}(M_n)}$$

und daher:

$$(48) \qquad \lim D_n\cdot\frac{\lg_\varkappa M_{n+1} - \lg_\varkappa M_n}{\lg_\varkappa M_n} = \lim\frac{1}{\Lambda_\varkappa(M_n)} = 0,$$

so wird:

$$P_n^{(\varkappa)} \cong P_n^{(\varkappa-1)}.$$

Nun ist insbesondere:

$$P_n^{(1)} = \frac{M_n(\lg M_{n+1} - \lg M_n)}{(M_{n+1} - M_n)\lg M_n} \cong \frac{1}{\lg M_n} = 0$$

also allgemein:

$$\lim P_n^{(\varkappa)} = 0$$

und man findet somit aus Gl. (47)

$$(49) \qquad \lim\frac{D_{n+1}^{(\varkappa)} - D_n^{(\varkappa)}}{(D_{n+1} - D_n)\,\Lambda_\varkappa(M_n)} = 1.$$

Um die analoge Umformung für $C_{n+1} - C_n$ durchzuführen hat man zunächst:

$$C_{\nu+1}^{(\varkappa)} - C_\nu^{(\varkappa)} = D_{\nu+1}^{(\varkappa)} \lg_\varkappa^\varrho M_{\nu+1} - D_\nu^{(\varkappa)} \lg_\varkappa^\varrho M_\nu$$
$$= \lg_\varkappa^\varrho M_{\nu+1} \{D_{\nu+1}^{(\varkappa)} - D_\nu^{(\varkappa)}\} + D_\nu^{(\varkappa)} \{\lg_\varkappa^\varrho M_{\nu+1} - \lg_\varkappa^\varrho M_\nu\}$$

und somit:

$$(50) \qquad \frac{C_{\nu+1}^{(\varkappa)} - C_\nu^{(\varkappa)}}{(D_{\nu+1} - D_\nu) \Lambda_\varkappa(M_\nu) \lg_\varkappa^\varrho M_\nu} = \left(\frac{\lg_\varkappa M_{\nu+1}}{\lg_\varkappa M_\nu}\right)^\varrho \cdot \frac{D_{\nu+1}^{(\varkappa)} - D_\nu^{(\varkappa)}}{(D_{\nu+1} - D_\nu) \Lambda_\varkappa(M_\nu)}$$
$$+ \frac{D_\nu}{D_{\nu+1} - D_\nu} \cdot \frac{\lg_\varkappa^\varrho M_{\nu+1} - \lg_\varkappa^\varrho M_\nu}{\lg_\varkappa^\varrho M_\nu}.$$

Da nun aber:

$$D_\nu \cdot \frac{\lg_\varkappa^\varrho M_{\nu+1} - \lg_\varkappa^\varrho M_\nu}{\lg_\varkappa^\varrho M_\nu} = \left\{D_\nu \cdot \frac{\lg_\varkappa M_{\nu+1} - \lg_\varkappa M_\nu}{\lg_\varkappa M_\nu}\right\} \frac{\left(\frac{\lg_\varkappa M_{\nu+1}}{\lg_\varkappa M_\nu}\right)^\varrho - 1}{\frac{\lg_\varkappa M_{\nu+1}}{\lg_\varkappa M_\nu} - 1}$$

ist, und der erste Factor dieses Ausdruckes nach Gl. (49) für $\nu = \infty$ verschwindet, während der zweite offenbar den Grenzwerth ϱ besitzt, so folgt aus Gl. (50) mit Berücksichtigung von Gl. (49):

$$(51) \qquad \lim \frac{C_{n+1}^{(\varkappa)} - C_n^{(\varkappa)}}{(D_{n+1} - D_n) \Lambda_\varkappa(M_n) \lg_\varkappa^\varrho M_n} = 1$$

und es nehmen jetzt die fraglichen Kriterien mit Hülfe von Gl. (49) und (51) die folgende Form an:

$$(\mathrm{R}') \qquad \begin{cases} \lim \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{(D_{n+1} - D_n) \Lambda_\varkappa(M_n)} \leqq G: & \textit{Divergenz}, \\[2ex] \lim \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{(D_{n+1} - D_n) \Lambda_\varkappa(M_n) \lg_\varkappa^\varrho M_n} \geqq g: & \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Man kann schliesslich an Stelle der Kriterienpaare (R) und (R′) auch wieder disjunctive Kriterien bilden. Die *Divergenz*kriterien gelten nämlich a fortiori, wenn man dem Nenner den Factor M_ν^ϱ bezw. $\lg_\varkappa^\varrho(M_\varkappa)$ hinzufügt, sobald $\varrho \leqq 0$ genommen wird. Hierdurch werden die betreffenden Ausdrücke wiederum mit den entsprechenden für die Convergenz gleichlautend und man erhält, wenn man, um ϱ zu isoliren, logarithmirt und beachtet, dass ϱ beliebig klein genommen werden darf, aus (R, 1), (R, 3):

$$(\mathrm{S}) \qquad \lim \frac{\lg \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{D_{n+1} - D_n}}{\lg M_n} \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Convergenz} \end{cases}$$

und aus (R′)

$$(\mathrm{S}') \qquad \lim \frac{\lg \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{(D_{n+1} - D_n) \Lambda_\varkappa(M_n)}}{\lg_{n+1} M_n} \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Die obigen Kriterien gestalten sich wieder am einfachsten, wenn man setzt: $M_\nu = \nu$, also auch $D_\nu = \nu$. Alsdann ergiebt sich aus (R) und (R′)

$$\text{(T)} \quad \begin{cases} \lim\,(A_{n+p+1} - A_{n+p}) \leqq G: & \textit{Divergenz}, \\ \lim \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{n^{\varrho}} \geqq g: & \textit{Convergenz}; \end{cases}$$

$$\text{(T′)} \quad \begin{cases} \lim \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{\Lambda_\varkappa(n)} \leqq G: & \textit{Divergenz}, \\ \lim \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{\Lambda_\varkappa(n)\lg_\varkappa^{\varrho} n} \geqq g: & \textit{Convergenz}; \end{cases}$$

desgleichen aus (S) und (S′):

$$\text{(U)} \quad \begin{cases} \lim \dfrac{\lg(A_{n+p+1} - A_{n+p})}{\lg n} \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Convergenz}; \end{cases} \\ \lim \dfrac{\lg \dfrac{A_{n+p+1} - A_{n+p}}{\Lambda_\varkappa(n)}}{\lg_{n+1} n} \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Convergenz}. \end{cases} \end{cases}$$

Ich will schliesslich zeigen, dass für solche Reihen, deren Glieder A_ν^{-1} von irgend einer Stelle ab beständig *ab*nehmen (mit *Ausschluss* der *Gleichheit* zweier oder mehrerer consecutiver Glieder) und für $\nu = \infty$ verschwinden, sich noch eine andere allgemeine Form von Kriterien dritter Art durch die folgende einfache Betrachtung ableiten lässt.

Da unter der gemachten Voraussetzung die A_ν genau den Charakter der früheren M_ν besitzen, so kann man offenbar setzen:

$$D_\nu = \frac{A_\nu}{A_{\nu+1} - A_\nu}, \qquad C_\nu = \frac{A_{\nu+1} A_\nu^{\varrho}}{A_{\nu+1} - A_\nu}$$

und

$$D_\nu^{(\varkappa)} = \frac{A_\nu \Lambda_\varkappa(A_\nu)}{A_{\nu+1} - A_\nu}, \qquad C_\nu^{(\varkappa)} = \frac{A_{\nu+1} \Lambda_\varkappa(A_\nu) \lg_\varkappa^{\varrho} A_\nu}{A_{\nu+1} - A_\nu}.$$

Da sich nun für die Reihe $\sum A_\nu^{-1}$ ergiebt:

Divergenz, wenn: $\lim D_n \cdot A_n^{-1} \geqq h$

oder anders geschrieben: $\lim \dfrac{A_n}{D_n} \leqq G$,

Convergenz, wenn: $\lim C_n \cdot A_{n+1}^{-1} \leqq H$

oder anders geschrieben: $\lim \dfrac{A_{n+1}}{C_n} \geqq g$,

so erhält man hieraus die folgenden Kriterienpaare:

$$(V,1)\quad \begin{cases} \lim\,(A_{n+1}-A_n) & \leqq G:\ \textit{Divergenz},\\ \lim \dfrac{A_{n+1}-A_n}{A_n^{\varrho}} & \geqq g:\ \textit{Convergenz}; \end{cases}$$

$$(V,2)\quad \begin{cases} \lim \dfrac{A_{n+1}-A_n}{\Lambda_\varkappa(A_n)} & \leqq G:\ \textit{Divergenz},\\ \lim \dfrac{A_{n+1}-A_n}{\Lambda_\varkappa(A_n)\,\lg_\varkappa^{\varrho} A_n} & \geqq g:\ \textit{Convergenz}, \end{cases}$$

sowie auch — mit Hülfe der mehrfach benützten Methode die disjunctiven Kriterien:

$$(W)\quad \begin{cases} \lim \dfrac{\lg\,(A_{n+1}-A_n)}{\lg A_n} \begin{cases} <0: & \textit{Divergenz},\\ >0: & \textit{Convergenz}; \end{cases}\\[2ex] \lim \dfrac{\lg \dfrac{A_{n+1}-A_n}{\Lambda_\varkappa A_n}}{\lg_{\varkappa+1} A_n} \begin{cases} <0: & \textit{Divergenz},\\ >0: & \textit{Convergenz}. \end{cases} \end{cases}$$

§ 10.

Besondere Kriterien für Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern.

II. Die erweiterten Kriterien zweiter Art.

Setzt man $\sum_0^n a_\nu = F(n)$, so lautet das Cauchy'sche Fundamentalkriterium zweiter Art:

$$\lim q_n = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{F(n+1)-F(n)}{F(n)-F(n-1)} \begin{cases} >1: & \textit{Divergenz},\\ <1: & \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

Da nun bei einer Reihe mit niemals zunehmenden Gliedern der obige Grenzwerth stets nur $\leqq 1$ sein kann, so kommt derselbe als *Divergenz*kriterium hier überhaupt nicht in Betracht; und er versagt auch als *Convergenz*kriterium, sobald er $=1$ oder unbestimmt mit der oberen Grenze 1 wird. Von dem einzigen Falle abgesehen, wo $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ist, kann man also sagen, dass der Quotient zweier consecutiver Terme das Abnahmegesetz der Reihenglieder nicht mit genügender Deutlichkeit zum Ausdrucke bringt, um daraus die Beschaffenheit der Reihe erschliessen zu können. Es liegt nun nahe, zur Erledigung der fraglich bleibenden Fälle *„erweiterte Kriterien zweiter Art"* in der Weise zu bilden, dass man statt des Quotienten zweier *consecutiver*, denjenigen zweier *beliebig weit von einander entfernter* Glieder oder auch denjenigen zweier passend gewählter *Gliedergruppen*

in Betracht zieht. Denn ein Quotient von der ersteren Art bringt vermöge der Relation:

$$\frac{a_{n+p}}{a_n} = \frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}} \cdot \frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

das fragliche Abnahmeverhältniss gleichsam in verstärktem Maasse zum Ausdruck, ein solcher der letzteren Art giebt eine Art Durchschnittsmaass für die Gliederabnahme:*) beide Arten von Ausdrücken stehen übrigens, wie die weitere Betrachtung lehren wird, in sehr nahem Zusammenhange. Als Ausgangspunkt mag hierbei der Quotient zweier Gliedergruppen dienen, wie er offenbar erhalten wird, wenn man nach Analogie von q_ν bildet:

$$Q_\nu = \frac{F(M_{\nu+1}) - F(M_\nu)}{F(m_{\nu+1}) - F(m_\nu)}$$

wo M_ν, m_ν ganzzahlige, positive, monotone Functionen der ganzen Zahl ν mit dem Grenzwerthe ∞ bedeuten und $M_\nu > m_\nu$ sein soll. Von diesem Quotienten lässt sich mit Leichtigkeit beweisen, dass die Beziehung $\lim Q_n \gtrless 1$ in analoger Weise wie bei $\lim q_n$ Divergenz und Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$ anzeigt.

Um indessen für die Auswahl der Functionen M_ν, m_ν einen grösseren Spielraum zu gewinnen, erscheint es angemessen, dieselben von der Einschränkung der *Ganzzahligkeit* zu befreien und hierzu ist vor allem nöthig die Bedeutung der Function $F(x)$, welche nur für ganzzahlige Argumente definirt ist, entsprechend zu erweitern**), oder aber dieselbe durch eine andere geeignete Function zu ersetzen.

*) Man kann leicht nachweisen, dass bei einer divergenten bezw. convergenten Reihe die Glieder sich geradezu immer so in Gruppen zusammenfassen lassen, dass der fragliche Quotient beständig > 1, bezw. < 1 wird. (Bezüglich der convergenten Reihen vergl. Weyr, *Deux Remarques relatives aux Séries* — Teixeira, Jornal T. VIII, p. 97.)

**) Man könnte z. B. setzen:

$$F(x) = F([x]) + \{x - [x]\}\, f([x+1])$$

sodass $F(x)$ mit x stetig und monoton zunehmend sich ändert. Für diese erweiterte Definition von $F(x)$ folgt dann — genau wie für die im Texte behandelte Function $\Phi(x)$, dass die Beziehung:

$$\lim \frac{F(M_{x+h}) - F(M_x)}{F(m_{x+h}) - F(m_x)} \gtrless 1$$

die Divergenz bezw. Convergenz von $\sum f(\nu)$ nach sich zieht. Und dieses Kriterium lässt sich sodann mit Hülfe der für $y > x$ geltenden, unmittelbar als richtig zu erkennenden Ungleichungen:

$$F(y) - F(x) \begin{cases} > (y - x)\, f([y+1]), \\ < (y - x)\, f([x+1]) \end{cases}$$

auf eine von dem Hauptkriterium (X) nicht wesentlich verschiedene Form bringen.

Ich wähle den letzteren Weg und verfahre in folgender Weise: Es sei $f(x)$ eine positive, stetige mit wachsendem x monoton abnehmende Function der positiven Variablen x von der Beschaffenheit, dass für $x = \nu$ (d. h. gleich einer positiven ganzen Zahl) $f(\nu) = a_\nu$ wird. Eine solche kann man — wenn $a_\nu = f(\nu)$ nicht von vornherein so gegeben ist, dass $f(x)$ die genannten Eigenschaften besitzt, durch Interpolation stets herstellen, am einfachsten, indem man setzt:

$$f(x) = f([x]) + (x - [x]) \{f([x+1]) - f([x])\}.$$

Denkt man sich sodann die Curve $y = f(x)$ in einem rechtwinkligen Coordinatensystem verzeichnet, so möge mit $\Phi(x)$ der Inhalt desjenigen Flächenstückes bezeichnet werden, welcher begrenzt wird von den beiden Axen, der Ordinate $f(x)$ und dem Bogen der Curve $y = f(x)$.*)

Andererseits kann man $f(\nu) = f(\nu) \cdot 1$ auffassen als Inhalt eines Rechtecks mit der Grundlinie 1 und der Höhe $f(\nu)$; und zwar wird dasselbe, je nachdem man es von der Ordinate $f(\nu)$ aus nach links oder nach rechts construirt denkt, ganz innerhalb der Fläche Φ liegen oder dieselbe überschneiden. Hieraus ergiebt sich, wenn man ν solcher Rechtecke von der einen, wie von der anderen Art addirt die Ungleichung:

$$F(\nu+1) - f(0) < \Phi(\nu+1) < F(\nu) \tag{52}$$

und es wird daher $\Phi(n)$ für $n = \infty$, also auch allgemein $\Phi(x)$ für $x = \infty$ $\big($wegen: $\Phi([x]) < \Phi(x) < \Phi([x+1])\big)$ — mit $F(\infty)$ stets *gleichzeitig* unendlich gross oder endlich und bestimmt, sodass mit anderen Worten $\sum f(\nu)$ divergirt oder convergirt, je nachdem $\Phi(\infty) = \infty$ wird oder nicht. Ich betrachte nun an Stelle der oben mit Q_ν bezeichneten Quotienten den folgenden ähnlich gebildeten:

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(M_{x+h}) - \Phi(M_x)}{\Phi(m_{x+h}) - \Phi(m_x)} \tag{53}$$

wo h eine beliebige positive Grösse, M_x und m_x positive monotone Functionen von x mit dem Grenzwerthe ∞ bedeuten, und zwar soll von einer bestimmten Stelle x ab stets $M_x > m_x$ sein (was nicht

---

*) Die Function $\Phi(x)$ ist natürlich, rein analytisch, nichts anderes als das bestimmte Integral $\int_0^x f(\xi)\, d\xi$. Es kommt aber von dem Integralbegriffe, der hier in der *denkbar einfachsten Form* auftritt, insofern $f(x)$ als *positive*, *stetige*, *monoton abnehmende* Function definirt ist, nichts weiter in Frage als dessen *Existenz*, welche ja mit der Existenz einer bestimmten *Maasszahl* $\Phi(x)$ für das betreffende Flächenstück identisch ist. Diese kann man aber, ohne eigentlich den Boden der sog. algebraischen Analysis zu verlassen, vollständig streng begründen.

ausschliesst, dass für $x = \infty$ auch $M_x \underline{\backsim} m_x$ werden darf). Alsdann lässt sich zeigen:

Die Reihe $\sum f(\nu)$

$$\begin{matrix} \textit{divergirt} \\ \textit{convergirt} \end{matrix}\Bigg\} \text{ wenn } \lim_{x=\infty} \varphi(x) \Bigg\{ \begin{matrix} > 1, \\ < 1. \end{matrix} \tag{54}$$

Beweis. Es sei zunächst $\lim \varphi(x) > 1$, so lässt sich ein bestimmter Werth ξ fixiren, derart dass für $x \geqq \xi$

$\varphi(x) \geqq 1 + \varepsilon$, wo ε angebbar positiv —

oder, wenn man für $\varphi(x)$ seinen Werth aus Gl. (53) einsetzt:

$$\Phi(M_{x+h}) - \Phi(M_x) \geqq (1 + \varepsilon) \{\Phi(m_{x+h}) - \Phi(m_x)\}.$$

Setzt man für x der Reihe nach die Werthe $\xi, \xi + h, \ldots, \xi + (n-1)h$ und summirt, so kommt:

$$\Phi(M_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi) \geqq (1 + \varepsilon) \{\Phi(m_{\xi+nh}) - \Phi(m_\xi)\}$$

oder auch:

$$\frac{\Phi(M_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)}{\Phi(m_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)} \geqq (1+\varepsilon)\left\{1 + \frac{\Phi(M_\xi) - \Phi(m_\xi)}{\Phi(m_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)}\right\}$$
$$\geqq 1 + \varepsilon$$

(da wegen $M_\xi > m_\xi$ auch $\Phi(M_\xi) > \Phi(m_\xi)$ und andererseits n so gross genommen werden kann, dass: $\Phi(m_{\xi+nh}) > \Phi(M_\xi)$, sodass also das zweite Glied rechts wesentlich positiv ausfällt). Daraus folgt, dass für $n = \infty$ auch:

$$\lim \frac{\Phi(M_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)}{\Phi(m_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)} \geqq 1 + \varepsilon.$$

Wäre nun $\Phi(\infty)$ endlich und bestimmt, so müsste deren Quotient nothwendigerweise den Grenzwerth 1 haben. Daraus folgt, dass $\Phi(\infty) = \infty$ sein muss, d. h. dass $\sum f(\nu)$ *divergirt.*

Sei nun zweitens $\lim \varphi(x) < 1$, so kann man für $x \geqq \xi$ setzen

$\varphi(x) \leqq 1 - \delta$, wo δ ein pos. ächter Bruch —

also:

$$\Phi(M_{x+h}) - \Phi(M_x) \leqq (1 - \delta) \{\Phi(m_{x+h}) - \Phi(m_x)\}$$

und daher, analog wie oben:

$$\Phi(M_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi) \leqq (1 - \delta) \{\Phi(m_{\xi+nh}) - \Phi(m_\xi)\}$$

oder schliesslich:

$$\frac{\Phi(M_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)}{\Phi(m_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)} \leqq (1 - \delta)\left\{1 + \frac{\Phi(M_\xi) - \Phi(m_\xi)}{\Phi(m_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)}\right\}.$$

Wäre nun $\Phi(\infty) = \infty$, so würde für $n = \infty$ sich ergeben:

$$\lim \frac{\Phi(M_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)}{\Phi(m_{\xi+nh}) - \Phi(M_\xi)} \leqq 1 - \delta$$

was unmöglich ist, da dieser Quotient wegen $M_{\xi+nh} > m_{\xi+nh}$ jedenfalls $\geqq 1$ sein muss. Mithin muss $\Phi(\infty)$ endlich und bestimmt sein, d. h. $\sum f(\nu)$ ist *convergent*. —

Um das im vorstehenden Satze enthaltene Divergenz- und Convergenzkriterium (54) in eine für die wirkliche Anwendung brauchbare Form zu setzen, bemerke man, dass:

$$\Phi(M_{x+h}) - \Phi(M_x) \begin{cases} > (M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_{x+h}) \\ < (M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_x) \end{cases}$$

und ebenso:

$$\Phi(m_{x+h}) - \Phi(m_x) \begin{cases} > (m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_{x+h}) \\ < (m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_x) \end{cases}$$

folglich:

$$(55) \qquad \frac{\Phi(M_{x+h}) - \Phi(M_x)}{\Phi(m_{x+h}) - \Phi(m_x)} \begin{cases} > \dfrac{(M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_{x+h})}{(m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_x)} \\[2ex] < \dfrac{(M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_x)}{(m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_{x+h})} \end{cases}.$$

Mit Benützung dieser Ungleichungen kann man jetzt die lediglich zur Ableitung der Relation (54) eingeführte Hülfsfunction Φ vollständig wieder eliminiren und erhält an Stelle von (54) das folgende *erweiterte Hauptkriterium zweiter Art:*

$$(\mathrm{X}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{x=\infty} \frac{(M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_{x+h})}{(m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_x)} > 1: \textit{Divergenz} \\ &\lim_{x=\infty} \frac{(M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_x)}{(m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_{x+h})} < 1: \textit{Convergenz} \end{aligned} \right\} \ (M_x > m_x).$$

Die Form dieser Ausdrücke vereinfacht sich nicht unerheblich, wenn man eine der Grössen M_x, m_x durch x oder $x - h$ ersetzt.

Nimmt man zunächst in der ersten Ungleichung $m_x = x$, in der zweiten $m_x = x - h$ (also: $m_{x+h} = x$), so ergiebt sich:

$$(\mathrm{X},1) \left\{ \begin{aligned} &\lim \frac{(M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_{x+h})}{h \cdot f(x)} > 1: \textit{Divergenz}, \quad (M_x > x), \\ &\lim \frac{(M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_x)}{h \cdot f(x)} < 1: \textit{Convergenz}, \quad (M_x > x - h). \end{aligned} \right.$$

Dabei kann man der Einfachheit halber offenbar in der zweiten Ungleichung die Bedingung $M_x > x - h$ durch die etwas engere $M_x > x$ ersetzen.

Setzt man sodann in der ersten der beiden Ungleichungen (X) $M_x = x - h$ (also: $M_{x+h} = x$), in der zweiten $M_x = x$, so folgt:

$$(X,2)\quad \begin{cases} \lim \dfrac{h \cdot f(x)}{(m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_h)} > 1: \textit{Divergenz}, & (m_x < x - h, \\ \lim \dfrac{h \cdot f(x)}{(m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_{x+h})} < 1: \textit{Convergenz}, & (m_x < x). \end{cases}$$

Auch hier kann man der Gleichförmigkeit halber die Bedingung $m_x < x - h$ der ersten Ungleichung durch die andere $m_x < x$ ersetzen, wie die folgende Ueberlegung zeigt. Für $m_x = x - h$ geht nämlich die betreffende Ungleichung über in:

$$\lim \frac{f(x)}{f(x-h)} > 1$$

d. h. es müsste $f(x)$ von irgend einer Stelle x ab beständig *zu*nehmen, was ja hier ausgeschlossen ist. Das Gleiche gilt um so mehr, wenn man für m_x Werthe zwischen $x - h$ und x einsetzt. Mit anderen Worten: man kommt bei Reihen mit *niemals zu*nehmenden Gliedern $f(\nu)$ überhaupt gar nicht in die Verlegenheit, für solche m_x, welche dem Gebiete $x - h \leq m_x < x$ angehören, die *erste* Ungleichung (X, 2) anzuwenden, da der betreffende Quotient dann unter allen Umständen < 1 ausfällt. Aus diesem Grunde ist es aber auch völlig irrelevant, wenn man mit Hinzufügung dieses Werthegebietes die ursprüngliche Bedingung $m_x < x - h$ in: $m_x < x$ umwandelt.

Man kann schliesslich noch die in den obigen Kriterien vorkommende positive Grösse h specialisiren, wobei es offenbar am nächsten liegt, $h = 1$ zu wählen. Alsdann erhält man:

$$(Y,1)\quad \left.\begin{cases} \lim \dfrac{(M_{x+1} - M_x) \cdot f(M_{x+1})}{f(x)} > 1: & \textit{Divergenz} \\ \lim \dfrac{(M_{x+1} - M_x) \cdot f(M_x)}{f(x)} < 1: & \textit{Convergenz} \end{cases}\right\} (M_x > x),$$

und:

$$(Y,2)\quad \left.\begin{cases} \lim \dfrac{f(x)}{(m_{x+1} - m_x) \cdot f(m_x)} > 1: & \textit{Divergenz} \\ \lim \dfrac{f(x)}{(m_{x+1} - m_x \cdot f(m_{x+1})} < 1: & \textit{Convergenz} \end{cases}\right\} (m_x < x).$$

Dies sind im wesentlichen die Kriterien, welche Herr Kohn in einer ziemlich weitläufigen, dabei aber nicht ganz einwurfsfreien Weise

abgeleitet hat.*) Unter gewissen leicht zu eruirenden Bedingungen — welche für m_x in der Regel, für M_x nur ausnahmsweise erfüllt zu sein pflegen — darf man in dem *Convergenz*kriterium (Y, 2) $f(m_{x+1})$ durch $f(m_x)$, in dem *Divergenz*kriterium (Y, 1) $f(M_{x+1})$ durch $f(M_x)$ ersetzen:**) alsdann nehmen diese Kriterien disjunctive Form an, in der Weise dass die Ausdrücke:

$$\lim \frac{(M_{x+1}-M_x)\cdot f(M_x)}{f(x)}, \quad \lim \frac{f(x)}{(m_{x+1}-m_x)\cdot f(m_x)}$$

Divergenz bezw. Convergenz anzeigen, je nachdem ihr Werth >1 bezw. <1 ausfällt.

Es giebt aber noch ein anderes Mittel, um aus den Kriterien (X) solche von disjunctiver Form zu erhalten: nämlich, indem man h gegen Null convergiren lässt. Dieser Grenzübergang ist offenbar gestattet, wenn die Differentialquotienten M'_x, m'_x *existiren* (d. h. endlich und bestimmt sind oder in bestimmter Weise unendlich bezw. Null werden), und wenn sich ausserdem ein bestimmter Werth h' angeben lässt, dergestalt dass für $h \leqq h'$ und für alle Werthe $x \geqq \xi$ die Quotienten

$$\frac{M_{x+h}-M_x}{h} : M'_x \quad \text{und:} \quad \frac{m_{x+h}-m_x}{h} : m'_x$$

beliebig wenig von der Einheit abweichen — Bedingungen, die, wie man sich leicht überzeugt, bei den zumeist in Betracht kommenden Functionen $\left(M_x = px,\ x^p,\ p^x\,(p>1);\ m_x = \frac{x}{p},\ x^{\frac{1}{p}},\ \lg x\right)$ thatsächlich erfüllt sind. Man erhält auf diese Weise:

$$\text{(Z,1)} \qquad \lim \frac{M'_x\cdot f(M_x)}{f(x)} \begin{cases} >1: & \textit{Divergenz}, \\ <1: & \textit{Convergenz}; \end{cases}$$

und:

$$\text{(Z,2)} \qquad \lim \frac{f(x)}{m'_x\cdot f(m_x)} \begin{cases} >1: & \textit{Divergenz}, \\ <1: & \textit{Convergenz}. \end{cases}$$

---

*) *Hoppe*, *Archiv der Mathematik* Bd. 67, p. 63—95. Man vergl. insbes. p. 82 und 84.

**) Die betreffenden Bedingungen lauten:

$$\left.\begin{matrix} m_{x+1}-m_x \\ M_{x+1}-M_x \end{matrix}\right\} < G$$

(d. h. unter einer endlichen Grenze). Für die nächstliegenden Functionen vom Typus m_x wie $\frac{x}{p}$, $x^{\frac{1}{p}}$ $(p>1)$, $\lg x$ ist diese Bedingung offenbar erfüllt. Für M_x desgleichen, wenn man z. B. setzt $M_x = px$; dagegen nicht mehr für $M_x = x^p$ oder p^x.

Dies sind die Kriterien des Herrn **Ermakoff**. Von den zwei Beweisen, welche Herr **Ermakoff** dafür gegeben hat, ist der erste*) unzureichend, weil er auf einer unzulässigen Verwendung von Integralen mit unendlichen Grenzen beruht. Der zweite,**) welchen dieser Vorwurf nicht trifft, basirt auf einem zwar sehr sinnreichen, aber, wie es mir scheinen will, etwas zu künstlichen Grundgedanken. Der hier gegebene Beweis dürfte, abgesehen von seiner grossen Einfachheit, auch den Vorzug besitzen, dass er den Zusammenhang dieser Kriterien mit der gesammten Convergenztheorie deutlich hervortreten lässt.

Die *Möglichkeit* aus einem Kriterium von der Form (X, 1), (Y, 1), (Z, 1) — bezw. (X, 2), (Y, 2), (Z, 2) *wirksamere* Kriterien abzuleiten, wird, wie man leicht erkennt, im allgemeinen wieder dadurch erzielt, dass man an Stelle der ursprünglich gewählten Functionen M_x bezw. m_x stärker bezw. schwächer zunehmende einführt. Indessen ergiebt sich dabei das merkwürdige Resultat, dass die Einführung einer beliebig oft iterirten Function von M_x bezw. m_x an Stelle von M_x bezw. m_x *keine* weitere Verbesserung des betreffenden Kriteriums hervorbringt: man muss, um eine solche zu erzielen, gleich zu solchen Functionen greifen, welche stärker bezw. schwächer zunehmen, als jede beliebig oft iterirte Function von M_x bezw. m_x.

Wählt man specielle $M_x = e^x$, $m_x = \lg x$, so nehmen die Kriterien (Z, 1), (Z, 2) die für die praktische Anwendung äusserst brauchbare Form an:

$$(Z',1) \qquad \lim \frac{e^x \cdot f(e^x)}{f(x)} \begin{cases} > 1, \\ < 1. \end{cases}$$

$$(Z',2) \qquad \lim \frac{x \cdot f(x)}{f(\lg x)} \begin{cases} > 1, \\ < 1. \end{cases}$$

Dieselben beherrschen das ganze Gebiet der gewöhnlichen logarithmischen Kriterien, d. h. sie reichen vollständig aus, um die Divergenz

*) Darboux, *Bulletin*, T. II, p. 250. Der angefochtene Beweis lässt sich indessen zu einem brauchbaren umgestalten, wenn man sich dabei genau derjenigen Schlussweise bedient, welche oben zur Begründung des Kriteriums (54) benützt wurde.

**) Näml. Zeitschr., T. XVIII (2ième Sér. T. VII) p. 142. — Es werden dort völlig aus dem Stegreif Reihen aufgestellt und mit Hülfe von bestimmten Integralen geprüft — welche mit den im § 6, Gl. (25)—(28) betrachteten die ausserordentlich schwache Divergenz bezw. Convergenz gemein haben und auch, wie jene, auf die Einführung unendlich oft iterirter Functionen beruhen. Aus diesen werden dann vermittelst eines Kunstgriffes, welcher die iterirten Functionen aus dem Endausdrucke verschwinden macht, die Kriterien (Z, 2) abgeleitet. Dieselben gehen dann offenbar ohne weiteres in die Kriterien (Z, 1) über, wenn man die inverse Function von m_x mit M_x bezeichnet.

bezw. Convergenz von $\sum a_\nu$ zu entscheiden, sobald für eine noch so gross anzunehmende, pos. ganze Zahl $\varkappa$:

$$a_n \gtrsim \frac{1}{L_\varkappa(n)} \quad \text{bezw.} \quad a_n \lesssim \frac{1}{L_\varkappa(n)\lg_\varkappa^\varrho n} \quad (\varrho > 0).$$

Dagegen erstreckt sich ihre Wirksamkeit *nicht* mehr auf Reihen von so schwacher Divergenz bezw. Convergenz, wie die in § 6 betrachteten:

$$\sum \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)\,\varkappa_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \sum \frac{1}{L_{\varkappa_\nu}(\nu)\cdot \varkappa_\nu^{1+\varrho}}$$

wo $\varkappa_\nu$ in der dort näher angegebenen Weise mit ν ins Unendliche wächst. Zugleich ergiebt sich aus dem oben gesagten, dass man zur Erzielung noch wirksamerer Kriterien als $(Z', 1)$, $Z', 2)$ für M_x bezw. m_x solche Functionen einführen müsste, die schliesslich stärker bezw. schwächer ins Unendliche wachsen, wie jede beliebig oft iterirte Exponentialgrösse bezw. jeder beliebig oft iterirte Logarithmus.

München, im Mai 1889.

Ueber eine neue Darstellung der Resultante zweier Formen gleicher Ordnung.

Von

Wilhelm Stahl in Aachen.

Für die Resultante zweier binären Formen n^{ter} Ordnung ist die Bézout'sche Darstellung als Determinante von n^2 Elementen von grosser Bedeutung. Von nicht geringerer Wichtigkeit scheint eine andere Darstellung dieser Resultante als Determinante von $(n-1)^2$ Elementen zu sein, welche ich in diesem Aufsatze angeben werde. In der Theorie der rationalen Curven spielt diese Determinante eine hervorragende Rolle. Ich werde hier zunächst zwei Formen vierter Ordnung betrachten, um den Gedankengang klar zu legen und dann die Sätze für ein beliebiges n mittheilen.

§ 1.

1. Es seien gegeben die beiden Formen:

$$\varphi_k(\lambda) = A_k\lambda^4 + B_k\lambda^3 + C_k\lambda^2 + D_k\lambda + E_k \quad (k=1,2); \tag{1}$$

bei veränderlichem μ ergiebt sich hieraus die Involution vierter Ordnung:

$$\varphi_1(\lambda) + \mu\varphi_2(\lambda) = 0.$$

Sollen λ und λ_1 Elemente *einer* Gruppe dieser Involution sein, so besteht die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_2(\lambda) \\ \varphi_1(\lambda_1) & \varphi_2(\lambda_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Wegheben des Factors $(\lambda-\lambda_1)$ erhalten wir:

$$\lambda_1{}^3 M_0(\lambda) + \lambda_1{}^2 M_1(\lambda) + \lambda_1 M_2(\lambda) + M_3(\lambda) = 0, \tag{2a}$$

wenn:

$$\text{(2b)}\left\{\begin{array}{llll} M_0(\lambda)=\lambda^3(AB)+\lambda^2(AC) & +\lambda(AD) & +(AE), \\ M_1(\lambda)=\lambda^3(AC)+\lambda^2[(AD)+(BC)] & +\lambda[(AE)+(BD)] & +(BE), \\ M_2(\lambda)=\lambda^3(AD)+\lambda^2[(AE)+(BD)] & +\lambda[(BE)+(CD)] & +(CE), \\ M_3(\lambda)=\lambda^3(AE)+\lambda^2(BE) & +\lambda(CE) & +(DE), \end{array}\right.$$

wobei

$$(AB) = A_1 B_2 - A_2 B_1 \text{ etc.}$$

ist.

Haben die Gleichungen $\varphi_1(\lambda) = 0$ und $\varphi_2(\lambda) = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel λ, so ist λ_1 unbestimmt und es ergiebt sich:

(3) $$M_0(\lambda) = M_1(\lambda) = M_2(\lambda) = M_3(\lambda) = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen können $\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1$ eliminirt werden, wodurch die Bézout'sche Darstellung der Resultante von φ_1 und φ_2 erhalten wird. Wir werden die Elimination von λ in etwas anderer Weise ausführen.

In den drei Formen:

(4) $$f_i(\lambda) = a_i + 4b_i\lambda + 6c_i\lambda^2 + 4d_i\lambda^3 + e_i\lambda^4. \quad (i=1, 2, 3)$$

seien drei linear unabhängige zu den $\varphi_k(\lambda)$ conjugirte Formen gegeben, so dass:

(5) $$A_k a_i - B_k b_i + C_k c_i - D_k d_i + E_k e_i = 0$$

für

$$(k = 1, 2;\ i = 1, 2, 3).$$

Es sind dann die correspondirenden Determinanten der Reihen $A_k \ldots E_k$ und $a_i \ldots e_i$ einander proportional. Wir wählen die letzte Reihe so, dass diese Determinanten einander gleich sind, also:

(6) $$(AB) = (cde) \cdots (DE) = (abc).$$

Nun bilden wir die Ausdrücke

$$\psi_i(\lambda) = -a_i M_0 + b_i M_1 - c_i M_2 + d_i M_3 = 0$$

oder, was dasselbe ist

$$\psi_i(\lambda) = b_i M_0 - c_i M_1 + d_i M_2 - e_i M_3 = 0;$$

unter Berücksichtigung von (5) und (6) folgt:

(7a) $$\psi_i(\lambda) = \alpha_i + \beta_i\lambda + \gamma_i\lambda^2$$

wobei:

$$(6\text{b})\begin{cases} \alpha_i = -b_i(bcd) + c_i(acd) - d_i(abd) + e_i(abc), \\ \beta_i = -b_i(bce) + c_i[(ace) + (bcd)] - d_i[(acd) + (abe)] + e_i(abd), \\ \gamma_i = \quad a_i(cde) - b_i(bde) + c_i(bce) - d_i(bcd). \end{cases}$$

Durch Elimination von $\lambda^2, \lambda, 1$ aus $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ folgt dann für die Resultante R:

(8) $$R = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma).$$

Haben φ_1 und φ_2 einen gemeinsamen quadratischen Factor, so verschwinden alle ersten Minoren von $(\alpha\beta\gamma)$ und umgekehrt. Haben φ_1

und φ_2 einen gemeinsamen cubischen Factor, so sind alle α_i, β_i, γ_i gleich Null und umgekehrt.

II. Die Functionen ψ_i sowie deren Coefficienten α_i, β_i, γ_i sind in mehrfacher Hinsicht von grossem Interesse, weshalb wir sie etwas näher betrachten.

Wenden wir die bekannte Operation:

$$\Delta = \Sigma_i \left\{ \frac{\partial}{\partial d_i} e_i + 2 \frac{\partial}{\partial c_i} d_i + 3 \frac{\partial}{\partial b_i} c_i + 4 \frac{\partial}{\partial a_i} b_i \right\}$$

auf α_i wiederholt an, so findet sich:

(9) $$\Delta \alpha_i = \beta_i; \quad \Delta \beta_i = 2\gamma_i; \quad \Delta \gamma_i = 0.$$

Es ist somit auch $\Delta R = 0$, woraus die Invarianteneigenschaft von R erhellt. Aus:

$$\alpha_i = - \begin{vmatrix} b_i & a_1 & a_2 & a_3 \\ c_i & b_1 & b_2 & b_3 \\ d_i & c_1 & c_2 & c_3 \\ e_i & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

können mittelst (9) alle Elemente der Determinante $(\alpha\beta\gamma)$ leicht gebildet werden. Die Gleichungen (9) sagen uns aber ferner, dass die Functionen $\psi_i(\lambda)$ simultane Covarianten der Formen $f_i(\lambda)$ sind und zwar von der Beschaffenheit, dass ψ_ν, abgesehen von einem constanten Factor, nicht geändert wird, wenn an Stelle von f_ϱ und f_τ lineare Functionen von f_ν, f_ϱ und f_τ gesetzt werden. Man könnte diese ψ_i deshalb „Semicombinanten" nennen.

Setzt man symbolisch:

$$f_1(\lambda) = a_\lambda^4 = a_\lambda'^4; \quad f_2(\lambda) = b_\lambda^4; \quad f_3(\lambda) = c_\lambda^4,$$

so ist:

(10) $$\psi_1(\lambda) = \frac{1}{2} (aa')^2 (ab)(ac)(a'b)(a'c)(bc) b_\lambda c_\lambda.$$

Die Elimination von λ aus den Gleichungen $\psi_i(\lambda) = 0$ kann auch in folgender Weise vorgenommen werden. Wir bilden die sechs Gleichungen:

$$(\alpha\beta)_{\mu\nu} + \lambda(\alpha\gamma)_{\mu\nu} = 0,$$
$$(\alpha\gamma)_{\nu\varkappa} + \lambda(\beta\gamma)_{\nu\varkappa} = 0.$$

Die Elimination von λ aus irgend zweien derselben liefert einen Ausdruck, der den Factor $(\alpha\beta\gamma)$ enthalten muss, so dass:

(11a) $$(\alpha\beta)_{\mu\nu} (\beta\gamma)_{\varkappa\nu} - (\alpha\gamma)_{\mu\nu} (\alpha\gamma)_{\varkappa\nu} = (\alpha\beta\gamma) \cdot \chi_{\nu,\mu\varkappa}.$$

Insbesondere erhält man für die Resultante der Formen ψ_1 und ψ_2:

$$(11\,b)\qquad (\alpha\beta)_{12}(\beta\gamma)_{12}-(\alpha\gamma)_{12}^2=(\alpha\,\beta\gamma)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ b_1 & c_1 & d_1 & e_1\\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2\end{vmatrix}.$$

Verschwindet aber der zweite Factor der rechten Seite dieser Gleichung, so sind, wie Herr Fr. Meyer*) nachgewiesen hat, f_1 und f_2 die ersten Polaren einer Form fünfter Ordnung.

III. Die Grössen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ stehen mit $a_i \ldots e_i$ in folgenden merkwürdigen Beziehungen:

$$(12)\qquad \begin{cases}(\alpha c)_{\mu\nu}-(\beta b)_{\mu\nu}+(\gamma a)_{\mu\nu}=0,\\ (\alpha d)_{\mu\nu}-(\beta c)_{\mu\nu}+(\gamma b)_{\mu\nu}=0,\\ (\alpha e)_{\mu\nu}-(\beta d)_{\mu\nu}+(\gamma c)_{\mu\nu}=0.\end{cases}$$

Wir können deshalb setzen:

$$\begin{aligned}
m_6 &= (\alpha\beta a),\\
m_5 &= (\alpha\beta b) = (\alpha\gamma a),\\
m_4 &= (\alpha\beta c) = (\alpha\gamma b) = (\beta\gamma a),\\
m_3 &= (\alpha\beta d) = (\alpha\gamma c) = (\beta\gamma b),\\
m_2 &= (\alpha\beta e) = (\alpha\gamma d) = (\beta\gamma c),\\
m_1 &= (\alpha\gamma e) = (\beta\gamma d),\\
m_0 &= (\beta\gamma e)
\end{aligned}$$

und finden:

$$(13)\qquad (\alpha\beta f)=\frac{1}{6\cdot 5}\,\frac{1}{\mu^4}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\mu^2};\quad (\alpha\gamma f)=\frac{1}{6\cdot 5}\,\frac{1}{\mu^4}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\mu\,\partial\lambda};$$

$$(\beta\gamma f)=\frac{1}{6\cdot 5}\,\frac{1}{\mu^4}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2}$$

wobei:

$$(14)\qquad \frac{1}{\mu^6}F=m_6+5m_5\frac{\lambda}{\mu}+15\,m_4\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\cdots+m_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6$$

Die Functionen f_i sind dann abgesehen von einem constanten Factor darstellbar, als die zweiten Polaren von F.**) Es ist nämlich:

$$(15)\qquad \varrho f_i=\frac{1}{\mu^4}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\mu\,\partial\lambda}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2}\,\frac{\lambda_1}{\mu_1}\,\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)$$

wenn $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ und $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ die Wurzeln von $\psi_i(\lambda)=0$ sind.

Die Katalektikante von F steht in naher Beziehung zur Resultante R, man findet:

*) Vergl. Meyer: Zur algebr. Erz. der rat. ebenen Curven 4ter Ord. Diese Annalen Bd. 31, S. 116.

**) Dass die zu einer gegebenen biquadratischen Involution conjugirte Gruppe im Allgemeinen die Gruppe der zweiten Polaren einer bestimmten Form sechster Ordnung ist, hat zuerst Herr Lindemann bemerkt. S. Clebsch-Lindemann Vorles. S. 900, Anmerk.

$$E = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma)^3 = R^3.$$

Verschwindet $(\alpha\beta\gamma)$, so sind nach (11 a) alle Determinanten

$$\begin{vmatrix} m_\nu & m_{\nu+1} \\ m_{\nu+1} & m_{\nu+2} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. F wird eine sechste Potenz und ist zur Darstellung der f_i als zweite Polarformen von F nicht mehr brauchbar.

Im Allgemeinen ist F eine beliebige Form sechster Ordnung. Geht man von einer solchen aus und definirt die f_i als die zweiten Polaren derselben, so bekommen alle α_i, β_i, γ_i den Factor E. Ist $E = 0$, so ist F die Summe von drei sechsten Potenzen linearer Functionen in λ, deren Product der gemeinsame Factor der zu den f_i conjugirten Formen φ_k ist.

§ 2.

Die im vorigen Paragraphen gefundenen Sätze und Beziehungen lassen sich sämmtlich verallgemeinern bei dem Falle, dass $\varphi_k(\lambda)$ $(k = 1, 2)$ von beliebiger Ordnung sind. Ich werde deshalb hier nur die Resultate angeben. Es sei:

(1) $\varphi_k = A_{n,k} + A_{n-1,k}\lambda + A_{n-2,k}\lambda^2 + \cdots + A_{0,k}\lambda^n \quad (k=1, 2).$

Wir bilden $(n-1)$ linear unabhängige Functionen f_i

(2) $f_i = a_{0i}\lambda^n + n a_{1,i}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n,i} \quad \big(i=1,2,3\cdots(n-1)\big),$

deren Coefficienten den Gleichungen:

(3) $A_{n,k}a_{0,i} - A_{n-1,k}a_{1,i} + \cdots \pm A_{0k}a_{n,i} = 0$

Genüge leisten. Ist dann:

$$\alpha_{n-2,i} = -\begin{vmatrix} a_{n-1,i} & a_{n,1} & a_{n,2} \cdots & a_{n,n-1} \\ a_{n-2,i} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{0,i} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \end{vmatrix}$$

und wenden wir die Operation

$$\Delta = \Sigma_i \left\{ \frac{\partial}{\partial a_{1,i}} a_{0,i} + 2 \frac{\partial}{\partial a_{2,i}} a_{1,i} + \cdots + n \frac{\partial}{\partial a_{n,i}} a_{n-1,i} \right\}$$

wiederholt auf $\alpha_{n-2,i}$ an, so finden wir:

$$\Delta\alpha_{n-2,i} = \alpha_{n-3,i}, \quad \Delta^r\alpha_{n-2,i} = r!\,\alpha_{n-2-r,i}; \quad \Delta^{n-1}\alpha_{n-2,i} = 0.$$

Die Resultante von φ_1 und φ_2 ist dann gegeben durch die Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{n-2,1} \\ \alpha_{0,2} & & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{0,n-1} & & \cdots & \alpha_{n-2,n-1} \end{vmatrix}.$$

Verschwinden die r^{ten} Minoren dieser Determinante, so haben φ_1 und φ_2 einen gemeinsamen Factor $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Formen:

$$\psi_i(\lambda) = \alpha_{0,i}\lambda^{n-2} + \alpha_{1,i}\lambda^{n-3} + \cdots + \alpha_{n-2,i}$$

sind simultane Covarianten der Formen $f_i(\lambda)$, deren symbolische Darstellung leicht angegeben werden kann.

Ferner ist:

$$\tau \begin{vmatrix} f_1 & \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} \cdots \alpha_{s-1,1} & \alpha_{s+1,1} & \cdots \alpha_{n-2,1} \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ f_{n-1} & \alpha_{0,n-1} & \alpha_{s-1,n-1} & \alpha_{s+1,n-1} & \cdots \alpha_{n-2,n-1} \end{vmatrix} = \frac{\partial^{n-2} F}{\partial \mu^s \partial \lambda^{(n-2-s)}}$$

wobei $\frac{1}{\mu^{2(n-1)}} F$ eine Function $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in λ ist. Polarisirt man F nach den Wurzeln von $\psi_i(\lambda) = 0$, so erhalten wir die Form $f_i(\lambda)$. Die Katalektikante von F ist gleich R^{n-1}. Verschwindet R, so ist F die $2(n-1)^{\text{te}}$ Potenz einer linearen Function von λ.

Im Allgemeinen ist F eine beliebige Form $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Werden die f_i als die $(n-2)^{\text{ten}}$ Polaren von F definirt, so haben die zu den f_i conjugirten Formen φ_k einen gemeinsamen Factor $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, sobald die Katalectikante von F verschwindet.

Anmerkung: Der Lindemann'sche Satz ist näher begründet und für die Theorie der ebenen rationalen Curven 4^{ter} Ordnung verwerthet worden von den Herrn: Fr. Meyer (Apolarität S. 208), Friedrich (die rationale Plancurve 4^{ter} Ordnung im Zusammenhang mit der binären Form 6^{ter} Ordnung. Giessen 1886), E. Meyer (die rationalen ebenen Curven 4^{ter} Ordnung und die binäre Form 6^{ter} Ordnung. Königsberg 1888) und schliesslich von dem Verfasser (Ueber die rationale ebene Curve 4^{ter} Ordnung. Crelle Journal Bd. 104, S. 302) Herr Friedrich hat auch auf die Verallgemeinerung des Satzes hingewiesen.

Aachen im Februar 1889.

Ueber eine Gattung regelmässiger ebener Configurationen.

Von

Jan de Vries in Kampen (Holland).

In einer Arbeit „Ueber eine Gattung von Configurationen"*) hat Herr Kantor gezeigt, dass p vollständige q-Ecke, deren Ecken von q nach einem Punkte zielenden Geraden getragen werden, eine gewisse Configuration

$$\left(\binom{p+q}{q}_q, \binom{p+q}{q-1}_{p+1}\right)$$

bestimmen. Herr Jung, welcher durch statische Betrachtungen zu den nämlichen Cf. gelangte**), führte eine Bezeichnung für die Punkte und Geraden dieser Cf. ein, wodurch einerseits ihre Regelmässigkeit zu Tage trat, anderseits die Zerlegung jener Cf. in einfachere Cf. derselben Gattung leicht vollzogen werden konnte. Neuerdings wurden die jener Gattung angehörenden Cf.

$$\left(\binom{2n}{n}_n, \binom{2n}{n-1}_{n+1}\right)$$

von Herrn Van den Berg***) bei der graphischen Lösung eines Systems linearer Gleichungen aufs Neue bemerkt.

Der folgende Aufsatz soll nun zunächst den von Herrn Kantor angedeuteten Nachweis für die Existenz jener Cf. bringen, sodann aber mit Hülfe der Jung'schen Bezeichnung neue Zerlegungen enthüllen, welche denen der polyedralen†) Cf. analog sind.

---

*) Sitzungsb. d. Wiener Akad. Bd. 80. 1879.

**) Sull' equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni. 1884. (Ann. d. Mat. II a, tomo XII).

***) „Over de graphische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen" (Sitzungsb. d. holl. Akad. d. Wiss., Bd. IV, S. 196) und „De constructiefiguur u. s. w." (ebendort Bd. V, S. 267).

†) Vgl. meine Arbeit „Ueber polyedrale Cf." im Bd. XXXIV, S. 227 dieser Zeitschrift.

§ 1.

Allgemeines.

1. Drei Dreiecke mit den Ecken (124, 125, 126), (134, 135, 136), (234, 235, 236), welche in drei nach dem Punkte 123 zielende Gerade 1234, 1235, 1236 beschrieben sind, erzeugen drei Collineationsaxen 1456, 2456, 3456, welche resp. die Schnittpunkte

$$i45 \equiv \big((ik4, ik5), (il4, il5)\big),$$
$$i56 \equiv \big((ik5, ik6), (il5, il6)\big),$$
$$i64 \equiv \big((ik6, ik4), (il6, il4)\big)$$

homologer Dreiecksseiten enthalten.

Nun ist 124 der Schnittpunkt der Seiten (145, 245) und (146, 246), 234 der Schnitt von (245, 345) mit (246, 346), 134 der Schnitt von (345, 145) mit (346, 146), demnach ist die Gerade 1234, welche die Punkte 124, 234, 134 trägt, die Collineationsaxe der Dreiecke (145, 245, 345) und (146, 246, 346): die Geraden 1456, 2456, 3456, welchen diese Dreiecke einbeschrieben sind, zielen daher nach einem Punkte 456, welcher die erzeugte Figur zu einer $(20_3, 15_4)$ ergänzt.

Tabelle der $(20_3, 15_4)$.

(A)

Gerade.	Punkte.			
1234	123	124	134	234
1235	123	125	135	235
1236	123	126	136	236
1245	124	125	145	245
1345	134	135	145	345
2345	234	235	245	345
1256	125	126	156	256
1356	135	136	156	356
2356	235	236	256	356
1246	124	126	146	246
1346	134	136	146	346
2346	234	236	246	346
1456	145	146	156	456
2456	245	246	256	456
3456	345	346	356	456

Aus dieser Tabelle ergiebt sich, dass jeder Punkt *ikl* dieser Cf. der Schnitt dreier Collineationsaxen ist, für welche die zugehörenden Dreiecke einem Dreistrahle mit Centrum *jmn* einbeschrieben sind; je zwei Punkte *ikl*, *jmn* werde ich als *associirte Gerade erster Ordnung*, a_1, bezeichnen, wonach obige Cf. zehn associirte Punktepaare besitzt.

2. Sind einem Vierstrahle (1234, 1235, 1236, 1237) mit Centrum 123 drei vollständige Vierecke mit den Ecken *ik*4, *ik*5, *ik*6, *ik*7 ($i, k = 1, 2, 3$) einbeschrieben, dann gehört 123 vier Cf. (20_3, 15_4) an, welche resp. durch die Zahlensextupel 123456, 123457, 123467, 123567 dargestellt werden: dem Punkte 123 sind also vier Punkte a_1, n. l. 456, 457, 467, 567 zugeordnet. Nun laufen die Seiten der Dreiecke (1*i*7, 2*i*7, 3*i*7), wo $i = 4, 5, 6$, durch die auf der Geraden 1237 belegenen Punkte 127, 137, 237; die drei paarweise durch jene Dreiecke bestimmten Collineationscentra 457, 467, 567 bilden daher mit jenen zwölf Punkten eine π_6, d. h. eine polyedrale (15_4, 20_3), in welcher die mit 457, 467, 567 incidente Gerade 4567 der Geraden 1237 associirt ist.*) In einer zweiten π_6 ist die Gerade 1236 einer durch die Punkte 456, 476, 576 gelegten Geraden associirt, welche als 4576 zu bezeichnen wäre, indem die Zahl 6 jeder Combination der zweiten, resp. dritten Classe der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 7 zugesellt werden muss, um die Bezeichnung jener zweiten π_6 aus der üblichen herzuleiten. Die Geraden 4576 und 4567 sind aber identisch, weil die Punkte 567 und 467 beiden angehören.

Diese den vier Punkten 456, 457, 467, 567 incidente Gerade 4567 ergänzt nun die bisher betrachtete Figur zu einer Cf. 35_4, welche zusammengesetzt ist aus dem Centrum 123 des Vierstrahles, den zwölf Ecken der Vierecke, den achtzehn Schnitten homologer Seiten und den vier dem Punkte 123 associirten Punkten nebst den vier Strahlen, den achtzehn Vierecksseiten, den zwölf Collineationsaxen und der Geraden 4567; dabei ist jede Ecke mit einem Strahle und drei Seiten, jeder Schnitt homologer Seiten mit zwei Seiten und zwei Axen, jeder dem Centrum associirte Punkt mit drei Axen und der Geraden 4567 incident.

Weil die Elemente dieser 35_4 durch die Combinationen dritter bez. vierter Classe von 7 Zahlen dargestellt werden mit der Bedingung, dass die Gerade *iklm* die Punkte *ikl*, *ikm*, *ilm*, *klm* trägt, ist die Cf. regelmässig und bilden ihre Elemente 35 *complementäre* Paare *ijk* und *lmnp*. Wo nöthig werde ich das complementäre Element eines Punktes bez. einer Geraden der 35_4 durch c_1 andeuten. Offenbar ist

*) Vgl. meine Arbeit „Ueber gewisse ebene Cf." (Acta Math. XII, S. 70); obige Bezeichnung der π_6 ergiebt sich aus der l. c. benutzten, wenn man hinter jede Combination der Zahlen 1 bis 6 die Zahl 7 schreibt.

die Cf. sich selbst reciprok, wonach sie auch bestimmt werden kann durch drei vollständige Vierseite, welche in Bezug auf vier allineirte Punkte in *linealer* Lage*) sind.

3. Werden die Ecken dreier vollständiger Fünfecke ($ik4$, $ik5$, $ik6$, $ik7$, $ik8$), wo $i, k = 1,2,3$, auf fünf durch den Punkt 123 zielende Gerade $123i$ ($i = 4, 5, 6, 7, 8$) gelegt, dann ist 123 in fünf Cf. 35_4 complementäres Element zu den fünf Geraden 4567, 4568, 4578, 4678, 5678, welche zu zweien durch die Punkte ikl ($i, k, l = 4,5,6,7,8$) laufen und mit ihnen ein vollständiges Fünfseit bilden. Der Punkt 123, die fünfzehn Ecken, die dreissig homologen Schnitte und die zehn dem 123 associirten Punkte sind nun je mit fünf Geraden incident, nämlich jede Ecke mit einem Strahle und vier Seiten, jeder homologe Schnitt mit zwei Seiten und drei Axen, jeder associirte Punkt mit drei Axen und zwei complementären Geraden, indess die fünf Strahlen, die dreissig Seiten, die dreissig Axen und die fünf Geraden c_1 je vier der genannten Punkte tragen.

Diese durch obige Elemente gebildete Cf. (56_5, 70_4), deren Regelmässigkeit sich aus der Bezeichnung ergiebt, entsteht offenbar auch aus vier in Bezug auf vier allineirte Punkte lineal belegenen Vierseiten. Ihre Geraden lassen sich in 35 Paare $iklm$, $nopq$ anordnen. welche ich als *associirte Paare zweiter Ordnung* bezeichne; wo nöthig werde ich jedes Element eines solchen Paares als das a_2 des anderen andeuten.

4. Trägt der Vierstrahl (12345, 12346, 12347, 12348) mit Centrum 1234 vier vollständige Vierecke mit den Ecken $ikl5$, $ikl6$, $ikl7$, $ikl8$, ($i, k, l = 1, 2, 3, 4$), so ist 1234 in vier Cf. 35_4 enthalten. Die Punkte 1238, 1248, 1348, 2348 sind bez. mit den Seiten $1238i$, $1248i$, $1348i$, $2348i$ ($i = 5, 6, 7$) dreier vollständiger Vierseite incident, und bestimmen mit diesen eine ebenfalls der Figur angehörende 35_4, in der die Gerade 12348 ein complementäres Paar bildet mit dem Schnitte 5678 der Geraden 15678, 25678, 35678, 45678**), welche in den vier oben erwähnten 35_4 die c_1 des Punktes 1234 sind. Diese vier Cf. sind demnach enthalten in einer Cf. (70_4, 56_5), der das Centrum, die sechszehn Ecken, die sechsunddreissig homologen Schnitte, die sechszehn Punkte a_1 des Centrums und der dem Centrum zugeordnete *associirte Punkt zweiter Ordnung* 5678 als Punkte, — die vier Strahlen, die vierundzwanzig Seiten, die vierundzwanzig Axen und die vier dem

*) Zwei n-Seite sind *lineal* belegen, wenn die Schnitte der n Seitenpaare in *einer* Geraden liegen. (Schroeter, Ueber das Fünfflach und Sechsflach, Crelle Bd. 100, S. 238).

**) Diese Bezeichnung der 35_4 wird mit derjenigen der zweiten Nummer identisch, falls überall die 8 fortgelassen wird.

Centrum zugeordneten Geraden c_1 als Gerade angehören. Diese $(70_4, 56_5)$ ist offenbar der obigen $(56_5, 70_4)$ reciprok.

Vier Fünfecke mit den Ecken $iklp$, wo $i, k, l = 1, 2, 3, 4$ und $p = 5, 6, 7, 8, 9$, bestimmen, wenn sie einem Fünfstrahle $1234i$ $(i = 5, 6, 7, 8, 9)$ einbeschrieben sind, fünf Cf. $(70_4, 56_5)$; das Centrum 1234 des Fünfstrahles ist demnach fünf associirten Punkten a_2 zugeordnet, nämlich 5678, 5679, 5689, 5789, 6789. Die Punkte 1239, 1249, 1349, 2349 liegen auf den Seiten $1239i$, $1249i$, $1349i$, $2349i$, $(i = 5, 6, 7, 8)$ von vier vollständigen Vierseiten, mit denen sie eine in der Figur enthaltene $(56_5, 70_4)$ bestimmen, wo die Punkte 5679, 5689, 5789, 6789 mit der a_2 der Geraden 12349 incident sind.*) Weil in einer zweiten $(56_5, 70_4)$ die Punkte 5678, 5698, 5798, 6798 auf der a_2 der Geraden 12348 liegen, kann durch die fünf dem 1234 zugeordneten Punkte a_2 eine Gerade 56789 gelegt werden, welche ich die *complementäre Gerade zweiter Ordnung* c_2 des Punktes 1234 nenne.

Sie ergänzt die bisher erzeugte Figur zu einer Cf. 126_5, welche aus einem Centrum, zwanzig Ecken, sechszig homologen Schnitten, vierzig Punkten a_1 und fünf Punkten a_2 nebst fünf Strahlen, vierzig Seiten, sechszig Axen, zwanzig Geraden c_1 und einer Geraden c_2 zusammengesetzt ist. Jeder Punkt dieser durch die Combinationen vierter und fünfter Classe von 9 Zahlen dargestellten Cf. kann als Centrum betrachtet werden; seine Gerade c_2 wird durch die fünf Zahlen bezeichnet, welche das Symbol des Centrums nicht enthält.

5. Die obigen Betrachtungen legen die Vermuthung nahe, dass $(p - 1)$ vollständige p-Ecke, welche paarweise perspectivisch sind in Bezug auf einen durch das Zeichen $1234\ldots(p-2)(p-1)$ dargestellten Punkt als Centrum, eine Cf.

$$\binom{2p-1}{p}_p$$

bestimmen mit

$$\binom{p-1}{i+2}\binom{p}{i+2}$$

Punkten a_i und

$$\binom{p-1}{i+2}\binom{p}{i+3}$$

Geraden c_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, p-3)$, wo jede c_i mit $(i + 3)$ Punkten a_i incident ist. Diese Vermuthung wird zur Gewissheit, sobald es gelingt zu zeigen, dass sich aus der obigen Voraussetzung die Existenz einer Cf.

$$\binom{2p+1}{p+1}_{p+1}$$

---

*) Diese Bezeichnung der $(56_5, 70_4)$ ergiebt sich aus derjenigen der dritten Nummer, wenn man hinter jedes Symbol die 9 schreibt.

ergiebt, welche durch p in Bezug auf *ein* Centrum perspectivisch gesetzte $(p+1)$-Ecke bestimmt ist.

Schreibt man $(p-1)$ vollständige $(p+1)$-Ecke einem $(p+1)$-Strahle mit Centrum $123\ldots(p-1)$ ein, so sind diesem Punkte in $(p+1)$ Cf.

$$\binom{2p-1}{p}_p$$

$(p+1)$ verschiedene Gerade c_{p-3} zugeordnet, welche mit den durch sie getragenen Punkten a_{p-3} ein vollständiges $(p+1)$-Seit bilden. Auf diese Weise entsteht eine Cf.

$$\left(\binom{2p}{p+1}_{p+1}, \binom{2p}{p}_p\right),$$

deren Gerade in $\frac{1}{2}\binom{2p}{p}$ Paare geordnet werden können, wobei jedes Paar die sämmtlichen zur Bezeichnung der Cf. verwendeten Zahlen enthält *(associirte Paare* $(p-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung)*. Die neue Figur enthält nämlich

$$1+(p-1)(p+1)+\binom{p-1}{2}\binom{p+1}{2}+\cdots+\binom{p-1}{p-1}\binom{p+1}{p-1}=\binom{2p}{p+1}$$

Punkte*) und

$$(p+1)+(p-1)\binom{p+1}{2}+\binom{p-1}{2}\binom{p+1}{3}+\cdots+\binom{p-1}{p-1}\binom{p+1}{p}=\binom{2p}{p}$$

Gerade, deren jede p jener Punkte trägt, indess in jedem Punkte je $(p+1)$ Gerade zusammenlaufen.

Jede Gerade dieser Cf. kann mit den p vollständigen p-Seiten, welche in Bezug auf sie in linealer Lage sind, zur Bestimmung der Cf. benutzt werden; ihre Gerade a_{p-2} enthält alsdann p Punkte c_{p-3}, welche ihr in p verschiedenen Cf.

$$\binom{2p-1}{p}_p$$

zugeordnet sind.

Es sei nun der Punkt $123\ldots p$ das gemeinschaftliche Collineationscentrum von p vollständigen p-Ecken mit den durch je p Zahlen bezeichneten Ecken:

$$\left.\begin{array}{l} i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}(p+1) \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}(p+2) \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}(p+3) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}(2p-1) \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}(2p) \end{array}\right\} (i_1, i_2, \ldots, i_{p-1} = 1, 2, 3, \ldots, p).$$

*) Eine einfache Methode zur Berechnung von dergleichen Summen findet sich in der oben citirten zweiten Arbeit des Herrn Van den Berg, S. 278, 279.

Die Construction sämmtlicher Punkte a_i und Geraden c_i liefert alsdann eine Figur, in der das Centrum $123\ldots p$ in p Cf.

$$\binom{2p-1}{p}_p$$

complementärer Punkt c_{p-3} ist für die nachstehenden Geraden:

$$\left.\begin{array}{l} 1(p+1)(p+2)\ldots(2p-1)2p \\ 2(p+1)(p+2)\ldots(2p-1)2p \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p(p+1)(p+2)\ldots(2p-1)2p \end{array}\right\}.$$

Weil die Cf.

$$\binom{2p-1}{p}_p,$$

deren Existenz oben vorausgesetzt wurde, auch durch $(p-1)$, in Bezug auf p allineirte Punkte lineal gesetzte, vollständige p-Seite erzeugt werden kann, und die soeben genannten Geraden c_{p-3} derjenigen Cf.

$$\binom{2p-1}{p}_p$$

angehören, welche durch die p allineirten Punkte $i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}(2p)$ und die nach ihnen zielenden Geraden bestimmt erscheint, so laufen jene Geraden c_{p-3} zusammen in einem durch das Symbol

$$(p+1)(p+2)\ldots 2p$$

angedeuteten Punkte, der als c_{p-2} zur Geraden $123\ldots p(2p)$ gehört, zugleich aber mit $123\ldots p$ ein associirtes Punktepaar $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bildet.

Die erzeugte Figur enthält nun

$$1 + p^2 + \binom{p}{2}^2 + \cdots + \binom{p}{i}^2 + \cdots + p^2 + 1 = \binom{2p}{p}$$

Punkte und

$$p + p\binom{p}{2} + \binom{p}{2}\binom{p}{3} + \cdots + \binom{p}{i}\binom{p}{i+1} + \cdots + p = \binom{2p}{p-1}$$

Gerade; da jeder Punkt mit p Geraden, jede Gerade mit $(p+1)$ Punkten incident ist, bilden sie eine Cf.

$$\left(\binom{2p}{p}_p,\ \binom{2p}{p-1}_{p+1}\right).$$

Sind schliesslich die Ecken

$$\left.\begin{array}{l} i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}\ (p+1) \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}\ (p+2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}(2p+1) \end{array}\right\} (i_1, i_2, \ldots, i_{p-1} = 1, 2, 3, \ldots, p)$$

von p vollständigen $(p+1)$-Ecken mit $(p+1)$ nach dem Punkte $123\ldots p$ zielenden Strahlen $123\ldots pi$ $(i=p+1, p+2, \ldots, 2p+1)$ incident, dann gehören $(p+1)$ Punkte a_{p-2} zum Centrum $123\ldots p$, nämlich $k_1 k_2 k_3 \ldots k_p$ $(k_i = p, p+1, \ldots, 2p+1)$. Nun zielen die Seiten von p in der Figur enthaltenen vollständigen p-Seiten durch die Punkte $i_1 i_2 \ldots i_{p-1}(2p+1)$ der Geraden $123\ldots p(2p+1)$, und bestimmen mit ihnen eine ebenfalls der Figur angehörende Cf.

$$\left(\binom{2p}{p-1}_{p+1}, \binom{2p}{p}_p\right),$$

in welcher die Punkte $i_1 i_2 \ldots i_{p-1}(2p+1)$, wo $i_k = p+1$ bis $2p$, auf derjenigen Geraden liegen, welche der Geraden $123\ldots p(2p+1)$ als a_{p-2} zugeordnet ist. Hieraus ergiebt sich, dass die $(p+1)$ oben erwähnten Punkte a_{p-2} zu je p allineirt, daher alle mit *einer* Geraden $(p+1)(p+2)\ldots(2p+1)$ incident sind, welche als die c_{p-2} des Centrums $123\ldots p$ zu betrachten ist.

Die Figur enthält nun

$$1 + p(p+1) + \binom{p}{2}\binom{p+1}{2} + \cdots = \binom{2p+1}{p}$$

Punkte und

$$(p+1) + p\binom{p+1}{2} + \binom{p}{2}\binom{p+1}{3} + \cdots = \binom{2p+1}{p}$$

Gerade, wobei jedes Element $(p+1)$ Elemente trägt; sie bilden daher eine Cf.

$$\binom{2p+1}{p}_{p+1}.$$

Gerade so wie in der dritten Nummer kann mit Hülfe des obigen Resultates gezeigt werden, dass p einem q-Strahle eingeschriebene vollständige q-Ecke eine regelmässige

$$\left(\binom{p+q}{q}_q, \binom{p+q}{q-1}_{p+1}\right)$$

bestimmen, deren Elemente durch die Combinationen p^{ter} bez. $(p+1)^{\text{ter}}$ Classe von $(p+q)$ Zahlen bezeichnet werden können, wo jede durch $(p+1)$ dieser Zahlen dargestellte Gerade alle Punkte enthält, deren Symbole durch Entfernung je einer Zahl aus dem Symbole der Geraden hervorgehen.

Für $p=2$ und $q=n-2$ erhält man offenbar die polyedrale Cf.

$$\left(\binom{n}{2}_{n-2}, \binom{n}{3}_3\right),$$

welche ich l. c. durch das Symbol π_n dargestellt habe. Im Anschluss an diese Bezeichnung werde ich die Cf.

$$\left(\binom{n}{r}_{n-r}, \binom{n}{r+1}_{r+1}\right),$$

deren Elemente durch die Combinationen r^{ter} bez. $(r+1)^{\text{ter}}$ Classe von n verschiedenen Zahlen angedeutet werden, durch das Symbol

$$\pi_n^{r+1}$$

darstellen; demnach wäre die polyedrale Cf. genauer als π_n^3 zu bezeichnen.

Als Resultat der Betrachtungen dieses § ergiebt sich:

Jede Cf.

$$\pi_n^{r+1} \equiv \left(\binom{n}{r}_{n-r}, \binom{n}{r+1}_{r+1}\right),$$

deren Punkte und Gerade sich durch die Combinationen r^{ter} bezüglich $(r+1)^{\text{ter}}$ Classe von n verschiedenen Zahlen derart darstellen lassen, dass jede Gerade alle diejenigen Punkte enthält, deren Symbole durch Unterdrückung einer Zahl aus dem Symbole der Geraden hervorgehen, ist vollständig bestimmt durch r einem $(n-r)$-Strahle eingeschriebene vollständige $(n-r)$-Ecke. Jeder Punkt der Cf. kann als Centrum des $(n-r)$-Strahles betrachtet werden.

§ 2.

Nebenvielecke der π_n^4.

6. Weil je zwei getrennte Punkte einer

$$\pi_n^4 \equiv \left(\binom{n}{3}_{n-3}, \binom{n}{4}_4\right)$$

entweder zahlenfremd sind, oder *eine* Zahl gemein haben, enthält π_6^4 getrennte Punktquadrupel, wie z. B. 123, 145, 246, 356; diese vier Punkte bilden ein Nebenviereck, indem sie zusammen nur zwölf, also nicht *alle* Cf.gerade tragen.

Für die π_7^4 lassen sich Nebensiebenecke aufstellen, deren Punkte durch ihre complementären Geraden Nebensiebenseite bestimmen. Die Tabelle eines solchen Nebensiebenecks stellt zugleich ein Hauptsiebenseit der polyedralen π_7^3 dar. *)

	Nebensiebeneck.	Nebensiebenseit.
	123	4567
	145	2367
(B)	167	2345
	246	1357
	257	1346
	347	1256
	356	1247

*) Vgl. meine Arbeit „Ueber polyedrale Cf." (Diese Zeitschr. Bd. XXXIV, S. 238).

Die 28 Geraden der π_7^4, welche mit einem Nebensiebeneck incident sind, tragen ausserdem je drei Cf.punkte; sie zielen somit zu je drei nach den übrigen 28 Cf.punkten, welche zu je vier auf dem complementären Nebensiebenseit liegen. Entfernt man daher aus der π_7^4 die vierzehn Elemente der Tabelle (B) so ergiebt sich eine Cf. 28_3, in welcher z. B. der Punkt 124 mit den drei Paaren 134, 234; 125, 245; 126, 146 allineirt ist. Von den Geraden, die in jener π_7^4 diese sechs Punkte verbinden, enthält die Cf. 28_3 die 2345, 1346, 1256 nicht mehr, indess von den übrigen Geraden, mit denen diese Punkte incident sind, eine durch einen Punkt der ausgeschiedenen Geraden 1247, die zweite durch einen der ausgeschiedenen Punkte 123, 145, 246 läuft; die Cf. 28_3 ist daher *atrigonisch*, d. h. sie besitzt keine Cf.dreiecke. Tabelle (C) enthält die sechs in der 28_3 mit 1234 verbundenen Geraden:

(C)

1245	124	125	245
1345	134	135	345
1246	124	126	146
2346	234	236	346
1347	134	137	147
2347	234	237	247

Mit Hülfe dieser Tabelle und der Tabelle (B) ersieht man leicht, dass die 28_3 keine Gerade besitzt, welche drei der zwölf mit 1234 verbundenen Punkte trüge; die Cf. enthält also auch keine *Bitripel*, d. h. keine atrigonische $(9_2, 6_3)$ oder $(6_3, 9_2)$*).

Durch Ausscheidung eines Nebensiebenecks und des complementären Nebensiebenseits erhält man aus der $\pi_7^4 \equiv 35_4$ eine regelmässige atrigonische 28_3 ohne Bitripel.

7. Die Geraden der π_m^4, welche nach x gegenseitig getrennten Cf.punkten zielen, werden zu je drei durch die übrigen $\binom{m}{3} - x$ Cf.-punkte laufen, falls

$$(m-3)x = \binom{m}{3} - x,$$

oder

$$x = m(m-1):6.$$

Diesen Werth kann x aber nur für ungerades m bekommen, weil alsdann in der Tabelle des Neben-x-ecks jede der m zur Bezeichnung der Cf. benutzten Zahlen mit $(m-1):2$ Zahlenpaaren Symbole für gegenseitig getrennte Punkte liefert, indess für gerades m nur $(m-2):2$

*) Die atrigonische $(9_2, 6_3)$ wird von zwei Tripeln getrennter Geraden gebildet. Herr Martinetti bezeichnet diese Cf. durch das Symbol (Δ). (Sopra alcune cf. piane, Ann. di Mat. Ser. IIa, tomo XIV, p. 164).

Zahlentripel eine bestimmte Zahl gemein hätten, wonach $x = m(m-2):6$ würde. Weil $m(m-1):6$ für $m = 3k+2$ keine ganze Zahl ist, können nur für $m = 6k+1$ oder $m = 6k+3$ Neben-x-ecke aufgestellt werden; wie leicht ersichtlich, bilden die Cf.geraden, welche durch die Punkte einer solchen Gruppe laufen, mit den übrigen Punkten der π_m^4 eine Cf.

$$\left(\frac{1}{6}\, m(m-1)(m-3)\right)_3,$$

indess die übrigen Cf.geraden mit diesen nämlichen Punkten eine Cf.

$$\left(\frac{1}{6}\, m(m-1)(m-3)_{m-6},\quad \frac{1}{24}\, m(m-1)(m-3)(m-6)_4\right)$$

darstellen.

Um die nachstehende Tabelle für ein Nebenzwölfeck der $\pi_9{}^4$ zu erhalten, wähle man die vier Tripel, in denen die Ziffer 1 vorkommt, willkürlich; sodann bestimme man die drei Paare, welche noch mit der 2 zu Tripeln zusammentreten sollen, derart, dass die neuen Gruppen mit keiner der ersten vier mehr als eine Zahl gemein haben, u. s. w. Auf dieselbe Weise wurde die Tabelle (E) gebildet, welche zugleich ein Haupt-26-seit der polyedralen π_{13}^3 darstellt, wie (D) ein Hauptzwölfseit der $\pi_9{}^3$ (l. c.). Bei der Construction dieser Tabellen zeigt sich, dass sie nicht mehr als vier Tripel, nämlich 123, 145, 246, 347, mit der Tabelle (B) gemein haben können.

Nebenzwölfeck der $\pi_9{}^4$.

	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5
(D)	2	4	6	7	4	5	7	4	5	6	8	6 .
	3	5	8	9	6	9	8	7	8	9	9	7

Nebensechsundzwanzigeck der π_{13}^4.

	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7	9
(E)	2	4	6	7	10	11	4	5	7	8	10	4	5	6	8	10	8	9	11	6	7	8	7	9	8	12 .
	3	5	8	9	13	12	6	9	11	13	12	7	12	13	9	11	12	10	13	10	13	11	12	11	10	13

Wählt man die Bezeichnung des Nebenvielecks so, dass es stets die Punkte 123, 145, 246, 347 enthält, dann ist in der oben erwähnten $\left(m(m-1)(m-3):6\right)_3$ der Punkt 124 verbunden mit den Punktepaaren 134, 234; 125, 245; 126, 146. Die Geraden 1256, 1346, 2345, welche in π_m^4 mit jenen Punkten incident sind, tragen keine Punkte des Nebenvielecks, weil keiner der Punkte 156, 256; 136, 346; 235, 345, welche diese Geraden ausserdem enthalten, von

den Punkten 123, 145, 246 getrennt ist; jene drei Geraden kommen also nicht vor in der $\left(m(m-1)(m-3):6\right)_3$, d. h. diese ist atrigonisch. Weiter ergiebt sich aus Tabelle (C), welche bei obiger Voraussetzung für alle jene atrigonischen Cf. gilt, dass diese Cf., ebenso wenig wie die obige 28_3, Gerade enthält, auf denen je drei der zwölf mit 1234 verbundenen Punkte belegen sind; sie besitzt demnach keine Bitripel.

Für $m \equiv 1$ *oder* 3 (*mod.* 6) *zerfällt die* π^4_m *durch Entfernung eines Nebenvielecks mit* $m(m-1):6$ *Punkten in eine atrigonische*

$$\left(\tfrac{1}{6}\, m(m-1)\,(m-3)\right)_3$$

ohne Bitripel, *und in eine*

$$\left(\tfrac{1}{6}\, m(m-1)\,(m-3)_{m-6},\quad \tfrac{1}{24}\, m(m-1)\,(m-3)\,(m-6)_4\right).$$

§ 3.

Hauptvielseite der π^4_m.

8. Je zwei getrennte Gerade der π^4_m haben höchstens zwei Zahlen gemein. Soll die Cf. Hauptvielseite besitzen, so muss die Zahl $\binom{m}{3}$ durch 4 theilbar sein, also $m = 2k$ oder $m = 8k + 1$. Letzteres ist auszuschliessen, weil für ungerades m jedes Paar der m zur Bezeichnung der Cf. dienenden Zahlen nur mit $(m-3):2$ Paaren zu Quadrupeln zusammengesetzt werden kann, wodurch die Anzahl der gegenseitig getrennten Geraden $m(m-1)(m-3):24$, also zu klein würde.

Für $m = 2k$ ergeben sich $m(m-1)(m-2):24$ Quadrupel, falls $m(m-1)(m-2):6$ durch m, daher $(m-1)(m-2)$ durch 6 theilbar ist; denn wegen der Regelmässigkeit der Cf. kommt jede der m Zahlen gleich oft in der Tabelle eines Hauptvielseits vor; demnach können nur für $m \equiv 2$ oder 4(mod. 6) Hauptvielseite gebildet werden.

Zur Herstellung der betreffenden Tabellen bilde man aus den Zahlen 2 bis m, auf die in der siebenten Nummer angedeutete Weise, $(m-1)(m-2):6$ Tripel, welche zu je zwei höchstens eine Zahl gemein haben, und zusammen alle jene Zahlen gleich oft enthalten; diese Tripel ergänze man durch die Ziffer 1 zu Quadrupeln. Nun streiche man in jenen Tripeln überall die 2 und ersetze sie durch Zahlen aus der Reihe 1, 3, 4 bis m behufs Erhaltung von $(m-1)(m-2):6$ weiteren Tripeln, wobei hierauf zu achten ist, dass keine der Quadrupel, welche durch Hinzutreten der 2 aus jenen Tripeln entstehen, mehr als zwei Zahlen mit einem Quadrupel der zuerst gebildeten Gruppe gemein habe, u. s. w.

Durch dieses Verfahren wurden die beiden nachstehenden Hauptvierzehnseite der π_8^4 aufgestellt.

	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	5
	2	2	2	3	3	4	4	3	3	4	4	4	4	6
(F)	3	5	7	5	6	5	6	5	6	5	6	5	7	7
	4	6	8	7	8	8	7	8	7	7	8	6	8	8

	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4
	2	2	2	3	3	4	5	3	3	4	5	4	5	6
(G)	3	4	6	4	6	5	7	4	7	5	6	5	6	7
	5	7	8	8	7	6	8	6	8	8	7	7	8	8

(F) und (G) bestehen je aus 7 Paaren associirter Geraden a_2, und haben keine Gerade gemein; man sieht leicht, dass aus den 42 nicht in ihnen vorkommenden Cf.geraden sich kein drittes Haupt-14-seit bilden lässt.

Durch Ausscheidung eines Haupt-14-seits entsteht aus der $\pi_8{}^4$ eine Cf. 56_4, wo jeder Punkt 18 Cf.dreiecken angehört, indess diese Zahl für die ursprüngliche Cf. 30 ist.

Entfernt man aus $\pi_8{}^4$ zwei unabhängige Haupt-14-seite, wie (F) und (G), so ergiebt sich eine $(56_3, 42_4)$, wo jeder Punkt nur noch in 9 Cf.dreiecken vorkommt.

Für $m \equiv 2$ oder $4 (mod. 6)$ erhält man aus π^4_m durch Ausscheidung eines Hauptvielseits eine Cf.

$$\left(\binom{m}{3}_{m-4}, \frac{m-4}{4}\binom{m}{3}_4\right)$$

mit $3\binom{m-4}{2}$ Cf.dreiecken in jedem Punkte, wogegen diese Zahl für π^4_m gleich $3\binom{m-3}{2}$ ist.

9. Die Cf. 56_4, welche durch Entfernung eines Haupt-14-seits aus $\pi_8{}^4$ entsteht, besitzt Nebenachtecke. Indem nämlich zwei associirte Gerade 1234, 5678 fortgelassen wurden, sind die acht Punkte 123, 124, 134, 234, 567, 568, 578, 678 gegenseitig getrennt; die übrigen 48 Punkte der 56_4 werden zweimal gezählt, wenn man jede der 32 in jenen 8 Punkten zusammenlaufenden Geraden als Träger von 3 Punkten betrachtet: diese Geraden bilden daher mit den 48 Punkten eine $(48_2, 32_3)$, wogegen die übrigen Geraden der 56_4 mit den nämlichen Punkten einer $(48_2, 24_4)$ angehören.

Soll im Allgemeinen die Cf.

$$\left(\binom{m}{3}_{m-4}, \frac{m-4}{4}\binom{m}{3}_4\right),$$

welche durch Abtrennung eines Hauptvielseits aus der π^4_m entsteht,

ein Neben-x-eck besitzen, welches eine der obigen analoge Zerlegung in zwei Cf. erlaubt, so muss, wie leicht ersichtlich,

$$3x(m-4) = 2\left(\left(\binom{m}{3}\right) - x\right)$$

oder

$$x = m(m-1)(m-2) : 3(3m-10)$$

sein. Aus

$$81x = 9m^2 + 3m + 28 + 280 : (3m-10)$$

erhellt, dass $3m - 10$ alsdann ein Theiler von 280 sein muss, der $\equiv 2 \pmod{3}$, während zugleich $m \equiv 2$ oder $4 \pmod{6}$ ist. Diesen Bedingungen genügen nur die Zahlen 8, 10, 22, 50 für m, denen jedesmal ein ganzzahliger Werth für x entspricht.

Die Cf., welche durch Entfernung eines Hauptvielseits aus einer π_8^4, π_{10}^4, π_{22}^4 oder π_{50}^4 entstehen, besitzen Nebenvielecke, durch deren Ausscheiden die betreffenden Cf. in je zwei einfachere Cf. zerfallen.

10. Soll die Cf.

$$\left(\frac{1}{6}\, m(m-1)(m-3)_{m-6},\quad \frac{1}{24}\, m(m-1)(m-3)(m-6)_4\right),$$

welche für $m \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{6}$ in der π_m^4 enthalten ist (§ 2), Hauptvielseite besitzen, so muss es $m(m-1)(m-3):24$ Zahlenquadrupel geben, welche zusammen jede der m Zahlen gleich oft enthalten; es muss daher $(m-1)(m-3)$ durch 6 theilbar sein, und diess ist für die genannten Werthe stets der Fall. Die Construction der betreffenden Tabellen wird einigermassen erschwert durch den Umstand, dass jene Quadrupel auf gewisse Combinationen vierter Classe beschränkt sind, indem ja ein Theil der Combinationen der m Zahlen die Geraden der atrigonischen Cf. darstellt, welche neben der oben erwähnten Cf. in der π_m^4 auftritt. Bei der Bildung des nachstehenden Hauptachtzehnseits der durch Zerlegung aus π_9^4 entstandenen $(72_3, 54_4)$, kamen z. B. die nach 123, 145, 168, 179, 246, 259, 278, 347, 358, 369, 489, 567 zielenden Geraden nicht in Betracht, weil sie die atrigonische 72_3 bestimmen.

	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	4	4	5
(H)	2	2	2	3	3	3	4	5	3	3	3	4	6	4	7	5	6	6
	4	5	8	4	5	6	6	7	4	5	6	5	7	5	8	7	7	8
	7	6	9	8	9	7	9	8	9	7	8	8	9	6	9	9	8	9

Die Cf. $(72_2, 36_4)$, welche durch Entfernung dieses Hauptvielseits aus $(72_3, 54_4)$ hervorgeht, ist atrigonisch: von den Geraden 1289, 1489, 2489, welche in π_9^4 mit denjenigen sechs Punkten incident sind, welche in der $(72_3, 54_4)$ auf Geraden aus 124 liegen, gehört nämlich

die erste der Gruppe (H) an, indess die beiden anderen in der 72_3 vorkommen.

Jede Cf.

$$\left(\frac{1}{6}\, m(m-1)\,(m-3)_{m-6},\quad \frac{1}{24}\, m(m-1)\,(m-3)\,(m-6)_4\right),$$

welche für $m \equiv 1$ *oder* $3 (mod.\ 6)$ *aus einer* π^4_m *entsteht, besitzt Hauptvielseite, deren jede eine Cf.*

$$\left(\frac{1}{6}\, m(m-1)\,(m-3)_{m-7},\quad \frac{1}{24}\, m(m-1)\,(m-3)\,(m-7)_4\right)$$

liefert.

§ 4.

Gruppen gegenseitig getrennter π^4_n in einer π^4_m.

11. Alle Punkte und Gerade der π^4_m, welche durch die Combinationen dritter bez. vierter Classe von 5 der Reihe 1 bis m entnommenen Zahlen p, q, r, s, t dargestellt werden, bilden ein in der π^4_m enthaltenes vollständiges Fünfseit $\pi_5{}^4$, welches ich mit dem Symbole $pqrst$ bezeichne.

Sollen die $\pi_5{}^4$ einer Gruppe gegenseitig getrennter Fünfseite zusammen sämmtliche Punkte der π^4_m enthalten, so muss $\binom{m}{3}$ ein Vielfaches von 10 sein. Die betreffende Tabelle besteht alsdann aus $\binom{m}{3} : 10$ Zahlenquintupeln, welche paarweise höchstens in zwei Zahlen übereinstimmen, und zusammen sämmtliche m Zahlen gleich oft aufweisen; demnach muss $\binom{m}{3} : 2$ durch m, daher $(m-1)\,(m-2)$ durch 12 theilbar sein. Schliesslich kann die erforderliche Anzahl Quintupel nur dann erhalten werden, falls jedes der Zahlenpaare aus der Reihe 1 bis m mit $(m-2) : 3$ verschiedenen zahlenfremden Tripeln zusammengesetzt werden kann, wonach $m \equiv 2$ (mod. 3) sein müsste. Den drei erwähnten Bedingungen genügen, wie eine einfache Rechnung erkennen lässt, nur diejenigen Werthe von m, welche einer der Zahlen 2, 17, 26 oder 41 nach dem Modul 60 congruent sind.

Für $\pi^4_{17} \equiv (680_{14}, 2380_4)$ giebt es somit Gruppen von je 68 Fünfseiten; werden die Geraden einer solchen Gruppe aus der π^4_{17} entfernt, so verliert jeder Punkt zwei der von ihm getragenen Geraden und es entsteht eine $(680_{12}, 2040_4)$.

Ist $m \equiv 2, 17, 26$ *oder* 41 *(mod.* 60*), so enthält* π^4_m *Gruppen von je* $\binom{m}{3} : 10$ *Fünfseiten, deren jeder eine in der* π^4_m *vorkommende*

$$\left(\binom{m}{3}_{m-5},\ \frac{m-5}{4}\binom{m}{3}_4\right)$$

zugeordnet ist.

12. Damit eine Gruppe gegenseitig getrennter Cf. $\pi_6{}^4$ alle Punkte einer π_m^4 enthalte, muss $\binom{m}{3}$ durch 20 theilbar sein. Weil jede dieser $\pi_6{}^4$ durch sechs Zahlen aus der Reihe 1 bis m dargestellt wird, kommen in der Tabelle einer solchen Gruppe im Ganzen $m(m-1)(m-2):20$ Zahlen vor; soll, wie es die Regelmässigkeit der π_m^4 erfordert, jede Zahl gleich oft auftreten, muss daher $(m-1)(m-2)$ durch 20 theilbar sein. Sodann lässt die betreffende Tabelle sich nur herstellen, falls jedem Zahlenpaare $(m-2):4$ verschiedene Quadrupel zugesellt werden können, d. h. wenn $m \equiv 2 \pmod{4}$. Hält man diese Bedingung zusammen mit $m \equiv 1$ oder $2 \pmod{5}$, so ergiebt sich die Möglichkeit einer *Haupt-$\pi_6{}^4$-Gruppe* für die Fälle, dass $m \equiv 2$ oder $6 \pmod{20}$. Lässt man die Geraden einer solchen Hauptgruppe fort, wodurch jeder Punkt der π_m^4 drei Cf.gerade einbüsst, so entsteht offenbar eine Cf. mit den Indices $m-6$ und 4.

Für $m \equiv 2$ oder $6 \pmod{20}$ besitzt π_m^4 Hauptgruppen von Cf. $\pi_6{}^4$, deren jede die Aufstellung einer

$$\left(\binom{m}{3}_{m-6},\ \frac{m-6}{4}\binom{m}{3}_4\right)$$

erlaubt.

13. Weil eine π_p^4 $\binom{p}{3}$ Cf.punkte enthält, muss eine Haupt-π_p^4-Gruppe aus $\binom{m}{3}:\binom{p}{3}$ Cf. bestehen, deren jede durch p Zahlen aus der Reihe 1 bis m dargestellt wird; demnach kommt jede der m Zahlen in der Tabelle der Hauptgruppe $(m-1)(m-2):(p-1)(p-2)$ Mal vor; man erhält diese Tabelle, wenn man hinter jedes Zahlenpaar $(m-2):(p-2)$ verschiedene, je aus $p-2$ Zahlen gebildete, Gruppen schreiben kann. Sind die drei hieraus fliessenden Bedingungen zwischen den Zahlen m und p erfüllt, so ergiebt sich eine Cf. mit den Indices $m-p$ und 4, wenn man die Geraden sämmtlicher π_p^4 der Hauptgruppe fortlässt.

Wenn die Zahlen m und p so gewählt werden, dass $m-2$ ein Vielfaches von $p-2$, $(m-1)(m-2)$ ein Vielfaches von $(p-1)(p-2)$, und $m(m-1)(m-2)$ ein Vielfaches von $p(p-1)(p-2)$, so giebt es in der Cf. π_m^4 Gruppen gegenseitig getrennter Cf. π_p^4. Durch Ausscheidung der Geraden einer solchen Hauptgruppe entsteht aus der π_m^4 eine Cf.

$$\left(\binom{m}{3}_{m-p},\ \frac{m-p}{4}\binom{m}{3}_4\right).$$

§ 5.

Eine Zerlegung der π_{2p}^4.

14. Die Geraden $1ikl$, $2ikl$, $3ikl$, $(i, k, l = 4, 5, 6, 7, 8)$ und die Punkte $1ik$, $2ik$, $3ik$, ikl bilden innerhalb der $\pi_8{}^4$ eine Cf. $(40_3, 30_4)$; dieselbe ist zusammengesetzt aus den Ecken von 10 Dreiecken $(1ik, 2ik, 3ik)$, aus 10 Punkten ikl, welche Perspectivitätscentra für je drei dieser Dreiecke sind, und aus 30 Perspectivitätsstrahlen. Dieser Cf. gehören drei polyedrale Cf. $\pi_5{}^3$ an, deren Punkte durch $1ik$ (bez. $2ik$, $3ik$), deren Gerade durch $1ikl$ (bez. $2ikl$, $3ikl$) dargestellt werden; die Cf. enthält demnach 60 Cf.dreiecke, für welche keines der 10 Centra Ecke ist.

Ebenso erhält man in einer π_{10}^4 die Cf. 80_4 mit den Geraden $1ikl$, $2ikl$, $3ikl$, $4ikl$ und den Punkten $1ik$, $2ik$, $3ik$, $4ik$, ikl, $(i, k, l = 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, welche betrachtet werden kann als eine Gruppe von 15 zu je dreien in 20 Vierstrahlen beschriebenen Punktquadrupeln $(1ik, 2ik, 3ik, 4ik)$; werden die 20 Centra der Vierstrahle entfernt, so zerfällt die Cf. in vier polyedrale $\pi_6{}^3$.

Aehnliche Betrachtungen können für jede π_{2p}^4 angestellt werden: die Punkte ikl, (wo $i, k, l = p, p+1, \cdots 2p-1, 2p$) sind Centra von $\binom{p+1}{3}$ aus den Geraden $jikl$ $(j = 1$ bis $p-1)$ gebildeten $(p-1)$-Strahlen, deren jeder drei der durch jik $(j = 1$ bis $p-1$; $i, k = p$ bis $2p)$ dargestellten $(p-1)$-punktigen Gruppen trägt. Durch Ausscheidung jener Centra entstehen aus der Cf. mit den Elementen $ikl, jik, jikl$ offenbar $p-1$ polyedrale Cf., welche symbolisch durch $jp(p+1)(p+2)\cdots(2p-1)\,2p$, wo $j = 1$ bis $p-1$, bezeichnet werden, und bezüglich die Elemente jik und $jikl$ enthalten; lässt man in jeder Cf. überall die Zahl j fort, so ergiebt sich die gewöhnliche Bezeichnung einer polyedralen Cf., wo die Punkte durch zwei, die Geraden durch drei Zahlen dargestellt sind.

Jede Cf. π_{2p}^4 enthält gewisse Cf.

$$\left(4\binom{p+1}{3}_{p-1},\ (p-1)\binom{p+1}{3}_4\right),$$

welche durch Entfernung von $\binom{p+1}{3}$ Punkten in je $p-1$ polyedrale Cf. π_{p+1}^3 zerfallen. Jene Punkte sind die Centra von $(p-1)$-Strahlen, denen $\binom{p+1}{2}$ aus diesen π_{p+1}^3 gebildete $(p-1)$-punktige Gruppen zu je dreien eingeschrieben erscheinen.

§ 6.

Eigenschaften der Cf. π^s_m.

15. Die Eigenschaften, welche in den §§ 2, 3, 4, 5 für die Cf. π^4_m hergeleitet wurden, können leicht ausgedehnt werden auf die Cf. π^s_m, wo jeder Punkt durch $s-1$, jede Gerade durch s Zahlen der Reihe 1 bis m dargestellt wird, und wo jede Gerade s Punkten, jeder Punkt $m-s+1$ Geraden incident ist.

Damit π^s_m ein Neben-x-eck besitze, durch dessen Ausscheidung eine Zerlegung der Cf. in zwei einfachere Cf. erfolgt, müssen die $(m-s+1)\,x$ nach jenen Punkten zielenden Geraden zu je $s-1$ incident sein mit den übrigen Punkten der π^s_m; hieraus ergiebt sich die Bedingung

$$(m-s+1)\,x = \binom{m}{s-1} - x,$$

wonach

$$x = \binom{m}{s-1} : (m-s+2) = \binom{m}{s-2} : (s-1).$$

Je zwei dieser x Punkte dürfen nicht mehr als $s-3$ Zahlen in ihrer Bezeichnung gemein haben; die obige Anzahl $(s-1)$-zahliger Gruppen wird daher nur dann erhalten, wenn man jeder Gruppe von $s-3$ Zahlen noch $(m-s+3):2$ verschiedene Zahlenpaare zuordnen kann: ist nämlich dieser Quotient eine ganze Zahl, so ergeben sich:

$$\binom{m}{s-3}\frac{m-s+3}{2} : \binom{s-1}{2} = \binom{m}{s-2} : (s-1)$$

gegenseitig getrennte Punkte.

Beachtet man schliesslich, dass die Tabelle des Neben-x-ecks im Ganzen $(s-1)\,x$ Zahlen, und jede gleich oft, enthält, so erhellt, dass $\binom{m}{s-2}$ durch m theilbar sein muss.

Wenn die Zahlen m und s den Bedingungen genügen, dass ihre Differenz ungerade und $\binom{m}{s-2}$ gleichzeitig durch m und $s-1$ theilbar sei, so giebt es in der Cf. π^s_m Gruppen von je

$$\binom{m}{s-2} : (s-1)$$

gegenseitig getrennten Punkten; die Entfernung eines solchen Nebenvielecks erlaubt allemal die Trennung der π^s_m in eine Cf.

$$\left(\frac{m-s+1}{s-1}\binom{m}{s-2}\right)_{s-1}$$

und eine Cf.

$$\left(\frac{m-s+1}{m-s+2}\binom{m}{s-1}_{m-2s+2},\ \frac{m-2s+2}{m-s+2}\binom{m}{s}_s\right).$$

16. Ein Hauptvielseit der π^s_m muss offenbar aus

$$\binom{m}{s-1} : s$$

gegenseitig getrennten Cf.geraden bestehen. Indem zur Bildung der betreffenden Tabelle jede der $\binom{m}{s-2}$ aus $s-2$ Zahlen zusammengesetzte Gruppe durch $(m-s+2):2$ Paare zu s-zahligen Gruppen ergänzt werden muss, um die erforderliche Anzahl punktfremder Geraden zu erhalten, ergiebt sich als weitere Bedingung, dass $m-s+2$, daher auch $m-s$ eine gerade Zahl sei. Eine dritte Bedingung erhellt, wie oben, aus der Forderung, dass die Tabelle des Hauptvielseits alle Zahlen gleich oft aufweisen müsse.

Ist die Differenz der Zahlen m und s gerade und die Zahl $\binom{m}{s-1}$ gleichzeitig ein Vielfaches von m und s, so besitzt die Cf. π^s_m Gruppen von je $\binom{m}{s-1}:s$ punktfremden Geraden; durch Entfernung eines solchen Hauptvielseits entsteht allemal eine Cf.

$$\left(\binom{m}{s-1}_{m-s},\ \frac{m-s}{s}\binom{m}{s-1}_s\right).$$

17. Bezeichnet man durch $i_1 i_2 i_3 \ldots i_p$ eine Cf. π^s_p, deren Elemente durch die Combinationen $(s-1)^{\text{ter}}$ bez. s^{ter} Classe der p Zahlen i_1 bis i_p dargestellt werden, so erhellt, dass die Symbole zweier punktfremder in der π^s_m enthaltener π^s_p höchstens $s-2$ Zahlen gemein haben dürfen.

Eine Haupt-π^s_p-Gruppe, d. h. eine Gruppe gegenseitig getrennter π^s_p, welche zusammen *alle* Punkte einer π^s_m aufweisen, besteht offenbar aus

$$\binom{m}{s-1} : \binom{p}{s-1} \text{ Cf.}$$

Damit man eine Tabelle für eine solche Hauptgruppe construiren könne, muss es möglich sein, hinter jede Combination $(s-2)^{\text{ter}}$ Classe der m Zahlen $(m-s+2):(p-s+2)$ verschiedene Gruppen von je $p-s+2$ Zahlen zu schreiben, indem die Gesammtzahl der Gruppen von je p Zahlen auf diese Weise

$$\binom{m}{s-2}\frac{m-s+2}{p-s+2} : \binom{p}{s-2}$$

wird, und diese Anzahl der oben erwähnten Zahl

$$\binom{m}{s-1} : \binom{p}{s-1}$$

gleich ist. Wird schliesslich wieder der Umstand beachtet, dass die Hauptgruppe jede der m Zahlen gleich oft enthält, so ergiebt sich, dass

$$p\binom{m}{s-1}:\binom{p}{s-1}m$$

eine ganze Zahl sein muss.

Hebt man sämmtliche Geraden der Haupt-π^s_p-Gruppe aus der π^s_m heraus, so verliert jeder Punkt der letzteren $p-s+1$ der nach ihm zielenden Cf.geraden, und es entsteht eine neue Cf. mit den Indices $m-p$ und s.

Wenn die Zahlen m, p und s den Bedingungen genügen, dass

$$m-s+2 \quad \textit{durch} \quad p-s+2,$$

$$\binom{m-1}{s-1} \quad \textit{durch} \quad \binom{p-1}{s-1}$$

und

$$\binom{m}{s-1} \quad \textit{durch} \quad \binom{p}{s-1}$$

theilbar ist, so giebt es in der Cf. π^s_m Gruppen punktfremder π^s_p. Werden die Geraden aller Cf. einer solchen Hauptgruppe aus der π^s_m fortgelassen, so entsteht eine Cf.

$$\left(\binom{m}{s-1}_{m-p},\ \frac{m-p}{s}\binom{m}{s-1}_s\right).$$

18. Auch die Eigenschaften des § 5 lassen sich auf die π^s_m ausdehnen. Ist nämlich $m-s$, daher auch $m+s$ eine gerade Zahl, so bilden in der π^s_m die Geraden mit der Bezeichnung

$$ik_1k_2k_3\ldots k_{s-1},$$

(wo i eine Zahl der Reihe 1 bis $\frac{1}{2}(m-s+2)$ ist und die Zahlen k_1 bis k_{s-1} der Reihe $\frac{1}{2}(m-s+4)$ bis m entnommen sind)

$$\binom{\frac{1}{2}(m+s-2)}{s-1}$$

Büschel von je $\frac{1}{2}(m-s+2)$ Strahlen mit den Centren

$$k_1k_2k_3\ldots k_{s-1},$$

denen die

$$\frac{m-s+2}{2}\binom{\frac{1}{2}(m+s-2)}{s-2}$$

durch die Symbole $ik_1k_2\ldots k_{s-2}$ dargestellten und in Gruppen von je $\frac{1}{2}(m-s+2)$ vereinigten Punkte zu je $s-1$ Gruppen incident sind.

Werden jene Centra fortgelassen, so löst die aus den genannten Elementen zusammengesetzte Cf. sich auf in $\frac{1}{2}(m-s+2)$ Cf., deren Punkte und Gerade, wenn man die betreffende Zahl i unterdrückt, durch die Combinationen der $(s-2)^{\text{ten}}$ bez. der $(s-1)^{\text{ten}}$ Classe von $\frac{1}{2}(m+s-2)$ Zahlen bezeichnet werden, d. h. in $\frac{1}{2}(m-s+2)$ Cf. π_t^{s-1}, wo $t=\frac{1}{2}(m+s-2)$.

Ist $m+s$ eine gerade Zahl, so giebt es in der Cf. π_m^s gewisse Cf.

$$\left(s\binom{\frac{1}{2}(m+s-2)}{s-1}_{\frac{1}{2}(m-s+2)},\quad \frac{m-s+2}{2}\binom{\frac{1}{2}(m+s-2)}{s-1}_s\right),$$

in denen $\binom{\frac{1}{2}(m+s-2)}{s-2}$ $\frac{1}{2}(m-s+2)$*-Ecke zu je* $s-1$ *in* $\binom{\frac{1}{2}(m+s-2)}{s-1}$ $\frac{1}{2}(m-s+2)$*-strahlige Büschel beschrieben sind. Durch Entfernung der Centra jener Büschel zerfällt die betreffende Cf. in* $\frac{1}{2}(m-s+2)$ *Cf.* $\pi^{s-1}_{\frac{1}{2}(m+s-2)}$.

Kampen, im April 1889.

Nachschrift.

Nach Abschluss der obigen Arbeit habe ich bemerkt, dass bereits 1846 Cayley in der Abhandlung „Sur quelques théorèmes de la géometrie de position" (Crelle XXXI) auf die Existenz von symmetrischen aus Punkten und Geraden gebildeten Systemen hingewiesen hat, deren Elemente durch die Combinationen der i^{ten} und $(i+1)^{\text{ten}}$ Classe von n Zahlen dargestellt werden. Sodann hat Herr Schubert 1883 in den „Hamburger Mittheilungen" eine Notiz „Ueber eine gewisse Familie von Configurationen" veröffentlicht, in welcher er dieselbe Bezeichnung wählt, die betreffenden symmetrischen Systeme als „Combinations-Configurationen" bezeichnet, die Anzahl der zu deren Bestimmung erforderlichen einfachen Bedingungen aufstellt und eindeutige Constructionen dieser Cf. andeutet. Zur Erzeugung dieser Cf. benutzte Herr Schubert, ebenso wie Herr Veronese („Ueber die Behandlung der projectivischen Verhältnisse m-dimensionaler Räume mittelst Projicirens

und Schneidens" Math. Ann. XIX) kurz vorher gethan, den n-dimensionalen Raum.

Schliesslich enthalten die „Memorie di Geometria di Ettore Caporali" (Napoli, Pellerano, 1888) ein Fragment (p. 262—265) über die nämlichen Cf., welche er configurazioni elementari d'ordine n e classe ν nennt; es werden diese Cf. dort in Cf. von niedriger Ordnung und Classe zerlegt, in Uebereinstimmung mit den von Jung (Ann. di Mat. XII) gegebenen Zerlegungen.

In einer Arbeit „Ueber die momentanen Bewegungen ebener kinematischer Ketten" (Civilingenieur XXVI, 1880) hat Herr Burmester Cf. aus Polen (Momentancentra) und gewissen Geraden zusammengesetzt, welche mit den polyedralen Cf. identisch sind. Er zeigt dort, dass die kleinste Anzahl Pole, welche für die Bestimmung aller übrigen (daher auch für die Construction der π_n) ausreicht, für gerades n gleich $\frac{3}{2}n - 2$, für ungerades n gleich $\frac{3}{2}(n+1) - 3$ ist; eine solche Gruppe von Polen nennt er eine Constellation.

Kampen, 15. Septbr. 1889.

Erweiterung des Begriffes der Invarianten von Transformationsgruppen.

Von

Wilhelm Killing in Braunsberg, Ostpr.

Die vorliegende kleine Arbeit bietet Anknüpfungspunkte mit mehreren Capiteln des Lie'schen Werkes über Transformationsgruppen. Besonders eng ist meines Erachtens die Beziehung zum 25. Capitel, welches über die Differentialinvarianten handelt. Wie man von den in meiner Abhandlung mitgetheilten Resultaten zu den Ergebnissen des genannten Capitels gelangt und wie man umgekehrt manche der im folgenden bewiesenen Sätze aus der Theorie der Differentialinvarianten herleitet, soll nicht näher erörtert werden; es genüge, auf diesen beiderseitigen Zusammenhang hingewiesen zu haben. Auch der Schluss des bisher allein erschienenen ersten Bandes von Lie's Werk liefert ein Resultat, welches im folgenden zu erwähnen ist, nämlich den Satz, welchen Herr Lie in der Form ausdrückt: Eine endliche continuirliche Gruppe in n Veränderlichen ist höchstens $(n+2)$-fach transitiv, wobei er eine Gruppe m-fach transitiv nennt, wenn sie mindestens eine Transformation enthält, welche m gegebene Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage in m andere beliebig gegebene Punkte von allgemeiner Lage überführt. Recht lose ist der Zusammenhang meiner Arbeit mit dem Capitel 11, worin die Definitionsgleichungen für die infinitesimalen Transformationen untersucht werden. Die im folgenden mitgetheilten Sätze sind übrigens schon seit langer Zeit in meinem Besitz, und ihre Auffindung rührt aus der Zeit her, wo mir die Arbeiten des Herrn Lie noch ganz unbekannt waren. Dagegen hat die Abhandlung erst in den letzten Tagen ihre endgültige Form erhalten, so dass hier Herrn Lie's Einfluss in mannigfacher Weise eingewirkt hat; ich habe nicht nur solche Sätze benutzt, welche ich selbständig gefunden, aber nachträglich als vorher von Herrn Lie bewiesen erkannt habe, sondern ich verwende

auch Sätze (z. B. die Theorie der Parametergruppe), welche ich erst aus dessen Arbeiten kennen gelernt habe.*)

Für eine Transformationsgruppe sollen die ursprünglichen Variabeln mit $x_1 \dots x_n$, die neuen mit $y_1 \dots y_n$, die Parameter mit $a_1 \dots a_r$ bezeichnet werden; dann bestehen die Gleichungen:

$$(1) \qquad y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r) \qquad (i = 1 \dots n),$$

welche im Anschluss an Herrn Lie kurz mit $y_i = \varphi_i(x, a)$ bezeichnet werden mögen. Ausser dem Punkte x wählen wir irgend einen zweiten Punkt x' und lassen diesen durch die Transformation

$$y_i' = \varphi_i(x', a)$$

nach y' übergeführt werden. Dabei soll nicht nur der Punkt x, sondern nach dessen Wahl auch noch x' ganz willkürlich gewählt werden können. Verbinden wir die $2n$ Gleichungen:

$$(2) \qquad y_i = \varphi_i(x, a) \quad \text{und} \quad y_i' = \varphi(x', a)$$

mit einander, so stellen dieselben eine r-gliedrige Gruppe mit $2n$ Veränderlichen dar. Denn wenn man für irgend ein Parametersystem a zuerst eine Transformation ausführt und auf die neuen Veränderlichen y, y' eine Transformation mit einem andern System b von Parametern anwendet, wodurch man zu Variabeln z, z' gelangt, so kann man Parameter c angeben, für welche man von x, x' direct zu z, z' gelangt. Da somit die Gruppe (2) dieselbe Parametergruppe besitzt, wie die Gruppe (1), so sind beide gleich zusammengesetzt (man vergleiche Capitel 21 des Lie'schen Werkes).

Dasselbe ersieht man auch unmittelbar an den unendlich kleinen Transformationen. Dieselben mögen für die Variabeln x mit X_ϱ, für x' mit X_ϱ' bezeichnet werden, so dass $X_\varrho + X_\varrho'$ infinitesimale Transformationen der Gruppe (2) sind. Da aber x und x' von einander unabhängig sind, so ist:

$$(X_1 + X_1', X_2 + X_2') = (X_1 X_2) + (X_1' X_2') = \sum^\varrho c_{12\varrho}(X_\varrho + X_\varrho').$$

Hiermit kann man fortfahren, indem man neue Variabeln $x'' \dots x^{(\nu)}$ hinzufügt; man erhält also den Satz:

*) Erst nachdem ich die Arbeit bereits niedergeschrieben habe, sehe ich, dass Herr Lie den § 59 seines Werkes den hier folgenden Untersuchungen gewidmet hat. Er gebraucht ebenso den Ausdruck Invarianten und betrachtet ebenfalls die r-gliedrige Gruppe mit den $2n$ Variabeln $x_1' \dots x_n'$, $x_1'' \dots x_n''$; den Satz, dass jede Gruppe Invarianten (in diesem Sinne) besitzt, spricht er nicht gerade aus, kennt ihn aber ohne Zweifel. Aber gerade diejenigen Resultate, auf welche ich das meiste Gewicht lege, finden sich bei ihm nicht angegeben. Ich glaube daher die Arbeit auch jetzt noch veröffentlichen zu sollen, ohne an den Entwickelungen etwas zu ändern.

Wenn die n Gleichungen (1) *bei beliebig zu wählenden Werthen von $a_1 \dots a_r$ eine Transformationsgruppe darstellen, und wenn man neue unbeschränkt veränderliche Grössen*

$$x_1' \dots x_n', \ x_1'' \dots x_n'' \dots x_1^{(\nu)} \dots x_n^{(\nu)}$$

hinzufügt, sodann auf diese je dieselbe Transformation anwendet, so dass man hat:

$$(3) \quad y_\iota = \varphi_\iota(x, a), \ y_\iota' = \varphi_\iota(x', a), \ y_\iota'' = \varphi_\iota(x'', a) \dots y_\iota^{(\nu)} = \varphi_\iota(x^{(\nu)}, a),$$

so stellen diese $(\nu + 1)n$ Gleichungen eine r-gliedrige Gruppe mit $(\nu+1)n$ Veränderlichen dar, und diese ist mit der gegebenen Gruppe gleich zusammengesetzt.

Vielleicht ist es nicht ohne Interesse, dass der vorstehende Satz auch gültig bleibt, wenn die zu den x hinzugenommenen Variabeln nicht willkürlich sind. So kann man annehmen, $x_1' \dots x_n'$ seien Functionen von $x_1 \dots x_n$ und von gewissen neuen unabhängigen Variabeln $z_1 \dots z_m$ für $m < n$; ebenso hingen $x_1'' \dots x_n''$ von $x_1 \dots x_n$, $z_1 \dots z_m$, $u_1 \dots u_l$ ab u. s. w. Dann bleibt die erste Betrachtung, welche zum Beweis des vorstehenden Satzes angestellt wurde und die endlichen Transformationen berücksichtigt, ungeändert; wie die zweite Beweismethode zu ändern sei, ersieht man aus den Entwicklungen des Herrn Lie auf den Seiten 541—547; darauf gehen wir hier nicht näher ein, wie wir auch die Sätze nicht erwähnen, welche unter der eben gemachten Voraussetzung aus den folgenden Entwicklungen hervorgehen.

Die gegebene Gruppe ist entweder transitiv oder intransitiv. Im letzteren Falle, wo ein beliebig gewählter Punkt durch die sämmtlichen Transformationen der Gruppe nicht in jede andere Lage gebracht werden kann, giebt es, wie Herr Lie zuerst erkannt haben dürfte, Functionen von $x_1 \dots x_n$, welche durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden, so dass man, wenn

$$A_1(x_1 \dots x_n) \dots A_s(x_1 \dots x_n)$$

diese Functionen sind, für $\lambda = 1 \dots s$ identisch hat:

$$A_\lambda(y_1 \dots y_n) = A_\lambda\big(\varphi_1(x, a), \dots \varphi_n(x, a)\big) = A_\lambda(x_1 \dots x_n).$$

Wir nehmen jetzt zu $x_1 \dots x_n$ die n weiteren unbeschränkt veränderlichen Grössen $x_1' \dots x_n'$ hinzu und betrachten die r-gliedrige Gruppe in den $2n$ Variabeln x, x'. Auch diese ist entweder transitiv oder intransitiv. Im letzteren Falle giebt es Functionen der $2n$ Variabeln, welche sich bei den obigen Transformationen nicht ändern; dieselben seien $B_1(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n')$, $B_2(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n') \dots$, und es genügt offenbar, nur diejenigen $B_1, B_2 \dots$ hinzuzunehmen, welche von den $2s$ Functionen $A_1(x) \dots A_s(x)$, $A_1(x') \dots A_s(x')$ und unter einander unabhängig sind.

Indem wir so fortfahren und zu der durch die Gleichung (2) an-

gegebenen Gruppe mit $(\nu+1)n$ Veränderlichen übergehen, können wir annehmen, dass $(\nu+1)n > r$ ist. Diese neue Gruppe kann also nicht transitiv sein; somit müssen ganz gewiss von einem gewissen Werthe von ν an Functionen

$$J(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n' \dots x_1^{(\nu)} \dots x_n^{(\nu)})$$

vorhanden sein, welche bei jeder Transformation der Gruppe ungeändert bleiben. Indem wir solche Functionen im weiteren Sinne auch Invarianten nennen, erhalten wir folgende Definition nebst Lehrsatz:

Jede Function zwischen den Coordinaten eines oder mehrerer Punkte eines n-dimensionalen Raumes, welche durch keine Transformation der gegebenen Gruppe geändert wird, möge im allgemeinsten Sinne als Invariante bezeichnet werden; wird diese Bezeichnung angewandt, so hat jede Gruppe Invarianten.

Die Auffindung dieser neuen Invarianten bietet keinen Unterschied im Vergleich mit dem entsprechenden Problem für intransitive Gruppe, und entsprechend den beiden von Herrn Lie bezeichneten Wegen kann man auch die erweiterten Invarianten auf zweifache Weise finden. Man kann entweder von den endlichen Transformationen ausgehen und die Parameter eliminiren, indem man eine Function

$$F\big(\varphi_1(x, a) \dots \varphi_n(x, a), \varphi_1(x', a) \dots \varphi_n(x', a) \dots\big)$$

sucht, aus welcher die $a_1 \dots a_r$ verschwunden sind. Dann ist

$$F(y_1 \dots y_n, y_1' \dots y_n' \dots) = G(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n' \dots).$$

Hier stellt entweder F dieselbe Function dar wie G und dann ist G selbst eine Invariante, oder beide Functionen sind verschieden, und dann muss, da man auch durch eine der Gruppe angehörige Gruppe von den y zu den x gelangen kann, die Gleichung bestehen:

$$F(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n' \dots) = G(y_1 \dots y_n, y_1' \dots y_n' \dots).$$

Demnach ist jede in F und G symmetrische Function eine Invariante, also speciell

$$F(x, x' \dots x^{(\nu)}) + G(x, x' \dots x^{(\nu)}) \text{ und } F(x, x', \dots x^{(\nu)}) \cdot G(x, x' \dots x^{(\nu)}).$$

Wenn nur die inf. Transformationen der Gruppe gegeben sind:

$$X_\iota f = \sum\nolimits^{\varrho} \xi_{\iota\varrho}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\varrho},$$

so genügt jede Invariante $J(x, x' \dots x^{(\nu)})$ den r Differentialgleichungen:

$$X_\iota(J) + X_\iota'(J) + \dots + X_\iota^{(\nu)}(J) = 0$$

oder

$$\sum\nolimits^{\varrho} \left\{ \xi_{\iota\varrho}(x) \frac{\partial J}{\partial x_\varrho} + \xi_{\iota\varrho}(x') \frac{\partial J}{\partial x_\varrho'} + \dots + \xi_{\iota\varrho}(x^{(\nu)}) \frac{\partial J}{\partial x_\varrho^{(\nu)}} \right\} = 0.$$

Dass von einem gewissen Werthe von ν an jede Gruppe Functionen $J(x, x' \dots x^{(\nu)})$ besitzt, welche bei allen Transformationen derselben

ungeändert bleiben, erkennt man auch auf folgendem Wege. Für intransitive Gruppen ist bereits $\nu = 0$; wenn aber ein beliebiger Punkt jede beliebige Lage erhalten kann, so sind für einen zweiten Punkt noch zwei Fälle möglich: entweder ist nach Festlegung eines Punktes die Lage eines beliebigen zweiten Punktes nicht mehr willkürlich (einfach transitive Gruppen), oder auch ein zweiter Punkt kann (wofern er nicht speciellen Gebilden angehört) noch jede Lage innerhalb eines n-dimensionalen Gebietes erhalten. Im letzten Falle nehme man einen dritten Punkt hinzu und unterscheide wiederum die beiden Fälle, ob durch Festlegung zweier Punkte die Lage eines jeden dritten beschränkt ist oder nicht. So kann man allgemein die m-fache Transitivität definiren, und da m höchstens eine gewisse Grenze erreichen kann (wie Herr Lie beweist, höchstens gleich $n + 2$ sein kann), so folgt der aufgestellte Satz von neuem.

Jetzt sei ν die grösste Zahl von Punkten, zwischen denen keine Invariante besteht; wir nehmen also an, dass es für $\nu + 1$ Punkte eine oder mehrere Invarianten gebe. Die Zahl derselben sei gleich m; dann beweisen wir, dass m höchstens gleich n sein kann. Aus n von einander unabhängigen Gleichungen

(5) $\quad J_1(x, x' \ldots x^{(\nu)}) = \text{Const.} \ldots J_n(x, x' \ldots x^{(\nu)}) = \text{Const.}$

können die $x_1, \ldots x_n$ vermittelst constanter Werthe und der $x' \ldots x^{(\nu)}$ dargestellt werden. Bestände noch eine hiervon unabhängige Gleichung zwischen den Variabeln, so muss dieselbe die $x_1 \ldots x_n$ wirklich enthalten; setzt man aber die aus (5) folgenden Werthe ein, so dürfen in Folge der vorausgesetzten Unabhängigkeit die $x' \ldots x^{(\nu)}$ nicht sämmtlich ausfallen, und man erhält bereits eine invariante Beziehung zwischen den Coordinaten von ν Punkten (c. h.). Wenn jetzt wirklich n von einander unabhängige Beziehungen zwischen den $x, x' \ldots x^{(\nu)}$ vorhanden sind, so muss auch jede invariante Relation zwischen den Coordinaten von mehr Punkten sich durch jene n Invarianten darstellen lassen. Zu den Gleichungen (5) kommen natürlich, wenn ein weiterer Punkt $x^{(0)}$ beigefügt wird, noch die Gleichungen hinzu:

(5*) $\quad J_1(x^{(0)}, x' \ldots x^{(\nu)}) = \text{Const.} \ldots J_n(x^{(0)}, x' \ldots x^{(\nu)}) = \text{Const.}$

Wäre aber

$$K(x^0, x, x' \ldots x^{(\nu)}) = \text{Const.}$$

von den Gleichungen (5) und (5*) unabhängig, so drücke man $x_1 \ldots x_n$, $x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)}$ nach (5) und (5*) vermittelst $x' \ldots x^{(\nu)}$ aus. Setzt man die erhaltenen Werthe in K ein, so werden sich entweder alle Variabeln wegheben, wenn nämlich K eine Folge von (5) und (5*) ist, oder in der resultirenden Gleichung bleiben gewisse $x' \ldots x^{(\nu)}$ zurück; im letzteren Falle bestände aber, entgegen unserer Annahme,

bereits eine invariante Beziehung zwischen den Coordinaten von ν Punkten.

Das unter der eben gemachten besondern Annahme gefundene Resultat, dass alle Invarianten sich durch eine endliche Zahl, die höchstens gleich n ist, darstellen lassen, gilt ganz allgemein. So sei $\nu_1 + 1$ die kleinste Zahl von Punkten, zwischen denen invariante Beziehungen bestehen; deren Zahl sei gleich m_1, und dann wissen wir, dass $m_1 \leqq n$ ist. Wenn $m_1 < n$ ist, so mögen gewisse weitere Invarianten hinzukommen. Die erste neu hinzutretende invariante Beziehung, welche mehr als $\nu_1 + 1$ Punkte betrifft, möge $\nu_2 + 1$ Punkte erfordern, und zwar mögen m_2 derartige hinzukommen. Dann ist $m_1 + m_2$ höchstens gleich n. Man habe nämlich m_1 invariante Beziehungen zwischen $x_1 \ldots x_n$ und den Coordinaten mit den oberen Marken $1, 2 \ldots \nu_1$ und ebenso m_2 für x und solche Punkte, deren Coordinaten die oberen Marken $1, 2, \ldots \nu_2$ haben; diese gestatten, die $x_1 \ldots x_n$ durch Constante und die Coordinaten mit den obern Marken $1, 2 \ldots \nu_2$ auszudrücken. Besteht jetzt irgend eine weitere Beziehung zwischen $x, x' \ldots x^{(\nu_3)}$, so kann man hierin die gefundenen Werthe von $x_1 \ldots x_n$ einsetzen und erhält eine invariante Beziehung zwischen $x' \ldots x^{(\nu_3)}$; diese ist aber nothwendig in den frühern m_1 Relationen enthalten; folglich kann auch die weitere Relation von den frühern nicht unabhängig sein. Die gleiche Betrachtung kann man fortsetzen und erhält so folgenden Satz:

Alle invarianten Beziehungen, welche zwischen irgend einer Anzahl von Punkten bestehen, lassen sich auf eine bestimmte endliche Anzahl zurückführen, in denen höchstens je $n + 3$ Punkte auftreten; die Zahl dieser von einander unabhängigen Beziehungen ist höchstens gleich n.

Es wird gut sein, einige Beispiele beizufügen. Für eine Variabele giebt es, wie Herr Lie zuerst bewiesen hat, nur drei verschiedene Gruppen, deren Transformationen durch passende Wahl der Veränderlichen auf eine der drei Formen gebracht werden kann:

$$x + a, \quad ax + b, \quad \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Nach dem vorstehenden Satze giebt es hier immer nur je eine invariante Function, auf welche sich alle Invarianten zurückführen lassen; diese ist im ersten Falle $x - x'$, im zweiten $\frac{x - x'}{x - x''}$, im dritten: $\frac{x - x'}{x - x''} : \frac{x''' - x'}{x''' - x''}$.

Für zwei Veränderliche giebt es gewisse Gruppen, bei denen sich alle Invarianten auf eine einzige, und andere, bei denen sie sich auf zwei zurückführen lassen. So hat die fünfgliedrige Gruppe: p, q, $px - qy$, xq, yp die eine invariante Beziehung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix};$$

die charakteristische Eigenschaft dieser Gruppe besteht eben darin, den Inhalt eines jeden Dreiecks constant zu erhalten. Die Gruppe: $p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq$ (die starre Bewegung einer Lobatschewsky'schen Raumform, wenn die „Grenzlinie" als Element aufgefasst wird) hat die Invariante:

$$\frac{yy'}{(x-x')^2}.$$

Die Gruppe: $p,\ q,\ xp - \alpha yq$ hat die Invariante: $(x-x')^\alpha (y-y')$, und die Gruppe: $p+q,\ xp+yq,\ x^2p+y^2q$ entsprechend:

$$\frac{x-x'}{x-y'} \cdot \frac{y-y'}{y-x'}.$$

Andere Gruppen haben zwei Invarianten; so die Gruppe $q,\ p - \varepsilon yq$ die Ausdrücke $x - x'$ und $(y - y')\,e^{\varepsilon x}$; die Gruppe: $yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq$ lässt die beiden Ausdrücke

$$\frac{y'}{y''} \cdot \frac{x-x''}{x-x'} \quad \text{und} \quad \frac{y}{y''}\,\frac{x'-x''}{x'-x}$$

ungeändert. Ebenso bestehen für: $q,\ xq \ldots x^rq,\ p,\ xp + \alpha yq$ die Invarianten:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^r & x_2^r & \cdots & x_{r+2}^r \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{r+2} \end{vmatrix} \cdot (x_1 - x_2)^\nu,$$

wofern $\alpha + \frac{r(r-1)}{2} + \nu = 0$ ist.

Die allgemeine projective Gruppe des n-dimensionalen Raumes hat n Invarianten zwischen $n+3$ Punkten. Es genüge, dieselben für den dreifach ausgedehnten Raum anzugeben. Bezeichnen wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1' & \cdots & x_4' \\ x_1'' & \cdots & x_4'' \\ x_1''' & \cdots & x_4''' \\ x_1^{IV} & \cdots & x_4^{IV} \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad |1\,2\,3\,4|$$

und führen für andere obere Marken entsprechende Beziehungen ein, so ist eine Invariante:

$$\frac{|1\,2\,5\,6|}{|1\,3\,5\,6|} \cdot \frac{|4\,2\,5\,6|}{|4\,3\,5\,6|}.$$

Hier möchte ich zwei weitere Bemerkungen beifügen:

1) Jede intransitive Gruppe hat mehr als eine Invariante, oder genauer ausgedrückt: Wenn eine Gruppe bereits Invarianten zwischen den Coordinaten eines einzigen Punktes besitzt, so muss zum mindesten eine Invariante hinzutreten, in deren Ausdruck die Coordinaten mehrerer Punkte wesentlich sind. Man übersieht dies sofort, wenn man bedenkt, dass Beziehungen zwischen den Coordinaten eines Punktes nicht im Stande sind, alle Punkte des Raumes festzulegen.

2) Besonders wichtig ist der Fall, dass eine transitive Gruppe eine einzige Invariante besitzt und dass diese nur die Coordinaten zweier Punkte umfasst. Hierher gehören die euklidischen und die nichteuklidischen Raumformen (im engern Sinne). Die starre Bewegung der ersteren wird durch die Gleichungen dargestellt: p_ι, $p_\iota x_\varkappa - p_\varkappa x_\iota$ für $\iota, \varkappa = 1 \cdots n$; die Invariante (Abstandsfunction) ist alsdann: $\sum (x_\iota - x_\iota')^2$. Für eine Riemann'sche Raumform kann man $n+1$ Variabele $x_0, x_1 \cdots x_n$ durch die Relation $\sum x_\iota^2 = 1$ verknüpfen und dann die unendlich kleinen starren Bewegungen durch $x_\iota p_\varkappa - x_\varkappa p_\iota$ darstellen, wobei $\sum x_\iota x_\iota'$ constant bleibt. Herr de Tilly glaubt die Theorie des Raumes auf den Begriff des Abstandes gründen zu können. Die allerdings etwas unklaren Erwägungen, welche er zur Erklärung dieses Begriffes aufstellt, kommen ihrem Wesen nach darauf hinaus, dass eine mit dem Raum zusammenhängende Gruppe von Transformationen eine einzige Invariante besitzt und dass dieselbe schon für zwei Punkte besteht. Nun zeigt sich aber, dass hieraus keineswegs die Folgerungen gezogen werden können, welche Herr de Tilly aus dem Begriffe des Abstandes herleitet; demnach ist erwiesen, dass seine Folgerungen keineswegs aus der gemachten Voraussetzung fliessen, sondern durch die Anschauung hinzugefügt sind.

Schon ihrem Begriffe nach sind die hier behandelten verallgemeinerten Invarianten nicht vollständig bestimmte Functionen, sondern mannigfacher Umgestaltung fähig. Dasselbe ergiebt sich auch daraus, dass sie einmal vermittelst der angegebenen Elimination und dann durch partielle Differentialgleichungen erhalten wurden. In der That, wenn irgend ein Ausdruck invariant bleibt, so gilt dasselbe von jeder Function dieses Ausdrucks, und wenn φ_1 und φ_2 Invarianten sind, so ist es auch $f(\varphi_1, \varphi_2)$, wenn f eine beliebige Function darstellt. Jedes vollständige System von Invarianten kann demnach durch ganz verschiedene derartige Systeme ersetzt werden. Dennoch ist jedes derartige System für die Gruppe charakteristisch; denn es gilt der Satz:

Die Gruppe ist durch jedes vollständige System ihrer verallgemeinerten Invarianten eindeutig bestimmt.

Um diesen Satz zu beweisen, stellen wir die endlichen Transformationsgleichungen der Gruppe aus den gegebenen Beziehungen her, was immer vermittelst blosser Elimination gelingt. Zunächst wollen wir annehmen, zwischen den Coordinaten von ν Punkten beständen keine, dagegen zwischen denen von $\nu+1$ Punkten gerade n von einander unabhängige invariante Beziehungen:

(6) $J_1(x,x'\cdots x^{(\nu)}) = J_1(y,y'\cdots y^{(\nu)}) \cdots J_n(x,x'\cdots x^{(\nu)}) = J_n(y,y'\cdots y^{(\nu)})$.

Aus diesen Gleichungen erhält man vermittelst Elimination von je $n-1$ Variabeln $y_1 \cdots y_{i-1}, y_{i+1} \cdots y_n$ die Gleichungen:

(7) $$y_i = \varphi_i(x,\ x' \cdots x^{(\nu)},\ y' \cdots y^{(\nu)}).$$

In diesen Gleichungen vertreten, nachdem die $x' \cdots x^{(\nu)}$ beliebig gewählt sind, die $y' \cdots y^{(\nu)}$ die Stelle der Parameter; dieselben stellen daher die endlichen Transformationsgleichungen dar, und die Gruppe enthält $n\nu$ willkürliche Parameter oder ist $(n\nu)$-gliedrig.

Die Herleitung ändert sich nicht, wenn betreffs der Invarianten andere Voraussetzungen gemacht werden. Immer kann man eine Zahl $\nu+1$ bestimmen, so dass zwischen den Coordinaten $x,\ x' \cdots x^{(\nu)}$ n von einander unabhängige Gleichungen (6) bestehen. Man erhält also auch wieder die Gleichungen (7), aber jetzt sind nach beliebiger Wahl von $x' \cdots x^{(\nu)}$ die $y' \cdots y^{(\nu)}$ nicht mehr ganz willkürlich, sondern zwischen ihnen finden gewisse Relationen statt. Daher ist die Zahl der Parameter jetzt kleiner als $n\nu$, aber dieselbe lässt sich sehr leicht bestimmen, sobald die Relationen selbst gegeben sind. Nehmen wir z. B. an, die Gruppe habe nur eine einzige Invariante und diese verknüpfe die Coordinaten zweier Punkte, so bilden wir die n Gleichungen:

$$J(x,x') = J(y,y'),\quad J(x,x'') = J(y,y'') \cdots J(x,x^{(n)}) = J(y,y^{(n)}).$$

Daraus leiten wir n Gleichungen der Form:

$$y_i = \varphi_i(x,\ x' \cdots x^{(n)},\ y' \cdots y^{(n)})$$

ab. Wenn also die $\binom{n}{2}$ Gleichungen, welche zwischen den $y' \cdots y^{(n)}$, $x' \cdots x^{(n)}$ bestehen, von einander unabhängig sind, so hat die Gruppe $\binom{n+1}{2}$ Parameter.

Es könnte noch die Frage aufgeworfen werden, ob die Elimination nicht auf zwei verschiedene Gruppen führt. Statt auf die Beantwortung dieser Frage einzugehen, suchen wir aus den Invarianten die inf. Transformationen, und da wir hier nur ein einziges System finden, ist es selbstverständlich, dass auch die angegebene Elimination eine einzige Gruppe liefert. Die n Gleichungen:

$$J_n(xx' \cdots x^{(\nu)}) = \text{Const.}$$

variiren wir in Bezug auf die sämmtlichen Coordinaten und erhalten die Gleichungen:

$$(8) \qquad \sum_{\varrho}\left(\frac{\partial J_{\varkappa}}{\partial x_{\varrho}}\,\delta x_{\varrho} + \frac{\partial J_{\varkappa}}{\partial x'_{\varrho}}\,\delta x'_{\varrho} + \cdots + \frac{\partial J_{\varkappa}}{\partial x_{\varrho}^{(\nu)}}\,\delta x_{\varrho}^{(\nu)}\right) = 0.$$

Hier setzen wir

$$\delta x'_{\varrho} = a_{\varrho}\,\delta t, \quad \delta x''_{\varrho} = a'_{\varrho}\,\delta t \;\cdots\; \delta x_{\varrho}^{(\nu)} = a_{\varrho}^{(\nu-1)}\,\delta t,$$

wo die $a_{\varrho}, a'_{\varrho} \cdots$ entweder von einander unabhängig oder durch gewisse Beziehungen verknüpft sind. Dann kann man aus den Gleichungen (8) die δx_{ϱ} berechnen, weil die $J_{\varkappa}$ von einander unabhängig sind und demnach die Determinante $\left|\frac{\partial J_{\varkappa}}{\partial x_{\varrho}}\right|$ für $\varkappa, \varrho = 1 \cdots n$ nicht identisch verschwindet. Somit sind die inf. Transformationen der Gruppe eindeutig bestimmt.

Die vorangehenden Untersuchungen haben uns also ein neues Mittel gelehrt, die Gruppen eindeutig zu bestimmen, und diese Darstellungsweise bietet den besonderen Vortheil, dass man manche Eigenschaft der Gruppe unmittelbar übersieht.

Braunsberg, den 25. April 1889.

Eine besondere Art von Covarianten bildender Operation.

Von

Ed. Wiltheiss in Halle a./S.

Einleitung.

In den partiellen Differentialgleichungen zwischen den Ableitungen der hyperelliptischen Thetafunctionen nach den Argumenten und den Parametern kann man die Differentiation nach den Parametern in der Form eines Aronhold'schen Processes darstellen, der dadurch charakterisirt ist, dass er an der Discriminante des Radicanden $f(x)$ der Wurzelgrösse in den hyperelliptischen Integralen, die den Thetafunctionen zu Grunde liegen, ausgeführt, den Werth Null liefert*). Diesem Aronhold'schen Process giebt man mit Rücksicht auf die verschiedenen Thetafunctionen auch verschiedene Formen. So hat derselbe bei den Thetafunctionen mit zwei Argumenten *erstens* die allgemeine Form

$$(1) \qquad \sum_{\lambda=0}^{6} F_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda},$$

wo

$$\sum_{\lambda=0}^{6} \binom{6}{\lambda} A_\lambda x_1^\lambda x_2^{6-\lambda} = f(x) = a_x^6 = b_x^6,$$

$$(2) \qquad \sum_{\lambda=0}^{6} \binom{6}{\lambda} F_\lambda x_1^\lambda x_2^{6-\lambda} = F = (ab)\, a_x^2 a_v^3 b_x^5 : (xv)$$

und v_1, v_2 ein willkürliches Variablenpaar ist; *zweitens* mit Rücksicht auf die geraden Thetafunctionen, wenn

$$f(x) = \varphi(x)\, \psi(x)$$

und

*) Vergl. den Aufsatz des Verf. in den Math. Annalen, Bd. 33, S. 267. Nur ist in den folgenden Formeln $-u_2$ an Stelle von u_2 geschrieben.

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} a_i x_1^i x_2^{3-i} = \alpha_x^3 = \beta_x^3,$$

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} a_i' x_1^i x_2^{3-i} = \alpha_x'^3 = \beta_x'^3$$

ist, die Form

$$\sum_{i=0}^{3} \overline{G}_i \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_{i=0}^{3} \overline{G}_i' \frac{\partial}{\partial a_i'}, \tag{3}$$

wo

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \overline{G}_i x_1^i x_2^{3-i} = \overline{G}$$

(4)
$$= \left\{ \frac{1}{2} (a\alpha) a_x^2 a_v^3 \alpha_x^2 + \frac{1}{8} (\alpha\alpha') \alpha_v \alpha_v' (\alpha_v \alpha_x' + \alpha_x \alpha_v') \beta_x^3 \right\} : (xv),$$

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \overline{G}_i' x_1^i x_2^{3-i} = \overline{G}'$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} (a\alpha') a_x^2 a_v^3 \alpha_x'^2 - \frac{1}{8} (\alpha\alpha') \alpha_v \alpha_v' (\alpha_v \alpha_x' + \alpha_x \alpha_v') \beta_x'^3 \right\} : (xv),$$

und endlich *drittens* bezüglich der ungeraden Thetafunctionen, bei denen

$$f(x) = (t_2 x_1 - t_1 x_2) \chi(x)$$

gesetzt wird, wo

$$\chi(x) = \sum_{\varkappa=0}^{5} \binom{5}{\varkappa} \mathfrak{A}_\varkappa x_1^\varkappa x_2^{5-\varkappa} = \mathfrak{a}_x^5 = \mathfrak{b}_x^5,$$

die Form

$$\sum_{\varkappa=0}^{5} \overline{\mathfrak{G}}_\varkappa \frac{\partial}{\partial \mathfrak{A}_\varkappa} + \overline{\mathfrak{T}}_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - \overline{\mathfrak{T}}_2 \frac{\partial}{\partial t_1}, \tag{5}$$

bei der

(6)
$$\sum_{\varkappa=0}^{5} \binom{5}{\varkappa} \overline{\mathfrak{G}}_\varkappa x_1^\varkappa x_2^{5-\varkappa} = \overline{\mathfrak{G}} = \left\{ \frac{5}{6} (a\mathfrak{a}) a_x^2 a_v^3 \mathfrak{a}_x^4 - \frac{5}{36} \mathfrak{a}_v^3 \mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_t \mathfrak{b}_x^5 \right\} : (xv),$$

$$\overline{\mathfrak{T}}_1 x_1 + \overline{\mathfrak{T}}_2 x_2 = \overline{\mathfrak{T}} = \left\{ -\frac{1}{6} a_v^3 a_x^2 a_t + \frac{5}{36} \mathfrak{a}_v^3 \mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_t (xt) \right\} : (xv)$$

ist.

Die partielle Differentialgleichung der Thetafunctionen kann man dazu benutzen, um die Entwicklung der Thetafunctionen in Potenzreihen herzustellen: Man erhält mittels derselben die Glieder höherer Dimension im wesentlichen dadurch, dass man den Aronhold'schen Process an den Gliedern niederer Dimension ausführt und zugleich

v_1, v_2 gleich u_1, u_2 werden lässt*). Dieser Umstand veranlasste mich derartige Operationen, die also

erstens in der Ausführung des Aronhold'schen Processes mit einer Function, welche die Variablen v_1, v_2 enthält, an einer Covariante mit den Variablen u_1, u_2, und

zweitens in dem Gleichsetzen der beiden Variablenpaare v_1, v_2 und u_1, u_2

besteht, und die ich analog, wie man den Aronhold'schen Process durch δ ausdrückt, mit

$$\underset{v=u}{\delta}$$

bezeichnen will, einer näheren Betrachtung zu unterwerfen, freilich nur im engsten Anschluss an die Formen (1), (3) und (5) des Aronhold'schen Processes. Ich habe gefunden, dass *es solche Operationen $\underset{v=u}{\delta}$ giebt, die eine Reihe von Covarianten* (entweder Covarianten von f, oder simultane Covarianten von φ und ψ, oder Covarianten von χ mit zwei Reihen Variablen) *dadurch kennzeichnen, dass, wenn man die betreffende Operation $\underset{v=u}{\delta}$ an ihnen ausführt, man wieder Covarianten dieser besondern Art erhält, und dass zur Darstellung derselben nicht die sämmtlichen Formen des vollständigen Formensystems, sondern nur eine geringere Anzahl derselben nothwendig sind.*

I. Theil.

Covarianten einer Form 6. Ordnung.

§ 1.

Anschliessend an die Form (1) des Aronhold'schen Processes will ich zuerst bei einer Grundform 6. Ordnung nachweisen, dass, wie behauptet, durch die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ eine besondere Art von Covarianten definirt ist. —

Wie es sich zeigen wird, kommen in den folgenden Entwicklungen nur Covarianten vor, deren Grad höchstens gleich 6, und deren Ordnung höchstens gleich 10 ist. Da sich nun alle Covarianten durch die Formen eines vollständigen Formensystems rational ausdrücken lassen, so will ich die Tabelle des vollständigen Formensystems, so weit sie hier in Betracht kommt, zur späteren Benutzung anführen**):

*) Vergl. den Aufsatz des Verf. in den Math. Annalen Bd. 29, S. 294 u. 297.

**) Vergl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, S. 296. Ich habe nur $(f, l)_2$ durch $\Delta = \frac{1}{2}(f, l)_2 - \frac{1}{6} Ak$ ersetzt.

Grad	Ordnung					
	0	2	4	6	8	10
1				f		
2	$(f,f)_6=A$		$(f,f)_4=k$		$(f,f)_2=H$	
3		$(k,f)_4=l$		$(k,f)_2=p$	$(k,f)_1$	
4	$(k,k)_4=B$		$(k,k)_2=\Delta$	$(f,l)_1$		$(H,k)_1$
5		$(k,l)_2=m$	$(k,l)_1$		$(H,l)_1$	
6	$(l,l)_2=A_{ll}$			$(p,l)_1$ $((f,k)_1,l)_2$		

Entsprechend der Beschaffenheit von F (vergl. (2)) will ich annehmen, es sei die Function

$$\mathfrak{F}=\sum_{\lambda=0}^{6}\binom{6}{\lambda}\mathfrak{F}_\lambda x_1^\lambda x_2^{6-\lambda},$$

mit welcher der Aronhold'sche Process

$$\delta=\sum_{\lambda=0}^{6}\mathfrak{F}_\lambda\frac{\partial}{\partial A_\lambda}$$

bei der Operation $\underset{v=u}{\delta}$ ausgeführt werden soll, eine *Covariante* 2. *Grades, welche in den Variabeln* v_1, v_2 *von der zweiten Dimension* ist, so dass unter $\mathfrak{F}$ entweder die zweite Polare von $H=H_x^8$, d. i.

$$H_v^2 H_x^6,$$

oder

$$(xv)^2 k(x)=(xv)^2 k_x^4,$$

oder endlich — und darunter ist insbesondere auch der Aronhold'sche Process (1) mitinbegriffen — ein lineares Aggregat der beiden Covarianten zu verstehen ist.

Führt man jetzt diese Operation $\underset{v=u}{\delta}$ an einer Covariante von f aus, so wird der Grad derselben um *eins*, die Ordnung um *zwei* erhöht. Dies ist das wesentlichste Moment und hierauf gründet sich der Beweis.

Es ist demnach $\underset{v=u}{\delta} f$ eine Covariante zweiten Grades und achter Ordnung, und da sich dieselbe durch die Formen des vollständigen Formensystems muss ausdrücken lassen, so findet man

(I) $$\underset{v=u}{\delta} f = C_1 H,$$

wo C_1 eine numerische Constante ist. In gleicher Weise schliesst man, dass $\underset{v=u}{\delta} H$ als eine Form dritten Grades und zehnter Ordnung, die sich durch die Formen der obigen Tafel darstellen lassen muss, dass

(II) $$\underset{v=u}{\delta} H = C_2 k f.$$

Und analog erhält man:

(III) $$\underset{v=u}{\delta} k = C_{31} A f + C_{32} p,$$

(IV) $$\underset{v=u}{\delta} A = C_4 l,$$

(V) $$\underset{v=u}{\delta} \Delta = C_{51} A^2 f + C_{52} B f + C_{53} A p + C_{54} k l,$$

(VI) $$\underset{v=u}{\delta} B = C_{61} A l + C_{62} m,$$

(VII) $$\underset{v=u}{\delta} p = C_{71} l f + C_{72} A H + C_{73} k^2,$$

(VIII) $$\underset{v=u}{\delta} l = C_{81} A k + C_{82} \Delta,$$

(IX) $$\underset{v=u}{\delta} m = C_{91} A^2 k + C_{92} B k + C_{93} A \Delta + C_{94} l^2,$$

wo die $C_\varkappa$, bez. $C_{\varkappa\lambda}$ numerische Constanten sind.

Diese Gleichungen (I), (II), ..., (IX) zeigen an, dass *die neun Covarianten*

$$f,\ H,\ k,\ A,\ \Delta,\ B,\ p,\ l,\ m$$

ein in sich geschlossenes System bilden, der Art, dass wenn man auf eine derselben die weiter oben in diesem Paragraphen näher definirte Operation $\underset{v=u}{\delta}$ anwendet, man einen Ausdruck erhält, der aus denselben Covarianten gebildet ist. Und hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung in der Einleitung, dass *alle Formen, welche Aggregate dieser neun Formen sind, eine besondere Art von Covarianten bilden, die dadurch gekennzeichnet sind, dass man zu Covarianten derselben Art gelangt, wenn man die betreffende Operation $\underset{v=u}{\delta}$ an einer derselben ausführt.* —

In den folgenden Paragraphen werde ich mit Rücksicht auf die Bedeutung dieser Covarianten für die Thetafunctionen die numerischen Constanten $C_\varkappa$ und $C_{\varkappa\lambda}$ für die drei Fälle, dass $\mathfrak{F}$ gleich $H_v^2 H_x^6$, gleich $(xv)^2 k_x^4$ oder endlich gleich $F = -(ab)\, a_v^3 a_x^2 b_x^5 : (xv)$ ist, bestimmen, indem ich die Operation $\underset{v=u}{\delta}$ an den Functionen $f, H, k, \ldots$ thatsächlich ausführe.

Der Schwerpunkt dieser Rechnung wird hauptsächlich in der Ausführung des Aronhold'schen Processes liegen, und ich will daher schon hier zeigen, in welcher Weise sich derselbe bei einer Ueberschiebung zweier Formen

$$r(x) = r_x^m, \quad s(x) = s_x^n$$

gestaltet. Wenn wieder der Aronhold'sche Process mit δ bezeichnet wird, so ist zu Folge der Bedeutung von δ:

$$\begin{aligned}
\delta\,(r, s)_\varkappa &= \delta\,\frac{(m-\varkappa)!}{m!}\,\frac{(n-\varkappa)!}{n!}\sum_{i=0}^{\varkappa}(-1)^i\binom{\varkappa}{i}\frac{\partial^\varkappa r(x)}{\partial x_1^{\varkappa-i}\,\partial x_2^i}\;\frac{\partial^\varkappa s(x)}{\partial x_1^i\,\partial x_2^{\varkappa-i}} \\
&= \frac{(m-\varkappa)!}{m!}\,\frac{(n-\varkappa)!}{n!}\sum_{i=0}^{\varkappa}(-1)^i\binom{\varkappa}{i}\frac{\partial^\varkappa(\delta\, r(x))}{\partial x_1^{\varkappa-i}\,\partial x_2^i}\;\frac{\partial^\varkappa s(x)}{\partial x_1^i\,\partial x_2^{\varkappa-i}} \\
&+ \frac{(m-\varkappa)!}{m!}\,\frac{(n-\varkappa)!}{n!}\sum_{i=0}^{\varkappa}(-1)^i\binom{\varkappa}{i}\frac{\partial^\varkappa r(x)}{\partial x_1^{\varkappa-i}\,\partial x_2^i}\;\frac{\partial^\varkappa(\delta\, s(x))}{\partial x_1^i\,\partial x_2^{\varkappa-i}} \\
&= (\delta r, s)_\varkappa + (r, \delta s)_\varkappa,
\end{aligned}$$

oder bei symbolischer Bezeichnung, wenn man

$$\delta\, r(x) = \bar r_x^m, \quad \delta\, s(x) = \bar s_x^n$$

setzt:

$$\text{(A)} \qquad \delta\left[(r s)^\varkappa r_x^{m-\varkappa}\, s_x^{n-\varkappa}\right] = (\bar r s)^\varkappa\, \bar r_x^{m-\varkappa}\, s_x^{n-\varkappa} + (r \bar s)^\varkappa\, r_x^{m-\varkappa}\, \bar s_x^{n-\varkappa}.$$

Speciell folgt noch hieraus, wenn $r(x) = s(x)$, also die Symbole r_x und s_x einerseits und $\bar r_x$ und $\bar s_x$ andererseits gleichwerthig sind:

$$\text{(A')} \qquad \delta\left[(r s)^\varkappa r_x^{m-\varkappa}\, s_x^{m-\varkappa}\right] = 2\,(\bar r s)^\varkappa\, \bar r_x^{m-\varkappa}\, s_x^{m-\varkappa}.$$

Durch diese Formel wird die Ausführung des Aronhold'schen Processes an einer Ueberschiebung zweier Formen zurückgeführt auf die Ueberschiebungen dieser beiden Formen, von denen aber je an einer schon der Aronhold'sche Process vollzogen ist.

Ausser dieser Formel werde ich in der folgenden Rechnung, und zwar zur Umformung der auftretenden Ueberschiebungen, nur noch die fundamentale Identität*)

$$\begin{aligned}
\text{(B)} \quad &\sum_i \frac{\binom{n_2-\alpha_1-\alpha_3}{i}\binom{\alpha_2}{i}}{\binom{n_1+n_2-2\alpha_3-i+1}{i}}\left((r_1, r_2)_{\alpha_3+i}, r_3\right)_{\alpha_1+\alpha_2-i} \\
&= (-1)^{\alpha_1}\sum_i \frac{\binom{n_3-\alpha_1-\alpha_2}{i}\binom{\alpha_3}{i}}{\binom{n_1+n_3-2\alpha_2-i+1}{i}}\left((r_1, r_3)_{\alpha_2+i}, r_2\right)_{\alpha_1+\alpha_3-i}
\end{aligned}$$

*) Gordan, Ueber das Formensystem binärer Formen, S. 11.

nothwendig haben, in der n_1, bez. n_2 und n_3 die Ordnung der Formen r_1, bez. r_2 und r_3 bezeichnen, in der ferner die ganzen Zahlen α_1, α_2, α_3 den Bedingungen

$$\alpha_2 + \alpha_3 \leqq n_1, \quad \alpha_1 + \alpha_3 \leqq n_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leqq n_3,$$
$$\alpha_1 (n_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = 0$$

genügen und endlich die Summation über i von Null an so weit auszudehnen ist, bis die Terme verschwinden.

§ 2.

Es werde bei der Operation $\underset{v=u}{\delta}$ der Aronhold'sche Process

$$\delta = \sum_{\lambda=0}^{6} \mathfrak{F}_\lambda \frac{\partial}{\partial A_\lambda}$$

zuerst mit der Function

$$\sum_{\lambda=0}^{6} \binom{6}{\lambda} \mathfrak{F}_\lambda x_1^\lambda x_2^{6-\lambda} = H_v^2 H_x^6$$

ausgeführt, und um dies anzudeuten, soll dem δ der Index 1 angefügt werden.

1) Es ist dann, wie unmittelbar ersichtlich,

$$\delta_1 f(x) = H_v^2 H_x^6,$$

und hieraus folgt, wenn ich $x_i = v_i = u_i$ setze:

$$\underset{v=u}{\delta_1} f(u) = H_u^8 = H(u),$$

oder, wenn ich die Variablen u_1, u_2 nicht anführe, indem ich festsetze, dass im folgenden, *wenn nichts anderes bemerkt ist*, u_1, u_2 *die Variablen der Covarianten* sein sollen:

(I a) $$\underset{v=u}{\delta_1} f = H. \text{ —}$$

Analog der Bezeichnung im vorigen Paragraphen will ich hier

$$\delta_1 f = \bar{a}_x^6 = \bar{b}_x^6$$

setzen, so dass

(1) $$\bar{a}_x^6 = H_v^2 H_x^6,$$

und demgemäss

(2) $$\bar{a}_x^4 \bar{a}_y^2 = H_v^2 H_x^4 H_y^2,$$

(3) $$\bar{a}_x^2 \bar{a}_y^4 = H_v^2 H_x^2 H_y^4$$

ist. —

2) Zu Folge der Formel (A′) des vorigen Paragraphen ist

$$\delta_1 H = \delta_1\left[(ab)^2 a_u^4 b_u^4\right] = 2(\bar{a}b)^2 \bar{a}_u^4 b_u^4;$$

hieraus folgt unter Benutzung der Gleichung (2), in der man

$$y_1 = b_2, \quad y_2 = -b_1$$

und $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ gesetzt hat:

$$\delta_1 H = 2(Hb)^2 H_v^2 H_u^4 b_u^4.$$

Hierin lasse ich v_1 in u_1, v_2 in u_2 übergehen und erhalte

$$\underset{v=u}{\delta_1} H = 2(Hb)^2 H_u^6 b_u^4 = 2(H, f)_2,$$

oder

$$\text{(IIa)} \qquad \underset{v=u}{\delta_1} H = \frac{3}{7} kf,$$

da, wie aus der Formel (B) für $r_1 = r_2 = r_3 = f$ und $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$ hervorgeht,

$$(H, f)_2 = \frac{3}{14} kf$$

ist. —

3) Analog verfahre ich um $\underset{v=u}{\delta_1} k$ zu bestimmen. Hier will ich aber vorerst, so lange bis der Aronhold'sche Process ausgeführt ist, die Variablen x_1, x_2 schreiben, weil ich mit der entstehenden Function Ueberschiebungen machen muss. Es ist wiederum nach (A′)

$$\delta_1 k(x) = \delta\left[(ab)^4 a_x^2 b_x^2\right] = 2(\bar{a}b)^4 \bar{a}_x^2 b_x^2,$$

oder

$$\delta_1 k(x) = 2(Hb)^4 H_v^2 H_x^2 b_x^2,$$

wie man erkennt, wenn man in (3) $y_1 = b_2$, $y_2 = -b_1$ setzt. Die rechte Seite entwickle ich in eine Clebsch-Gordan'sche Reihe nach Polaren der Ueberschiebungen von H und f:

$$(Hb)^4 H_v^2 H_x^2 b_x^2$$

$$= D^2\big(H(x), f(x)\big)_4 - \frac{2}{3}(xv)\, D\big(H(x), f(x)\big)_5 + \frac{1}{10}(xv)^2\big(H(x), f(x)\big)_6,$$

wo D, bez. D^2 die einmalige, bez. zweimalige Polarenbildung unter Einführung von v_1, v_2 an Stelle von x_1, x_2 bedeutet. Nun ist $(H, f)_5 = 0$, weil eine Covariante dritten Grades und vierter Ordnung nicht existirt, und sodann liefert die Formel (B) für $r_1 = r_2 = r_3 = f$ und $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$, bez. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$ die folgenden Ausdrücke:

$$(H, f)_4 = \frac{2}{15} Af - \frac{5}{7} p,$$

$$\text{(4)} \qquad (H, f)_6 = \frac{5}{7} l,$$

so dass, wenn

$$p(x) = p_x^6, \quad l(x) = l_x^2$$

gesetzt wird:

$$D^2\big(H(x),\, f(x)\big)_4 = \frac{2}{15}\, A\, a_v^2 a_x^4 - \frac{5}{7}\, p_v^2 p_x^4,$$

$$\big(H(x),\, f(x)\big)_6 = \frac{5}{7}\, l_x^2$$

ist. Demgemäss bekommt man

$$\delta_1 k(x) = \frac{4}{15}\, A a_v^2\, a_x^4 - \frac{10}{7}\, p_v^2\, p_x^4 + \frac{1}{7}\,(xv)^2 l_x^2;$$

und hieraus folgt einerseits, wenn man $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ werden lässt:

(IIIa) $$\underset{v=u}{\delta_1}\, k = \frac{4}{15}\, Af - \frac{10}{7}\, p,$$

und andererseits, wenn

$$\delta k(x) = \bar{k}_x^4$$

bezeichnet wird:

(5) $$\bar{k}_x^4 = \frac{4}{15}\, A a_v^2\, a_x^4 - \frac{10}{7}\, p_v^2 p_x^4 + \frac{1}{7}\,(xv)^2\, l_x^2$$

und

(6) $$\bar{k}_x^2 \bar{k}_y^2 = \frac{4}{15}\, A\, a_v^2 a_x^2 a_y^2 - \frac{10}{7}\, p_v^2\, p_x^2\, p_y^2$$
$$+ \frac{1}{42}\left[l_x^2 (yv)^2 + 4\, l_y\, l_x\, (yv)\,(xv) + l_y^2 (xv)^2\right]. -$$

4) In gleicher Weise wird bei Zuhülfenahme von (A') und der für $x_1 = b_2$, $x_2 = -b_1$ ausgerechneten Gleichung (1)

$$\underset{v=u}{\delta_1}\, A = \underset{v=u}{\delta_1}\, [(ab)^6] = 2(H, f)_6,$$

oder, da nach (4) $(H, f)_6 = \frac{5}{7}\, l$ ist:

(IVa) $$\underset{v=u}{\delta_1}\, A = \frac{10}{7}\, l. -$$

5) Da $\delta k(x)$ mit $\bar{k}_x^4$ bezeichnet wurde, so ist (vergl. (A'))

$$\delta_1 \Delta = \delta_1 \left[(kk')^2 k_u^2 k_u'^2\right] = 2(\bar{k}k)^2 \bar{k}_u^2 k_u^2,$$

und für $(\bar{k}k)\bar{k}_u^2 k_u^2$ erhält man unter Benutzung des Ausdrucks (6):

$$(\bar{k}k)\,\bar{k}_u^2 k_u^2 = \frac{4}{15}\, A(ak)^2\, a_v^2\, a_u^2 k_u^2 - \frac{10}{7}\,(pk)^2 p_v^2 p_u^2 k_u^2 + \frac{1}{42}\, l_u^2 k_u^2 k_v^2$$
$$+ \frac{2}{21}\,(lk)\, l_u k_v k_u^2\,(uv) + \frac{1}{42}\,(lk)^2 k_u^2\,(uv)^2,$$

und demnach ist

$$\underset{v=u}{\delta_1}\, \Delta = \frac{8}{15}\, Ap - \frac{20}{7}\,(p,\, k)_2 + \frac{1}{21}\, lk.$$

Aus der Gleichung (B) folgen sodann für $r_1 = r_2 = k$, $r_3 = f$ und $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$, bez. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 2$, da eine Covariante dritten Grades und vierter Ordnung nicht existirt, also

(7) $$(k, f)_3 = 0$$

ist, die Relationen:

$$\frac{3}{2}(\Delta, f)_2 + \frac{1}{4}Bf = \frac{3}{4}lk,$$

$$(\Delta, f)_2 + \frac{1}{3}Bf = (p, k)_2 + \frac{3}{5}lk,$$

und hieraus ergiebt sich

(8) $$(p, k)_2 = \frac{1}{6}Bf - \frac{1}{10}lk.$$

Demgemäss nimmt der Ausdruck von $\underset{v=u}{\delta_1}\Delta$ die Form an:

(Va) $$\underset{v=u}{\delta_1}\Delta = -\frac{10}{21}Bf + \frac{8}{15}Ap + \frac{1}{3}lk. -$$

6) Ebenso bekommt man mit Hülfe von (A') und (5):

$$\delta_1 B = \delta_1 [(kk')^4] = 2(\bar{k}k)^4$$

$$= 2\left[\frac{4}{15}A(ak)^4 a_v^2 - \frac{10}{7}(p\,k)^4 p_v^2 + \frac{1}{7}(lk)^2 k_v^2\right],$$

also ist

$$\underset{v=u}{\delta_1} B = \frac{8}{15}Al - \frac{20}{7}(p, k)_4 + \frac{2}{7}m,$$

oder, da (vergl. Formel (B) für $r_1 = f$, $r_2 = r_3 = k$ und $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$)

(9) $$(p, k)_4 = \frac{2}{5}m$$

ist:

(VIa) $$\underset{v=u}{\delta_1} B = \frac{8}{15}Al - \frac{6}{7}m. -$$

7) Ferner ist gemäss (A):

$$\delta_1 p = \delta_1 [(ka)^2 k_u^2 a_u^4]$$

$$= (\bar{k}a)^2 \bar{k}_u^2 a_u^4 + (k\bar{a})^2 k_u^2 \bar{a}_u^4.$$

Hierin ist auf Grund der Gleichungen (6) und (2):

$$(\bar{k}a)^2 \bar{k}_u^2 a_u^4 = \frac{4}{15}A(ab)^2 a_v^2 a_u^2 b_u^4 - \frac{10}{7}(pa)^2 p_v^2 p_u^2 a_u^4 + \frac{1}{42}l_u^2 a_v^2 a_u^4$$

$$+ \frac{2}{21}(la) l_u a_v a_u^4 (uv) + \frac{1}{42}(la)^2 a_u^4 (uv)^2,$$

$$(k\bar{a})^2 k_u^2 \bar{a}_u^4 = (kH)^2 k_u^2 H_v^2 H_u^4,$$

und demnach ist, wenn wir u_1, u_2 an Stelle von v_1, v_2 setzen:

$$\underset{v=u}{\delta_1} p = \frac{4}{15}AH - \frac{10}{7}(p, f)_2 + \frac{1}{42}lf + (k, H)_2.$$

Ferner erhalten wir aus (B) für $r_1 = r_2 = f$, $r_3 = k$ und $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$, bez. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 2$ die folgenden Identitäten

(10) $$(H, k)_2 = \frac{1}{6} lf - \frac{5}{42} k^2,$$

(11) $$(p, f)_2 = (H, k)_2 - \frac{1}{10} lf + \frac{2}{7} k^2,$$

und mit Hülfe derselben geht der Ausdruck von $\underset{v=u}{\delta_1 p}$ in

(VIIa) $$\underset{v=u}{\delta_1 p} = \frac{2}{21} lf + \frac{4}{15} AH - \frac{5}{14} k^2$$

über. —

8) Bei der Covariante l nehme ich vorerst x_1, x_2 als die Variablen, weil mit der bei dem Aronhold'schen Process resultirenden Function Ueberschiebungen gebildet werden. Es ist nach (A)

$$\begin{aligned} \delta_1 l(x) &= \delta_1 \left[(ka)^4 a_x^2\right] \\ &= (\bar{k}a)^4 a_x^2 + (k\bar{a})^4 \bar{a}_x^2. \end{aligned}$$

Für die beiden Glieder der rechten Seite findet man mittels (5) und (3)

$$(\bar{k}a)^4 a_x^2 = \frac{4}{15} A (ab)^4 a_v^2 b_x^2 - \frac{10}{7} (pa)^4 p_v^2 a_x^2 + \frac{1}{7} (la)^2 a_v^2 a_x^2,$$

$$(k\bar{a})^4 \bar{a}_x^2 = (kH)^4 H_v^2 H_x^2,$$

oder, wenn man die einmalige, bez. zweimalige Polarenbildung unter Einführung von v_1, v_2 an Stelle von x_1, x_2 mit D, bez. D^2 bezeichnet:

$$\begin{aligned} (\bar{k}a)^4 a_x^2 = {} & \frac{4}{15} A \left[D^2 \big(f(x), f(x)\big)_4 + \frac{1}{3} (xv)^2 \big(f(x), f(x)\big)_6\right] \\ & - \frac{10}{7} \left[D^2 \big(p(x), f(x)\big)_4 - (xv) D \big(p(x), f(x)\big)_5\right. \\ & \left. + \frac{1}{3} (xv)^2 \big(p(x), f(x)\big)_6\right] + \frac{1}{7} D^2 \big(l(x), f(x)\big)_2, \end{aligned}$$

$$(k\bar{a})^4 \bar{a}_x^2 = D^2 \big(H(x), k(x)\big)_4.$$

Hierzu liefert die Formel (B) für $r_1 = r_2 = f$, $r_3 = k$ und $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 3$, bez. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$, bez. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$, bez. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$ die vier Gleichungen

(12) $$(l, f)_2 = \frac{1}{3} Ak + 2\Delta,$$

(13) $$(p, f)_4 = \frac{1}{3} Ak + \Delta - \frac{3}{5} (l, f)_2,$$

$$(H, k)_4 = -\frac{1}{5} Ak - \frac{12}{7} \Delta + (l, f)_2,$$

(14) $$(p, f)_6 = B;$$

ausserdem ist

(15) $$(p, f)_5 = 0,$$

weil eine Covariante vierten Grades und zweiter Ordnung nicht existirt. Dementsprechend erhält man, wenn

$$\delta_1 l(x) = \bar{l}_x^2$$

gesetzt wird:

$$(16) \qquad \bar{l}_x^2 = \frac{9}{35} A k_v^2 k_x^2 + \frac{6}{7} \Delta_v^2 \Delta_x^2 + \left(\frac{4}{45} A^2 - \frac{10}{21} B\right)(xv)^2,$$

und hieraus folgt speciell

$$(\text{VIII a}) \qquad \underset{v=u}{\delta_1} l = \frac{9}{35} A k + \frac{6}{7} \Delta. -$$

9) Endlich hat man

$$\delta_1 m = \delta_1 \left[(kl)^2 k_u^2\right]$$
$$= (\bar{k} l)^2 \bar{k}_u^2 + (k \bar{l})^2 k_u^2,$$

und da auf Grund der Gleichungen (6) und (16)

$$(\bar{k} l)^2 \bar{k}_u^2 = \frac{4}{15} A (a l)^2 a_v^2 a_u^2 - \frac{10}{7} (p l)^2 p_v^2 p_u^2 + \frac{1}{42} l_v^2 l_u'^2$$
$$+ \frac{2}{21} (l l') l_u l_v' (uv) + \frac{1}{42} (l l')^2 (uv)^2,$$
$$(k \bar{l}) k_u^2 = \frac{9}{35} A (k k')^2 k_v^2 k_u'^2 + \frac{6}{7} (k \Delta)^2 \Delta_v^2 k_u^2 + \left(\frac{4}{45} A^2 - \frac{10}{21} B\right) k_v^2 k_u^2$$

ist, so muss

$$\underset{v=u}{\delta_1} m = \frac{4}{15} A (l, f)_2 - \frac{10}{7} (p, l)_2 + \frac{1}{42} l^2 + \frac{9}{35} A \Delta$$
$$+ \frac{6}{7} (k, \Delta)_2 + \left(\frac{4}{45} A^2 - \frac{10}{21} B\right) k$$

sein. Hierin ist

$$(17) \qquad (k, \Delta)_2 = \frac{1}{6} B k,$$

wie aus der Formel (B) für $r_1 = r_2 = r_3 = k$ und $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$ hervorgeht; sodann folgt aus derselben ferner für $r_1 = f$, $r_2 = k$, $r_3 = l$ und $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 2$, dass

$$(p, l)_2 = \left((f, l)_2, k\right)_2 - \frac{1}{10} l^2,$$

oder, da

$$(f, l)_2 = \frac{1}{3} A k + 2 \Delta$$

(vergl. (12)) ist:

$$(18) \qquad (p, l)_2 = \left[\frac{1}{3} A (k, k)_2 + 2 (\Delta, k)_2\right] - \frac{1}{10} l^2$$
$$= \frac{1}{3} A \Delta + \frac{1}{3} B k - \frac{1}{10} l^2.$$

In Folge davon und der Gleichung (12) ergiebt sich

$$(\text{IX a}) \qquad \underset{v=u}{\delta_1} m = \frac{8}{45} A^2 k - \frac{17}{21} B k + \frac{11}{35} A \Delta + \frac{1}{6} l^2. -$$

Wir sind also zu dem Resultat gekommen: *Wenn die Operation* $\underset{v=u}{\delta}$ *mit der Covariante* $H_v^2 H_x^6$ *ausgeführt wird, so besteht das folgende Gleichungssystem:*

$$\underset{v=u}{\delta_1} f = H,$$

$$\underset{v=u}{\delta_1} H = \frac{3}{7} kf,$$

$$\underset{v=u}{\delta_1} k = \frac{4}{15} Af - \frac{10}{7} p,$$

$$\underset{v=u}{\delta_1} A = \frac{10}{7} l,$$

$$\underset{v=u}{\delta_1} \Delta = -\frac{10}{21} Bf + \frac{8}{15} Ap + \frac{1}{3} kl,$$

$$\underset{v=u}{\delta_1} B = \frac{8}{15} Al - \frac{6}{7} m,$$

$$\underset{v=u}{\delta_1} p = \frac{2}{21} lf + \frac{4}{15} AH - \frac{5}{14} k^2,$$

$$\underset{v=u}{\delta_1} l = \frac{9}{35} Ak + \frac{6}{7} \Delta,$$

$$\underset{v=u}{\delta_1} m = \frac{8}{45} A^2 k - \frac{17}{21} Bk + \frac{11}{35} A\Delta + \frac{1}{6} l^2. -$$

§ 3.

Ganz analog wird die Rechnung für den zweiten Fall, dass nämlich bei der Operation $\underset{v=u}{\delta}$ für den Aronhold'schen Process die Function

$$(xv)^2 k(x)$$

genommen wird. Ich will, um diese Operation von derjenigen des vorigen Paragraphen zu unterscheiden, hier dem δ den Index 2 anhängen.

1) Es ist dann

$$\delta_2 f(x) = (xv)^2 k(x),$$

und hieraus folgt, wenn ich x_1, x_2 und v_1, v_2 gleich u_1, u_2 werden lasse:

$$\text{(Ib)} \qquad \underset{v=u}{\delta_2} f = 0.$$

Wie oben setze ich auch hier wieder

$$\delta_2 f(x) = \bar{a}_x^6,$$

wo freilich dies $\bar{a}_x$ nicht identisch mit demjenigen in den Gleichungen (1), (2) u. s. w. des § 2 ist; aber durch diese gleiche Bezeichnung wird gleichwohl kein Irrthum entstehen können, da dieselbe nur vorübergehend während der Rechnung gebraucht wird. Man hat alsdann

(1) $$\bar{a}_x^6 = (xv)^2 k_x^4$$

und

(2) $$\bar{a}_x^4 \bar{a}_y^2 = \frac{1}{15}\left\{k_x^4 (yv)^2 + 8 k_x^3 k_y (yv)(xv) + 6 k_x^2 k_y^2 (xv)^2\right\},$$

(3) $$\bar{a}_x^2 \bar{a}_y^4 = \frac{1}{15}\left\{6 k_x^2 k_y^2 (yv)^2 + 8 k_x k_y^3 (yv)(xv) + k_y^4 (xv)^2\right\}. -$$

2) Da ferner nach (A')

$$\delta_2 H = \delta_2 \left[(ab)^2 a_u^4 b_v^4\right] = 2(\bar{a}b)^2 \bar{a}_u^4 b_u^4,$$

so erhält man mit Rücksicht auf (2)

(IIb) $$\underset{v=u}{\delta_2} H = \frac{2}{15} kf. -$$

3) Unmittelbar ergiebt sich mit Hülfe von (3):

$$\begin{aligned}\delta_2 k(x) &= \delta_2\left[(ab)^4 a_x^2 b_x^2\right] = 2(\bar{a}b)^4 \bar{a}_x^2 b_x^2 \\ &= \frac{2}{15}\left\{6(kb)^2 k_x^2 b_v^2 b_x^2 + 8(kb)^3 k_x b_v b_x^2 (xv)\right. \\ &\qquad \left. + (kb)^4 b_x^2 (xv)^2\right\},\end{aligned}$$

oder, da $(k, f)_3 = 0$ ist (vergl. (7) in § 2):

$$\delta_2 k(x) = \frac{4}{5} D^2 \big(k(x), f(x)\big)_2 + \frac{12}{25}(xv)^2 \big(k(x), f(x)\big)_4,$$

wo D^2 die zweite Polare bedeutet. Demnach ist, wenn wiederum

$$\delta_2 k(x) = \bar{k}_x^4$$

bezeichnet wird:

(4) $$\bar{k}_x^4 = \frac{4}{5} p_v^2 p_x^4 + \frac{12}{25} l_x^2 (xv)^2$$

und

(5) $$\bar{k}_x^2 \bar{k}_y^2 = \frac{4}{5} p_v^2 p_x^2 p_y^2 + \frac{2}{25} l_x^2 (yv)^2 + \frac{8}{25} l_x l_y (yv)(xv) + \frac{2}{25} l_y^2 (xv)^2;$$

und ausserdem hat man noch

(IIIb) $$\underset{v=u}{\delta_2} k = \frac{4}{5} p. -$$

4) Sodann folgt aus

$$\delta_2 A = \delta_2\left[(ab)^6\right] = 2(\bar{a}b)^6,$$

dass (siehe (1))

(IVb) $$\underset{v=u}{\delta_2} A = 2l. -$$

5) In analoger Weise bekommt man, da

$$\delta_2 \Delta = \delta_2\left[(kk')^2 k_u^2 k_u'^2\right] = 2(\bar{k}k)^2 \bar{k}_u^2 k_u^2$$

ist, bei Beachtung der Gleichung (5):

$$\underset{v=u}{\delta_2} \Delta = \frac{8}{5}(p, k)_2 + \frac{4}{25} lk,$$

oder bei Berücksichtigung der Formel (8) in § 2:

(Vb) $$\underset{v=u}{\delta_2} = \frac{4}{15} Bf. -$$

6) Und ebenso findet man, da

$$\delta_2 B = \delta[(kk')^4] = 2(k\bar{k})^4$$

ist, wenn man die Gleichung (4) benutzt:

$$\underset{v=u}{\delta_2} B = \frac{8}{5}(p, k)_4 + \frac{24}{25} m;$$

mithin, da nach (9) in § 2

$$(p, k)_4 = \frac{2}{5} m$$

ist:

(VIb) $$\underset{v=u}{\delta_2} B = \frac{8}{5} m. -$$

7) Es ergiebt sich ferner aus

$$\delta_2 p = \delta_2 [(ka)^2 k_u^2 a_u^4]$$
$$= (\bar{k}a)^2 \bar{k}_u^2 a_u^4 + (k\bar{a})^2 k_u^2 \bar{a}_u^4,$$

wenn man die rechte Seite mittels der Formeln (3) und (5) umformt:

$$\underset{v=u}{\delta_2} p = \left[\frac{4}{5}(pa)^2 p_u^4 a_u^4 + \frac{2}{25} l_u^2 a_u^6\right] + \frac{1}{15} k_u^4 k_u'^4$$
$$= \frac{4}{5}(p, f)_2 + \frac{2}{25} lf + \frac{1}{15} k^2,$$

und hieraus resultirt bei Berücksichtigung von (11) in § 2:

(VIIb) $$\underset{v=u}{\delta_2} p = \frac{2}{15} lf + \frac{1}{5} k^2. -$$

8) In dem Ausdrucke von $\delta_2 l(x)$, d. i.

$$\delta_2 l(x) = \delta_2 [(ka)^4 a_x^2] = (\bar{k}a)^4 a_x^2 + (k\bar{a})^4 \bar{a}_x^2,$$

ist einerseits zu Folge von (4)

$$(\bar{k}a)^4 a_x^2 = \frac{4}{5}(pa)^4 p_v^2 a_x^2 + \frac{12}{25}(la)^2 a_v^2 a_x^2$$
$$= \frac{4}{5}\left[D^2\big(p(x), f(x)\big)_4 - (xv)\, D\big(p(x), f(x)\big)_5 + \frac{1}{3}(xv)^2\big(p(x), f(x)\big)_6\right]$$
$$+ \frac{12}{25} D^2\big(l(x), f(x)\big)_2,$$

(wo D, bez. D^2 die erste, bez. zweite Polare bedeutet), also mit Hülfe von (12), (13), (14) und (15) in § 2:

$$(\bar{k}a)^4 a_x^2 = \frac{4}{15} A k_v^2 k_x^2 + \frac{4}{5} \Delta_v^2 \Delta_x^2 + \frac{4}{15} B (xv)^2;$$

und andererseits (siehe (3)) ist

$$(k\bar{a})^4 \bar{a}_x^2 = \frac{2}{5}(kk')^2 k_x^2 k_v'^2 + \frac{8}{15}(kk')^3 k_v' k_x (xv) + \frac{1}{15}(kk')^4 (xv)^2$$
$$= \frac{2}{5}\Delta_v^2 \Delta_x^2 + \frac{7}{15} B(xv)^2.$$

Demnach hat man, wenn wieder

$$\delta_2 l(x) = \bar{l}_x^2$$

gesetzt wird:

(6) $$\bar{l}_x^2 = \frac{4}{15} A k_v^2 k_x^2 + \frac{6}{5}\Delta_v^2 \Delta_x^2 + \frac{11}{15} B(xv)^2,$$

und ausserdem speciell

(VIII b) $$\underset{v=u}{\delta_2} l = \frac{4}{15} Ak + \frac{6}{5}\Delta. -$$

9) Endlich findet man aus

$$\delta_2 m = \delta_2 \left[(kl)^2 k_u^2\right]$$
$$= (\bar{k}l)^2 \bar{k}_u^2 + (k\bar{l})^2 k_u^2,$$

dass (vergl. (5) und (6))

$$\underset{v=u}{\delta_2} m = \left[\frac{4}{5}(p, l)_2 + \frac{2}{25} l^2\right] + \left[\frac{4}{15} A\Delta + \frac{6}{5}(k, \Delta)_2 + \frac{11}{15} Bk\right],$$

d. i. mit Berücksichtigung der Identitäten (17) und (18) in § 2:

(IX b) $$\underset{v=u}{\delta_2} m = \frac{8}{15} A\Delta + \frac{6}{5} Bk. -$$

Stellen wir die gefundenen Resultate dieses Paragraphen zusammen, so hat sich also *für den Fall, dass wir bei der Operation* $\underset{v=u}{\delta}$ *die Covariante* $(xv)^2 k_x^4$ *benutzen, das folgende System von Gleichungen* ergeben:

$$\underset{v=u}{\delta_2} f = 0,$$

$$\underset{v=u}{\delta_2} H = \frac{2}{15} kf,$$

$$\underset{v=u}{\delta_2} k = \frac{4}{5} p,$$

$$\underset{v=u}{\delta_2} A = 2l,$$

$$\underset{v=u}{\delta_2} \Delta = \frac{4}{15} Bf,$$

$$\underset{v=u}{\delta_2} B = \frac{8}{5} m,$$

$$\underset{v=u}{\delta_2} p = \frac{2}{15} lf + \frac{1}{5} k^2,$$

$$\underset{v=u}{\delta_2} l = \frac{4}{15} A\dot{k} + \frac{6}{5}\Delta,$$

$$\underset{v=u}{\delta_2} m = \frac{6}{5} Bk + \frac{8}{15} A\Delta. -$$

§ 4.

Wenn bei der Operation $\underset{v=u}{\delta}$ zu dem Aronhold'schen Process eine lineare Function von $H_v^2 H_x^6$ und $(xv)^2 k_x^4$:

$$\mathfrak{F}(x) = c_1 H_v^2 H_x^6 + c_2 (xv)^2 k_x^4,$$

wo c_1, c_2 numerische Constanten sind, benutzt wird, so ist, wie unmittelbar klar,

$$\underset{v=u}{\delta} = c_1 \underset{v=u}{\delta_1} + c_2 \underset{v=u}{\delta_2}.$$

So ergiebt sich speciell, wenn ich denjenigen Aronhold'schen Process — ich werde ihn mit δ_0 bezeichnen — nehme, der an der Discriminante von $f(x)$ ausgeführt den Werth Null liefert, wo also

$$F(x) = (ab)^2 a_v^3 a_x^2 b_x^5 : (xv) = -\frac{3}{2} H_v^2 H_x^6 - \frac{5}{28} (x\,v)^2 k_x^4$$

die betreffende Function ist (vergl. (2) in der Einleitung), die Beziehung

$$\underset{v=u}{\delta_0} = -\frac{3}{2} \underset{v=u}{\delta_1} - \frac{5}{28} \underset{v=u}{\delta_2}.$$

Und demgemäss hat man hier das Gleichungssystem:

$$\underset{v=u}{\delta_0} f = -\frac{3}{2} H,$$

$$\underset{v=u}{\delta_0} H = -\frac{2}{3} kf,$$

$$\underset{v=u}{\delta_0} k = -\frac{2}{5} Af + 2p,$$

$$\underset{v=u}{\delta_0} A = -\frac{5}{2} l,$$

$$\underset{v=u}{\delta_0} \Delta = \frac{2}{3} Bf - \frac{4}{5} Ap - \frac{1}{2} kl,$$

$$\underset{v=u}{\delta_0} B = -\frac{4}{5} Al + m,$$

$$\underset{v=u}{\delta_0} p = -\frac{1}{6} lf - \frac{2}{5} AH + \frac{1}{2} k^2,$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\, l = -\tfrac{13}{30} A k - \tfrac{3}{2} \Delta,$$

$$\underset{v=u}{\delta_0}\, m = -\tfrac{4}{15} A^2 k + B k - \tfrac{17}{30} A \Delta - \tfrac{1}{4} l^2. -$$

Dies System von Gleichungen hat hauptsächlich deswegen Bedeutung, weil in der partiellen Differentialgleichung der Thetafunctionen zweier Argumente die Differentiation nach den Parametern, wie schon erwähnt, in der Form δ_0 erscheint.

Halle a. S., im April 1889.

Zur Definition der Irrationalzahlen*).

Von

Eberh. Illigens in Beckum.

In dem Band XXXIII, S. 155 dieser Zeitschrift abgedruckten Aufsatze wurde der Nachweis versucht, dass die durch die Weierstrass-Cantor'sche Theorie der Irrationalzahlen eingeführten Zahlreihezeichen nicht bloss abstracte Gedankendinge — denn das sind auch die unbenannten rationalen Zahlen — und keine „*anschauliche*" Vielheiten sind, sondern bloss als Zeichen für das Gegebensein einer Zahlreihe, in *keiner* Weise aber als Ausdruck für eine Vielheit (Grösse) gelten können, so dass die für eigentliche Grössen geltenden Begriffe: gleich, kleiner, grösser, Grenze u. s. w. bei den Zahlreihezeichen auch nicht in erweitertem Sinne, sondern nur in einer *gänzlich* verschiedenen, dem üblichen Sprachgebrauche durchaus fremden Bedeutung angewendet werden können. Hier sei nur noch kurz die im Bande XXXIII, S. 476 dieser Zeitschrift enthaltene Bemerkung des Herrn Cantor berührt, dass mit Hülfe der von ihm eingeführten „Zahlen" eigentliche Grössen, z. B. geometrische Strecken quantitativ genau bestimmt werden könnten. Ist jedoch z. B. $\sqrt{3}$ nur ein Zeichen, dass die Zahlreihe 1.7, 1.73, $1.732\ldots$ vorliegt, ohne dass im Uebrigen Aufschluss über das unter $\sqrt{3}$ verstandene Ding ertheilt oder irgendwie die Abhängigkeit desselben von der genannten Zahlreihe angegeben wird, so hat es, wie am Schlusse des vorerwähnten Aufsatzes schon bemerkt wurde, keinen Sinn, von einer Linie von $\sqrt{3}$ Metern zu sprechen. Freilich kann eine Linie von $\sqrt{3}$ Metern als Grenze der Linien von 1.7 Metern, 1.73 Metern u. s. w. erklärt werden; bei dieser Erklärung aber hat

*) Wir wiederholen bei der Veröffentlichung dieses Aufsatzes unsere schon zu der ersten Abhandlung des Verfassers gemachte Bemerkung, wonach es uns richtig scheint, die Frage der Irrationalzahlen zu möglichst vielseitiger wissenschaftlicher Discussion gelangen zu lassen. Herr G. Cantor hat uns zur Entgegnung eine ausführlichere Darlegung seiner Theorie in Aussicht gestellt.

D. Red.

das Wort Grenze, da es in eigentlichem Sinne gebraucht wird, eine Bedeutung, in welcher es für blosse Zahlreihezeichen gar nicht angewendet werden kann; mithin ist eine solche Erklärung nicht für eine Theorie möglich, in welcher $\sqrt{3}$ nicht über die Bedeutung eines blossen Zahlreihezeichens erhoben werden kann.

Wenn demnach die Weierstrass-Cantor'sche Theorie die Zahlreihezeichen nicht zu Quantitätsbezeichnungen — wie es die Irrationalzahlen doch sein sollen — auszugestalten vermag, und der gleiche Mangel auch der Definitionsform des Herrn Dedekind anhaftet, in welcher Weise sollen denn die Irrationalzahlen erklärt werden? Die Antwort dürfte nicht schwer sein, wenn wir bei der Erklärung vor Allem darauf sehen, dass die irrationalen Zahlen ebensowohl, als die rationalen, eigentliche Grössen, wirkliche Quantitätsbezeichnungen bilden; denn sind nicht $\sqrt{3}$ Minuten oder $\sqrt{5}$ Meter Grössen in strengem Sinne des Wortes? Senden wir zunächst einige Bemerkungen voraus.

Jede Zahl, zum mindesten jede reelle, ist die Bezeichnung für eine Quantität (Grösse), ein „Wie viel" von Dingen. Wir wählen absichtlich das Wort Quantität, weil man mit dem Worte Vielheit oder Menge gewöhnlich eine discrete Grösse zu bezeichnen pflegt, wogegen das Wort Quantität auch die stetigen Grössen umfasst. Die Zahlen, mit einander verglichen, werden gleich, kleiner, grösser genannt, je nachdem die durch sie bezeichneten Quantitäten es sind. Zwei Quantitäten hinwiederum derselben Art heissen gleich (in engerem Sinne), wenn sie völlig mit einander übereinstimmen, sich als solche nicht unterscheiden, so dass sie mit einander vertauscht werden können. Diese Definition mag zu wenig anschaulich genannt werden; wer jedoch den Begriff der Gleichheit im Allgemeinen erfasst hat, kann keinen Zweifel mehr bei seiner Anwendung auf Quantitäten, auf das „Wie viel" von Dingen haben. Die Begriffe: grösser, kleiner, Grenze, bieten noch weniger Schwierigkeit. Eine Quantität heisst grösser, als eine andere, wenn sie eine dieser gleiche in sich enthält, ausserdem aber noch einen Ueberschuss ergiebt. Wohl nicht bedarf es der Erwähnung, wie für eine *jede* Grösse die Operationen des Addirens, des Subtrahirens, Multiplicirens mit einer ganzen Zahl und des Dividirens durch eine solche sich ergeben; es gilt für die erwähnten Operationen bei jeglicher Grösse ohne Unterschied genau dasselbe, was man über diese Operationen der ganzen Zahlen zu sagen pflegt.

Haben wir solchermaassen die Begriffe der Gleichheit, des Grösser- und Kleinerseins, der Grenze, sowie die Rechnungsoperationen, wenigstens die vorgenannten, für eine jede Quantität erklärt, so scheint die Einführung der irrationalen Zahlen als eigentlicher Grössen keine besonderen Schwierigkeiten zu bieten; und zwar wählen wir wohl am zweckmässigsten denselben Ausgangspunkt, den Herr Cantor in seiner

Theorie genommen hat. Nachdem nämlich die rationalen Zahlen erklärt sind, lässt sich zeigen, dass es Reihen von Rationalzahlen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ der Art geben kann, dass bei jedem vorgegebenen, beliebig klein gewählten ε die Differenz $\varphi_{n+r} - \varphi_n$ von einem bestimmten n ab kleiner ist als ε, wie gross auch r genommen wird, dass aber dennoch für die Reihe ein rationaler Grenzwerth nicht existirt. Nun giebt es aber, wenn φ_1, φ_2 u. s. w. die Maasszahlen stetiger Grössen bedeuten, Fälle, in denen eine Grösse existirt, welche den Grenzwerth der Grössen φ_1, φ_2 u. s. w. bildet. Dieser Umstand, dass es also Quantitäten giebt, welche nicht rational sind, aber den Grenzwerth einer Reihe rationaler Quantitäten bilden, veranlasst uns, ganz allgemein und unabhängig davon, ob die Glieder der Reihe discrete oder stetige Grössen bezeichnen, in allen Fällen, wo Reihen der vorbezeichneten Art vorliegen, Quantitäten zu *denken*, welche Grenzwerthe dieser Reihen sind, somit die irrationalen Zahlen als *angenommene* Grenzwerthe genannter Reihen einzuführen. Hierbei wird keineswegs die „Existenz" der Grenze präsumirt, d. h. es wird nicht allgemein behauptet, dass es Dinge in einer solchen Quantität gebe oder geben könne, dass letztere der Grenzwerth genannter Reihen ist, sondern die angenommenen Grenzwerthe sind, wenigstens allgemein genommen und ohne Rücksicht auf Dinge, deren Quantität sie ausdrücken sollen, blosse Fictionen, *gedachte* Grössen. In dem Begriffe solch' fingirter Grössen liegt kein Widerspruch, und muss deshalb ihre Einführung von dem rein formalen Standpunkte der Mathematik aus statthaft sein; ja es dürften auch, beiläufig bemerkt, selbst die gebrochenen Zahlen in ihrer Allgemeinheit am natürlichsten als „angenommene" Vielheiten zu erklären sein.

Es sei auch noch kurz darauf hingewiesen, dass die vorstehend gegebene Definitionsweise eine rein arithmetische ist. Die Heranziehung stetiger Grössen ist nur geschehen, um den nächstliegenden Anlass zur Einführung der irrationalen Zahlen anzugeben, doch ist die aufgestellte Definition derselben ganz unabhängig von der Stetigkeit der Grössen, und wäre auch ohne Erwähnung des genannten Anlasses ebensowohl möglich gewesen.

Weil sodann bei dieser Einführungsweise die irrationalen Zahlen eigentliche Grössen, wenn auch blos gedachte, bezeichnen, so brauchen nicht, ja können nicht einmal die Definitionen der Gleichheit, des Grösser- und Kleinerseins, sowie der Grenze, für sie besonders aufgestellt werden, sondern sind nach dem oben über jede Grösse Gesagten bereits gegeben, und deshalb war es auch möglich, von vornherein die Bezeichnung Grenzwerth auf sie anzuwenden. Man giebt daher bei vorstehender Einführungsart nicht eine Definition der Gleichheit, sondern nennt bloss ein Kriterium derselben, wenn man sagt, zwei

irrationale Zahlen, welche den Grenzwerth der Reihen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ und $\psi_1, \psi_2, \ldots$ bilden, seien gleich, wenn $\lim\limits_{n=\infty} (\varphi_n - \psi_n) = 0$ ist. Ein Gleiches ergiebt sich für die Rechnungsarten; die Bedeutung der Summe oder Differenz zweier Irrationalzahlen (resp. einer irrationalen und einer rationalen Zahl), desgleichen des Productes derselben mit einer rationalen Zahl und ihrer Division durch eine rationale Zahl ist nicht erst zu definiren, sondern nach dem oben über jede Grösse Gesagten und nach Einführung der rationalen Zahlen von selbst gegeben. Es verbleiben nur, wenn wir bloss die vier elementaren Species berücksichtigen, das Multipliciren und Dividiren zweier Irrationalzahlen mit resp. durch einander; für diese Rechnungsarten sind freilich Festsetzungen nöthig; letztere können in üblicher Weise erfolgen; sind nämlich zwei Irrationalzahlen die Grenzen der Reihen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ und $\psi_1, \psi_2, \ldots$, so nennt man $\lim\limits_{n=\infty} (\varphi_n \cdot \psi_n)$ ihr Product, $\lim\limits_{n=\infty} (\varphi_n : \psi_n)$ ihren Quotienten.

Schliesslich sei noch gestattet, nochmals hervorzuheben, dass es der dargelegten Einführungsart wesentlich ist, von dem allgemeinen Begriffe der Quantität, des „Wie viel" von Dingen auszugehen, und gleich von vornherein für eine jede Quantität die Definitionen der Gleichheit u. s. w., sowie die mehrfach genannten Rechnungsoperationen festzustellen, wogegen die herrschenden Theorien meistens umgekehrt verfahren, und die Definitionen der Gleichheit u. s, w. zunächst nur für die ganzen Zahlen aufstellen, und dann erst schrittweise auf andere Zahlen zu übertragen suchen. Es hat ein solches Verfahren naturgemäss den Vortheil, dass der Begriff der Gleichheit anschaulicher definirt werden kann. Wenn man dann aber zur Einführung der Irrationalzahlen der Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ ein neues Ding b zuordnet, so muss man dieses b entweder gleich von vornherein als Ausdruck für eine Quantität auffassen oder nicht. Im ersten Falle wird man nicht umhin können, b in rein formaler Weise als eine angenommene Grösse zu betrachten, im zweiten aber ist b, sofern man es nicht für ein blosses Zeichen dafür, dass eine Zahlreihe vorliege, ansehen will, ganz unbestimmter Natur, ein *ganz beliebig* zu wählendes Ding, dessen Abhängigkeit von der Zahlreihe durch keinerlei Gesetz bestimmt wird. Ich kann mir unter b z. B. eine Farbe oder einen Laut denken; die letzte Aeusserung mag höchst absonderlich klingen, und doch scheint mir ihre Berechtigung zweifellos; denn was soll mich an der angegebenen Wahl hindern, da ja b ganz unbestimmt gelassen wird? Ich kann also auch der einen Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ eine Farbe, der anderen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ einen Laut zugeordnet denken; es wird aber wohl Niemandem in den Sinn kommen den Laut je nach Beschaffenheit der Reihen „kleiner" oder „grösser" als die Farbe

zu nennen; ganz gewiss aber würden durch eine solche Benennungsweise weder die Farbe, noch der Laut, also auch nicht die Dinge b, b^1 u. s. w. zu „Grössen", auch nicht in erweitertem Sinne. Vielleicht macht man den Einwand, dass man der Zahlreihe nicht ein beliebiges Ding, sondern eine „Grösse" zuordnen, letztere aber nicht als eigentliche Quantität, sondern als Grösse im weitesten Sinne nehmen müsse, etwa nach der Grassmann'schen Definition als ein Ding, welches einem andern gleich oder ungleich gesetzt werden soll. Bei dieser Definition werden aber die Begriffe gleich und ungleich entweder in ihrer ganz allgemeinen Bedeutung genommen, so dass auch Töne und Farben je unter sich gleich oder ungleich genannt werden, also „Grössen" sind; oder aber man fasst die Gleichheit und Ungleichheit in engerem Sinne, als eine quantitative, und dann liegt eine definitio per definiendum vor.

Beckum, 27. März 1889.

Sopra un teorema del sig. Netto

di

E. Bertini in Pavia.

(estratto di lettera al sig. M. Noether in Erlangen).

... Dal teorema contenuto nella mia lettera a Lei diretta (Questi Annali, t. XXXIV, pag. 447) si puó ricavare immediatamente un teorema dovuto al sig. Netto (Acta mathem. t. VII, pag. 101. — Cfr. anche t. VI, pag. 105). Infatti si indichino con $k^{(i)}$, $l^{(i)}$, $\alpha^{(i)}$ i numeri relativi ai punti comuni a due curve $f=0$, $\varphi=0$ (affatto distinte); cioé con $k^{(i)}$ la moltiplicità del punto comune per la prima curva, $l^{(i)}$ quella per la seconda e $\alpha^{(i)}$ il numero delle intersezioni assorbite. Si prenda dei numeri

$$\alpha^{(i)} - k^{(i)} l^{(i)} + k^{(i)} + l^{(i)} - 1 = \alpha^{(i)} - (k^{(i)}-1)(l^{(i)}-1)$$

il massimo e sia, per fissare le idee, $\alpha - (k-1)(l-1)$. Allora, se $F=0$ rappresenta una curva che passa (semplicemente o no) per i punti comuni alle due curve, segue subito dal teorema della mia lettera che esistono due funzioni A, B tali che si ha identicamente

$$F^{\alpha-(k-1)(l-1)} = Af + B\varphi; \tag{1}$$

che è il teorema del sig. Netto, colla differenza che *qui l'esponente della potenza di F è generalmente minore di quello indicato nel detto teorema* (l. c. pag. 104), che è il massimo dei numeri $\alpha^{(i)}$. Giacché, se dicasi α' questo massimo, si ha

$$\alpha' \geq \alpha \geq \alpha - (k-1)(l-1);$$

onde l'esponente è minore se $\alpha' > \alpha$, ovvero se $k>1$ ed $l>1$. Ad es^0, per due curve di 3^0 ordine aventi un punto doppio comune colle stesse tangenti l'esponente che qui si trova è 5, invece che 6. Per maggiore chiarezza si può aggiungere che, se l'identità del sig. Netto è

$$F^{\alpha'} = A_1 f + B_1 \varphi, \tag{2}$$

da questa e dalla (1) segue, posto $\omega = \alpha' - [\alpha-(k-1)(l-1)]$,

$$f(A_1 - AF^{\omega}) + \varphi(B_1 - BF^{\omega}) = 0, \tag{3}$$

donde, essendo f, φ funzioni prime fra loro,

$$A_1 - AF^{\omega} = \mathsf{H}\varphi,$$
$$B_1 - BF^{\omega} = \mathsf{K}f,$$

le quali, sostituite nella (3), dànno $\mathsf{H} + \mathsf{K} = 0$. Adunque la forma generale delle A_1, B_1 è

$$A_1 = AF^{\omega} + \mathsf{H}\varphi,$$
$$B_1 = BF^{\omega} - \mathsf{H}f;$$

e se ne conclude che *si passa dalla* (2) *alla* (1) *dividendo per* F^{ω} ...

Pavia, 18. Decembre 1889.

Paul du Bois-Reymond.

In Paul du Bois-Reymond betrauern wir einen Mann, der, wie er in der Wissenschaft durch seine Forschungen einen bleibenden Namen sich erworben, so auch in der Erinnerung der Freunde durch die scharfgeschnittenen Züge einer eigenartigen Persönlichkeit ein bleibendes Bild und eine fühlbare Lücke zurückgelassen hat.

Die glänzenden Gaben des Geistes, welche ihm die Natur verliehen hatte, wurden entfaltet und entwickelt unter dem befruchtenden Einfluss günstiger Umstände und eines reichen Lebens. Paul du Bois-Reymond wurde geboren am 2. Dezember 1831 in Berlin als Sohn des dort angesessenen Neuenburgers Felix Henri du Bois-Reymond, der als socialpolitischer Schriftsteller, als Sprachforscher und höherer Verwaltungsbeamter einen geachteten Namen und angesehene Stellung besass.

Die Mutter entstammte der französischen Colonie in Berlin und dem entsprechend war die Sprache des elterlichen Hauses und die Erziehung, die Paul mit seinem älteren Bruder Emil, dem berühmten Physiologen, gemeinsam hatte, vorwiegend französisch. Die Söhne sprachen mit dem Vater nie ein deutsches Wort. Mit Liebe hat Paul stets an den Erinnerungen des Vaterhauses gehangen und das Verhältniss unter den Geschwistern war ein sehr inniges.

An sein romanisches Blut, die Einflüsse des französischen Elementes in seiner Jugend, das sich mit einer gut deutschen Gesinnung wohl vertrug, mahnten manche Züge seines Wesens, die Lebhaftigkeit seines Temperamentes, die Vielseitigkeit und Gewandtheit seiner Conversation, die Fülle treffender Bilder, die er im mündlichen und schriftlichen Ausdruck einzuflechten liebte.

Seine Vorbildung erhielt Paul du Bois-Reymond auf dem französischen Gymnasium in Berlin, dem Collége in Neuchatel, und dem Gymnasium zu Naumburg. Sein Universitätsstudium, welches zunächst der Medicin galt, begann er in Zürich (1853). Schon damals hat er mit seinen Freunde Adolf Fick gemeinsam eine bedeutende Unter-

suchung über den blinden Fleck im menschlichen Auge angestellt und veröffentlicht.

Allein er blieb nicht bei der Medicin; seine Neigung für die Mathematik war unwiderstehlich. Sie trieb ihn nach Königsberg, wo damals Franz Neumann in der Blüthe seiner Thätigkeit stand und daneben Richelot das mathematische Studium mit der ihm eigenen Begeisterung und Hingabe leitete.

Hier wurde du Bois-Reymond zunächst auf die mathematische Physik geführt, wobei ihn seine ausgezeichnete Beobachtungsgabe, die auch den alltäglichsten Erscheinungen eine interessante und lehrreiche Seite abzugewinnen wusste, unterstützte. Und wenn er auch später der reinen Mathematik sich zuwandte, so wurden doch durch den Ausgangspunkt von der mathematischen Physik Richtung und Ziele seiner späteren Forschungen wesentlich bestimmt.

Im Jahre 1859 promovirte er in Berlin mit einer Dissertation „de aequilibrio fluidorum" nachdem bereits mehrere die Kapillaritätserscheinungen betreffende theils theoretische theils experimentelle Untersuchungen vorhergegangen waren.

Mehrere Jahre wirkte er nun als Oberlehrer der Mathematik und Physik am Friedrich-Werder'schen Gymnasium in Berlin, eifrig beschäftigt mit mathematischen Studien, denen als erste Frucht seine „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variablen" entsprang, ein bedeutendes Werk, das gewissermassen das Programm seiner späteren Forschungen enthält, und Zeugniss eines hervorragenden Talentes ist, welches fern von jedem Zwang einer mathematischen Schule und unbeirrt durch hergebrachte Meinungen seine eigenen Wege geht. Anknüpfend an die von Monge geschaffene Theorie der Charakteristiken, die er in hohem Masse fruchtbar zu machen weiss, geht der Verfasser in dieser Schrift weniger darauf aus, die Integration der partiellen Differentialgleichungen in einzelnen Fällen zu lehren, als vielmehr den Inhalt und die Bedeutung einer partiellen Differentialgleichung und ihrer Integrale geometrisch anschaulich synthetisch zu entwickeln.

Im Jahre 1865 siedelte P. du Bois-Reymond nach Heidelberg über, um sich der akademischen Laufbahn zu widmen. Es war damals noch die goldene Zeit der Naturwissenschaften an der Heidelberger Universität, wo der gefeierte Name Bunsens die Chemiker aus der ganzen Welt heranzog, wo die Entdeckung der Spectralanalyse durch Kirchhoff und Bunsen noch in frischer Erinnerung lebte, wo Helmholtz als Lehrer der Physiologie und als Forscher auf dem Gebiete der mathematischen Physik glänzte und Hesse durch seine analytische Geometrie Sinn für elegante Form in mathematischen Untersuchungen unter seinen Schülern weckte.

Hier trat Paul du Bois-Reymond in einen wissenschaftlich angeregten Kreis und war, da er selbst viel beizusteuern hatte, überall gern aufgenommen. In jener Zeit war es auch, wo der Schreiber dieser Zeilen mit ihm bekannt wurde, und wo sich eine Freundschaft anknüpfte, die auch nach der räumlichen Trennung Stand hielt, bis der Tod sie löste.

Paul du Bois-Reymond war eine durchaus ursprüngliche Natur, die sich nicht zu verstellen, nicht zurückzuhalten wusste, sich immer gab, wie sie war und empfand. Während ihm nichts ferner lag, nichts unsympathischer war, als einem Modeinteresse nachzugehen, hatte er ein warmes Gemüth für die Natur, er liebte die Musik und liess selten eine Gelegenheit ungenutzt vorübergehen, eine Mozart'sche Oper oder eine Beethoven'sche Symphonie mit anzuhören. In den seinem Fache verwandten Wissenschaften hatte er ein eindringendes Verständniss und ein scharfes und treffendes Urtheil über Werth oder Unwerth einer neuen Erscheinung.

Im Mittelpunkt seiner Interessen stand aber immer und jederzeit seine eigene Wissenschaft die Mathematik, und keine Unterhaltung war ihm willkommener als ein Gespräch mit einem Fachgenossen über die ihn bewegenden wissenschaftlichen Fragen. Er war ein stets aufgelegter fröhlicher Geselle beim Glase oder bei Ausflügen, die er sehr liebte und durch seine treffenden Beobachtungen und seinen guten Humor zu beleben wusste; er konnte aber auch rücksichtslos scharf und verletzend sein, wo er sich gekränkt glaubte oder wo er auf Anschauungen stiess, die ihm verwerflich erschienen. Solche Anlässe boten sich mannigfach in den aufgeregten Tagen des Jahres 1866, wo er mit seinem ganzen Herzen auf der Seite Preussens stand.

Im Verkehr mit seinen Zuhörern, deren er schon als Privatdocent einen ansehnlichen Kreis um sich versammelte, denen er auch ausser der Zeit der Vorlesungen manche Stunde widmete, wirkte er sehr anregend, wie die zahlreichen aus seiner Schule hervorgegangenen grösseren und kleineren Publicationen beweisen, und mancher seiner Schüler hat sich bereits einen geachteten Namen als Lehrer an einer Hochschule und als wissenschaftlicher Forscher erworben.

Die ersten Arbeiten, die du Bois-Reymond in seiner Heidelberger Zeit veröffentlichte, bezogen sich noch auf die partiellen Differentialgleichungen. Bald jedoch führten ihn diese Studien auf die genauere Untersuchung des wichtigsten Hilfsmittels bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen, der Fourier'schen Reihen und Integrale und der verwandten Sätze, die er unter dem Namen der „Darstellungsformeln" zusammengefasst hat. Dieser Gegenstand hat seine Arbeitskraft am längsten beschäftigt, und dieser Zweig der Analysis verdankt ihm wesentliche Fortschritte.

Die Theorie der Fourier'schen Reihen war durch die berühmte Dirichlet'sche Untersuchung (im 4ten Band des Crelle'schen Journals) zwar für eine grosse Classe von Functionen vollendet, sie forderte aber nach zwei Seiten hin eine Weiterführung und Verallgemeinerung; einmal handelte es sich um die Frage, wie man andere allgemeinere Functionen als die trigonometrischen zu analogen Darstellungen benutzen könnte, andererseits darum, wie der Kreis der Functionen abzugrenzen sei, welche eine solche Entwicklung zulassen. Dirichlet hatte bei seiner Untersuchung solche Functionen ausgeschlossen, welche unendlich viele Maxima und Minima haben, war aber, wie es scheint, des Glaubens, dass auch auf diese Functionen und besonders auf alle stetigen Functionen die Fourier'schen Entwicklungen anwendbar seien. Arbeiten von Lipschitz und Riemann hatten die Untersuchung von Dirichlet zwar weitergeführt und manches Neue hinzugefügt; aber der Beweis für die Entwickelbarkeit aller stetigen Functionen stand immer noch aus als du Bois-Reymond den Gegenstand aufnahm. Nachdem alle Versuche, einen strengen Beweis zu finden, fehlgeschlagen waren, gelangt er erst zu dem Zweifel an der Richtigkeit und endlich zum Beweis der Unrichtigkeit, indem er eine zwar stetige aber mit unendlich vielen Maximis und Minimis behaftete Function bildet und discutirt, für welche er die Divergenz der Fourier'schen Entwicklung nachweisen kann.

So ist also diese Frage zu einem dem erwarteten und gesuchten ganz entgegengesetzten Abschluss gebracht und wenn auch damit das letzte Ziel, nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Function zu finden, welches du Bois-Reymond überhaupt für unerreichbar hielt, nicht gewonnen ist, so ist doch zum erstenmal, wenn der Ausdruck gestattet ist, eine obere Grenze für den Bereich der entwickelbaren Functionen gegeben.

Die Resultate dieser Untersuchungen über die Fourier'schen Darstellungsformeln sind in mehreren Abhandlungen, die theils im Crelle'schen Journal, theils in diesen Annalen und in anderen Zeitschriften erschienen sind, am Ausführlichsten und im Zusammenhang in einer in den Schriften der Münchner Akademie vom Jahre 1876 abgedruckten Abhandlung dargestellt.

Das wichtigste Hilfsmittel dieser Untersuchungen war ihm der Mittelwerthsatz für bestimmte Integrale, in dessen Besitz er schon frühzeitig war, der, wenn er auch von Weierstrass bereits gekannt und in Vorlesungen erwähnt war, doch von du Bois-Reymond selbständig gefunden und zuerst in voller Allgemeinheit bewiesen wurde, und daher mit Recht unter dem Namen des du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes bekannt ist, ein Satz der bei der Untersuchung bestimmter Integrale, namentlich wenn es sich um die Frage nach der Umkehrbarkeit vielfacher Integrale handelt, von grösstem Nutzen ist.

Durch diese Untersuchungen wurde du Bois-Reymond mehr und mehr auf die fundamentalen Fragen der reellen Functionentheorie geführt, wobei ihm seine Beziehungen zu Weierstrass, die er sehr hoch schätzte und durch häufige Besuche in Berlin zu pflegen suchte, sehr förderlich waren. In den sechziger Jahren wurde, angeregt durch Riemann und Weierstrass, die Differentiirbarkeit und die Möglichkeit stetiger Functionen ohne Differentialquotienten lebhaft unter den Mathematikern erörtert. Du Bois-Reymond gehörte zu denjenigen, welche lange an der Existenz solcher Functionen zweifelten; seine Arbeitsrichtung wies ihn aber mit Nothwendigkeit auf eine Entscheidung dieser Frage hin, und das von ihm selbst veröffentlichte Beispiel, auf welches ihn Weierstrass hingewiesen hatte (Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen, (Journal f. Mathem. Bd. 79) musste schliesslich den hartnäckigsten Zweifler überzeugen, wenn er sich nur die Mühe nahm, dem einfachen Beweise Schritt für Schritt zu folgen.

Jahrelang trug sich du Bois-Reymond, wie er selbst in einer im Jahre 1878 an die Fachgenossen versandten Ankündigung berichtet, mit dem Gedanken, die Ergebnisse seiner Forschungen systematisch darzustellen, ausgehend von einer philosophischen Erörterung der Grundbegriffe der Zahl, der Stetigkeit und der Grenze. Der im Jahre 1882 erschienene erste Theil der „allgemeinen Functionentheorie“, „Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Function“ war das erste Ergebniss dieser mühevollen Bestrebungen. Dem ersten Theil, der auch in's Französische übersetzt wurde, ist ein zweiter Theil nicht mehr gefolgt. In diesem Werk wendet er sich gegen die rein formale Auffassung des Zahlbegriffs; nur unter der Voraussetzung eines gezählten oder gemessenen Objectes hat ihm die Zahl eine Bedeutung, und so kommt er zu dem Schluss, dass zwei grundverschiedene Auffassungen möglich und berechtigt sind, die er die idealistische und die empiristische nennt, deren jede in ihrer Weise zum Ziele kommt. Die Darstellung dieser entgegengesetzten Standpunkte kleidet er in die belebende Form einer Controverse zwischen dem Idealisten und Empiristen, von denen der erste seinen Grundsatz, den Glauben an die wirkliche Existenz des unendlich Grossen und unendlich Kleinen, der andere seinen entgegengesetzten Standpunkt und seinen Widerspruch gegen die Annahme genauer Maasse begründet. Zu einem Austrag wird der Streit nicht gebracht, sondern beide Systeme gehen neben einander her und bestehen mit einander. Es ist aber hier nicht der Ort und in der Kürze nicht möglich, auf das Einzelne dieser originellen Betrachtungs- und Darstellungsweise und das Für und Wider einzugehen.

In der letzten Zeit seines Lebens hat du Bois-Reymond diesen

Speculationen, bei denen, wie er oft aussprach, die Ergebnisse in allzu ungünstigem Verhältnisse zu der aufgewandten Zeit und Arbeit stehen, sich abgewandt und ist, getreu seinen ersten Interessen, zu den Arbeiten seiner jüngeren Jahre, den partiellen Differentialgleichungen, zurückgekehrt. Die letzte kurz vor seinem Tode im Journal für Mathematik erschienene Arbeit „Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ knüpft unmittelbar an sein erstes grösseres Werk, die „Beiträge“ an und sollte der Ausgangspunkt für eine Reihe von weiteren Forschungen sein, von denen wir uns noch manchen Aufschluss hätten versprechen dürfen.

Ueber die Lebensschicksale du Bois-Reymonds ist wenig noch nachzutragen. Im Jahre 1870 wurde er als ordentlicher Professor an die Universität Freiburg berufen, wo er bis 1874 wirkte. In diesem Jahre folgte er einem Rufe nach Tübingen als Nachfolger H. Hankel's. Hier hat er sich verheirathet und mehrere Jahre einer erfolgreichen Lehrthätigkeit verlebt. Die engen Verhältnisse einer kleinen Universität waren aber seinem Wesen nicht angemessen; die Liebe zu seiner Geburtsstadt Berlin hat ihn nie verlassen, und so war es ihm die Erfüllung eines Herzenswunsches, als er 1884 als Professor der Mathematik an die Berliner technische Hochschule berufen wurde, welche gerade damals ihren neuen Palast in Charlottenburg bezog. Lange durfte er sich der neuen Thätigkeit nicht erfreuen. Am 7. April 1889 ist er auf der Durchreise nach Neuchatel in Freiburg einem Nierenleiden erlegen, unter dem er die letzten Jahre seines Lebens schwer zu leiden hatte.

Es konnte nicht die Absicht dieser Blätter sein, eine auch nur einigermassen erschöpfende Darstellung der wissenschaftlichen Arbeiten und Leistungen des Verstorbenen zu geben. Nur Einzelnes haben wir hervorgehoben, was für seine Richtung und seinen wissenschaftlichen Standpunkt uns bezeichnend zu sein schien. Unsere Aufgabe war, dem Leser ein Bild des Lebens und Schaffens eines Mannes vorzuführen, dessen höchstes Streben die Wissenschaft war, deren Zielen er mit rastlosem Eifer nachtrachtete, bis der Tod ihm die Feder aus der Hand nahm.

Marburg, im December 1889.

H. Weber.

P. du Bois-Reymond's literarische Publicationen*).

Abhandlungen naturwissenschaftlichen Inhalts.

Ueber die unempfindliche Stelle der Netzhaut im menschlichen Auge. Zusammen mit Prosector A. Fick in Zürich.

[*Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medicin* (*J. Müller, Berlin*), *Jahrgang* 1853. *S.* 396—407.]

Ueber die vom Dasein des sogenannten blinden (Mariotte'schen) Fleck's im Auge abhängigen Erscheinungen. Zusammen mit Prof. A. Volckmann in Halle und Prosector A. Fick in Zürich.

[*Centralblatt für Naturwissenschaften und Anthropologie* (*G. T. Fechner; Leipzig*), *Band* 1. 1854. *S.* 57—72.]

Zur Kritik der Blutanalysen.

[*Zeitschrift für rationelle Medicin* (*Henle und Pfeufer*), *Jahrgang* 1854. *S.* 44—51.]

Zweiter Beitrag zur Kritik der Blutanalyse.

[*Ebenda Jahrgang* 1854. *S.* 101—108.]

Untersuchungen über die Flüssigkeiten, über deren innere Strömungserscheinungen, über die Erscheinungen des stillstehenden Tropfens, der Ausbreitung und Vertreibung. (Vorgetragen in der physikalischen Gesellschaft zu Berlin, 2. Juni 1854.)

[*Berlin* 1854. *P. Jeanrenaud.*]

Experimentaluntersuchung über die Erscheinungen, welche die Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten hervorruft.

[*Annalen der Physik und Chemie. Bd.* 104. *S.* 193—234. 1858.]

Ueber den Antheil der Capillarität an den Erscheinungen der Ausbreitung der Flüssigkeiten.

[*Ebenda Bd.* 134. *S.* 262—275. *November* 1869.]

---

*) Für die Vervollständigung des nachfolgenden Verzeichnisses ist die Redaction Herrn Emil du Bois-Reymond in Berlin für gütige Mittheilungen zu besonderem Danke verpflichtet.

W. Dyck.

Mathematische Abhandlungen.

De aequilibrio fluidorum. Inaugural-Dissertation. Berlin, 29. März 1859. [*Gebr. Unger.*]

Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. 1. Heft: Die Theorie der Charakteristiken. [*Leipzig. A. Barth.* 1864.]

Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen. Antrittsprogramm zur Uebernahme der ordentlichen Professur a. d. Universität Freiburg. [*Berlin. Schade's Buchdr.* 1870.]

Abhandlungen im „Journal für die reine und angewandte Mathematik":

Hauptlehrsätze der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.
[*Bd.* 64. *S.* 271—283. 1865.]

Notiz über zwei Systeme von partiellen Differentialgleichungen.
[*Bd.* 68. *S.* 180—184. *August* 1867.]

Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen, zu welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört.
[*Bd.* 69. *S.* 65—108. *Februar* 1868.]

Bemerkungen über die verschiedenen Werthe, welche eine Function zweier reellen Variabeln erhält, wenn man diese Variabeln entweder nach einander oder gewissen Beziehungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt.
[*Bd.* 70. *S.* 10—45. *Januar* 1868.]

Ueber die Integration linearer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht.
[*Bd.* 70. *S.* 299—313. *Juni* 1868.]

Ueber Auflösung von Gleichungen und Summation von Reihen durch bestimmte Integrale.
[*Bd.* 74. *S.* 281—293. *October* 1871.]

Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées.
[*Bd.* 74. *S.* 294—304. *October* 1871.]

Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern. Hierbei als Anhang: Ueber die Tragweite der logarithmischen Kriterien.
[*Bd.* 76. *S.* 61—91. 1872.]

Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen.
[*Bd.* 79. *S.* 21—37. *März* 1872.]

Allgemeine Lehrsätze über den Gültigkeitsbereich der Integralformeln, die zur Darstellung willkürlicher Functionen dienen.
[*Bd.* 79. *S.* 38—66. *April* 1874.].

Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Functionen.
[*Bd.* 79. *S.* 259—262. *October* 1874.]

Ueber das Doppelintegral.
[*Bd.* 94. *S.* 273—290. *October* 1882].

Ueber den Convergenzgrad der variabeln Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente.
[*Bd.* 100. *S.* 331—358. *Mai* 1886]

Bemerkungen über $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
[*Bd.* 103. *S.* 204—229. *October* 1887.]

Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
[*Bd.* 104. *S.* 241—301. *December* 1888].
Als Fortsetzung der als selbständiges Werk (cf. supra) erschienenen „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen."

Abhandlungen in den „Mathematischen Annalen":

Notiz über einen Cauchy'schen Satz, die Stetigkeit von Summen unendlicher Reihen betreffend.
[*Bd.* 4. *S.* 135—137. 1871.]

Die Theorie der Fourier'schen Integrale und Formeln.
[*Bd.* 4. *S.* 362—390. *Juni* 1871.]

Summation der Reihe mit dem Gliede $\frac{p \sin pu}{h^2 + p^2}$.
[*Bd.* 5. *S.* 399—400. *April* 1872.]

Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen.
[*Bd.* 7. *S.* 241—261. *September* 1873.]

Ueber eine neue Bedingung für den gewöhnlichen Mittelwerthsatz.
[*Bd.* 7. *S.* 605—606. *April* 1874.]

Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen.
[*Bd.* 8. *S.* 363—414. *Mai* 1874.]

Nachtrag zur vorstehenden Abhandlung.
[*Bd.* 8. *S.* 574—576. *Februar* 1875.]

Zusätze zur Abhandlung: „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln." (Abh. der k. bayr. Academie d. W. II. Cl. XII. Bd. II. Abth.).
[*Bd.* 10. *S.* 431—445. *Mai* 1876.]

Notiz über infinitäre Gleichheiten.
[*Bd.* 10. *S.* 576—578. *Mai* 1876.]

Zwei Sätze über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen.
[*Bd.* 11. *S.* 145—148. *Mai* 1876.]

Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls.
[*Bd.* 11. *S.* 149—167. 1876.]

Note über die Integration totaler Differentialgleichungen.
[*Bd.* 12. *S.* 123—131. *Februar* 1877.]

Notiz über Convergenz von Integralen mit nicht verschwindendem Argument.
[*Bd.* 13. *S.* 251—254. *December* 1877.]

Ueber Integration und Differentiation infinitärer Relationen.
[*Bd.* 14. *S.* 498—506. *October* 1878.]

Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung.
[*Bd.* 15. *S.* 283—314. *März* 1879.]

Fortsetzung der Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung.
[*Bd.* 15. *S.* 564—576. *September* 1879.]

Ein allgemeiner Satz der Integrirbarkeitslehre.
[*Bd.* 16. *S.* 112. *October* 1879.]

Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

[*Bd.* 16. S. 115—128. 1879.]

Ueber den Satz: $\lim f'(x) = \lim \frac{f(x)}{x}$.
[*Bd.* 16. *S.* 550. *December* 1879.]

Ueber Darstellungsfunctionen.
[*Bd.* 18. *S.* 593—603. *April* 1881.]

Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen.
[*Bd.* 20. *S.* 122—124. *December* 1881.]

Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung. (Abgedruckt aus den Berichten der kgl. bayr. Acad. d. Wiss. vom 6. Nov. 1876. conf. infra.)

[*Bd.* 21. *S.* 109—117. *October* 1876.]

Zusatz zu dem Aufsatze: „Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung."

[*Bd.* 21. *S.* 253—254. 1882.]

Ueber den Despeyrous'schen Multiplicator der elliptischen Differentialgleichung.

[*Bd.* 21. *S.* 255—266. *August* 1882.]

Ueber die Integration der trigonometrischen Reihe.

[*Bd.* 22. *S.* 260—268. *März* 1883.]

In den Abhandlungen und Sitzungsberichten der math. phys. Classe der k. bayerischen Academie der Wissenschaften:

Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

die Werthe

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha), \qquad a_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha) \cos p\alpha,$$

$$b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha) \sin p\alpha$$

haben, jedesmal wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind. Mit einem Anhang: Ueber den Fundamentalsatz der Integralrechnung.

[*Abhandlungen Bd.* XII. 1. *Abth.* 1874. *S.* 117—166.]

Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungs-Formeln. Voran geht [*S.* I—XXIV] eine allgemeine Einleitung: „Ueber den gegenwärtigen Stand der Convergenzfrage der Fourier'schen Darstellungsformeln" und „Eingehender Bericht über die folgende Untersuchung."

[*Abhandlungen Bd.* XII. 2. *Abth.* 1876. *S.* 1—104.]

Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwickelung.

[*Sitzungsberichte Jahrgang* 1876. *S.* 225—237.]

Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen.

[*Sitzungsberichte Jahrgang* 1882. *S.* 240—242.]

In den „Comptes rendus de l'academie des sciences" Paris:

Sur les formules de répresentation des fonctions.
[*Bd.* 92. *S.* 915—918; *S.* 962—964. *April* 1881.]

Remarques au sujet d'une Note de M. Hugoniot, sur le développement des fonctions en séries d'autres fonctions.
[*Bd.* 96. *S.* 61—62. *Januar* 1883.]

Sur les caractères de convergence et de divergence des séries à termes positifs.
[*Bd.* 107. *S.* 941—946. *December* 1888.]

In anderen Zeitschriften:

Sur la grandeur relative des infinis des fonctions.
[*Annali di matematica, Serie* 2. *Bd.* 4. *S.* 338—353. 1871.]

Ueber die Fourier'schen Reihen.
[*Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang* 1873. *S.* 571—584.]

Détermination de la valeur-limite d'une intégrale qui se présente dans la théorie des séries trigonométriques.
[*Bulletin des Sciences mathématiques et Astronomique. Serie* II. *Bd.* 3. *S.* 343—352. 1879.]

Ueber ein in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen auftretendes vollständiges Differential.
[*Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen* (*O. Böklen; Tübingen*). *Bd.* 1. *S.* 34—43. 1884.]

Ueber den Begriff der Länge einer Curve. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Ludwig Scheeffer über Rectification der Curven.
[*Acta mathematica Bd.* 6. *S.* 167—168. 1885.]

Referate zu

Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes von Dr. O. Hesse.
[*Litteraturzeitung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd.* XV. *S.* 1—10. 1869.]

Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale von I. Thomae.
[*Ebenda, Bd.* XX. *S.* 121—129. 1875.]

Selbstreferat zu der Abhandlung (im 15. Bd. der mathematischen Annalen) „Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung".
[*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd.* 12. *Jahrgang* 1880. *S.* 299—302.]

Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen. Eine Entgegnung.
[*Tübingen. Laupp.* 1880.]

Kleinere Aufsätze.

Ueber die Zweckmässigkeit der Errichtung besonderer naturwissenschaftlicher Facultäten.
[*Alma mater Nr.* 10 *u.* 12 *vom* 7. *u.* 21. *December* 1876.]

Vorwort zur zweiten Auflage von „Hankel, die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten".
[*Tübingen. Laupp.* 1884.]

Ueber die Unbegreiflichkeit der Fernkraft*). (Vortrag, gehalten in der physicalischen Gesellschaft zu Berlin am 3. Februar 1888).
[*Naturwissenschaftliche Rundschau* III. *Jahrgang. Nr.* 14.]

Die allgemeine Functionentheorie. I. Theil. Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Function.
[*Tübingen. Laupp.* 1882.]

In französischer Uebersetzung (unter Mitwirkung und mit Zusätzen des Autors erschienen) unter dem Titel: „Théorie géné1ale des fonctions etc." traduit par G. Milhaud et A. Girot.
[*Paris. Gauthier Villars.* 1887.]

*) Die zu Anfang dieses Aufsatzes erwähnte Schrift „Ueber die Grundlagen der Erkenntniss in den exacten Wissenschaften" hat sich, wie mir Herr J. Weingarten mittheilt, im Nachlass du Bois-Reymond's vorgefunden und soll in Kurzem veröffentlicht werden.

Dk.

Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Im Folgenden wird ein Integral $\int f(u)\,du$ betrachtet, dessen Integrationscurve aus einem Doppelumlauf um zwei Verzweigungspunkte p und q der zu integrirenden Function $f(u)$ besteht. Die Punkte p und q werden abwechselnd umkreist, und zwar ein jeder zuerst im positiven, dann im negativen Sinne. Man setzt voraus, dass wenn die Variable u einen positiven Umlauf um den Punkt p, bezw. um den Punkt q ausführt, die Function $f(u)$ den Factor $e^{2\pi i\sigma}$, bezw. den Factor $e^{2\pi i\tau}$ aufnimmt, im Uebrigen aber unverändert bleibt. Von den Constanten σ und τ soll keine ganzzahlig oder gleich Null sein. Die Function $f(u)$ kann hiernach als ein Product

(1) $$f(u) = (u-p)^{\sigma-1}\,(u-q)^{\tau-1}\,\varphi(u)$$

geschrieben werden, in welchem $\varphi(u)$ eine in der Umgebung der Punkte $u=p$ und $u=q$ eindeutige Function von u bezeichnet.

Ein aus einem geschlossenen Curvenzug bestehender Integrationsweg irgend eines Integrals lässt sich bekanntlich, falls der Endwerth der zu integrirenden (mehrdeutigen) Function mit ihrem Anfangswerthe identisch ist, auf die Verbindungslinien der eingeschlossenen singulären Punkte und auf kleine, die letzteren umgebenden Kreise zusammenziehen. Eine solche Vereinfachung der Integrationscurve gilt auch für das hier behandelte Integral. Denn da die Variable u um jeden der Punkte p, q einen positiven und einen negativen Umlauf macht, so ist der schliessliche Werth der Function $f(u)$ gleich dem ursprünglichen Werthe derselben. Als untere Integralgrenze (Ausgangspunkt und gleichzeitig Endpunkt des Integrationsweges) kann ein beliebiger Punkt, der nicht singulär für $f(u)$ ist, genommen werden; die Wahl desselben hat auf den Werth des Integrals keinen Einfluss.

Das betrachtete Integral, welches niemals illusorisch wird, ist, falls $\int_p^q f(u)\,du$ einen bestimmten Sinn hat, mit dem Producte

$$(e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{2\pi i\tau}-1)\int_p^q f(u)\,du$$

identisch. Genügt also das Integral $\int_p^q f(u)\,du$, wenn es convergent ist, einer linearen homogenen Differentialgleichung, in welcher σ und τ als Constante vorkommen (während eine der Grössen p, q, resp. ein in $\varphi(u)$ enthaltener Parameter die unabhängige Variable der Differentialgleichung darstellt), so liefert das hier definirte Integral mit Doppelumlauf einen Ersatz für das particuläre Integral $\int_p^q f(u)\,du$ in denjenigen Fällen, wo das letztere, wegen der Art der in $u=p$ oder $u=q$ eintretenden Unstetigkeit von $f(u)$, keinen bestimmten Sinn mehr behält. Es wird hierdurch möglich, eine Unvollkommenheit zu beseitigen, welche fast allen derartigen Auflösungen linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale bisher anzuhaften pflegte*). Denn die Beschränkungen, denen die in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten unterworfen werden müssen, um die Convergenz der Integrale von der Form $\int_p^q f(u)\,du$ zu sichern, fallen fort, wenn statt dieser die entsprechenden Integrale mit Doppelumlauf eingeführt werden.

In der Gleichung (1) werden p und q als endliche Werthe vorausgesetzt. Jedoch lässt sich die Betrachtung nach bekannter Methode durch Benutzung einer linearen Substitution auf den Fall eines unendlichen singulären Werthes ausdehnen. Im nachstehenden § 2 definirt man $F(u)$ als das Product

$$F(u)=(u-p)^{\sigma-1}\varphi(u), \tag{2}$$

wo unter $\varphi(u)$ eine bei $u=p$ eindeutige Function verstanden wird. Die Anzahl der singulären Punkte von $F(u)$ (abgesehen vom unendlichen Horizonte) wird als eine endliche und bestimmte vorausgesetzt; bei einem Umlauf der Variable u um sämmtliche im Endlichen liegende singuläre Punkte möge $F(u)$ nur einen constanten Factor aufnehmen. Indem man, von irgend einem Punkte der u-Ebene aus, einerseits eine geschlossene Curve um den Punkt p, andererseits eine geschlossene Curve um alle endlichen singulären Punkte der Function $F(u)$ (oder auch, was dasselbe leistet, um alle endlichen singulären Punkte ausser p) construirt, zeigt man, dass das Integral $\int F(u)\,du$, in welchem die Variable u abwechselnd die beiden Curven, einmal in positiver

---

*) Man vergleiche die Bemerkung Riemann's am Schluss des § 7 seiner Abhandlung „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ darstellbaren Functionen", Ges. Werke, pag. 77.

und einmal in negativer Drehungsrichtung, durchläuft, analoge Eigenschaften wie das in § 1 behandelte Integral $\int f(u)\, du$ besitzt. Dasselbe bildet bei der Auflösung linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale einen Ersatz für das Integral $\int_p^\infty F(u)\, du$, falls letzteres aufhört, einen bestimmten Sinn zu haben.

Im § 3 wird, um ein Beispiel für die Anwendung der erhaltenen Resultate zu geben, die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe behandelt. Die genannte Gleichung lässt sich allgemein durch bestimmte Integrale lösen, weil in den Fällen, wo die sonst üblichen bestimmten Integrale divergent werden, die hier definirten Integrale mit Doppelumlauf an ihre Stelle treten.

---

§ 1.

Ein Integral, dessen Integrationsweg aus einer geschlossenen Curve besteht, soll im Folgenden (gemäss einer bereits üblichen Bezeichnung) durch einen horizontalen Strich, welcher über dem Integralzeichen angebracht wird, von anderen Integralen unterschieden werden. Der Ausgangs- und Endpunkt der Integrationscurve wird als untere Integralgrenze angegeben. Ferner sollen an der Stelle, die sonst von der oberen Integralgrenze eingenommen wird, in Parenthese diejenigen singulären Punkte der zu integrirenden Function genannt werden, welche im Innern der Integrationscurve liegen; dieselben werden durch Kommata von einander getrennt. Man setzt hinter einen solchen singulären Punkt ein Minuszeichen, falls er von der Integrationscurve in negativer Drehungsrichtung umkreist wird, während man im Fall eines positiven Umlaufs nichts hinzufügt. Die singulären Punkte werden hierbei in der Reihenfolge angeführt, wie sie von der Variable des Integrals umkreist werden; ein mehrfach umkreister singulärer Punkt wird mehrfach angeführt.

Integrirt man also die in (1) angegebene mehrdeutige Function $f(u)$ längs einer geschlossenen, von einem Punkte c ausgehenden Curve, welche zunächst in positiver Drehungsrichtung den Punkt q und den Punkt p, hierauf in negativer Drehungsrichtung wiederum zuerst q, dann p umkreist, so entsteht ein Integral, das ω genannt werden soll, und das nach der soeben definirten Bezeichnung

$$(3) \qquad \omega = \overline{\int_c^{(q,p,q-,p-)}} f(u)\, du$$

geschrieben wird.

Das Integral (3) bildet den Gegenstand der Untersuchungen dieses Paragraphen. Der Beweis, dass dasselbe die in der Einleitung erwähnten Eigenschaften besitzt, ergiebt sich aus der Betrachtung der Theilintegrale, in die es sich zerlegen lässt. Bei dem Integrale (3) wird vorausgesetzt, dass die für die positiven Umläufe um q und p gewählten Wege auch für die negativen Umläufe (in umgekehrter Richtung) zur Anwendung kommen.

In der u-Ebene werde um den Punkt $u = p$ als Mittelpunkt ein kleiner Kreis mit dem Radius k, um den Punkt $u = q$ ein solcher mit dem Radius l gelegt. Einen beliebigen Punkt $u = \mathfrak{p}$ des ersteren Kreises verbindet man mit irgend einem Punkte $u = \mathfrak{q}$ des zweiten durch eine Linie $\mathfrak{N}$, die sich selbst nicht schneidet und in keine der Kreisflächen eintritt. Weder auf $\mathfrak{N}$ noch auf den Kreisflächen, abgesehen von den Mittelpunkten, soll ein singulärer Punkt der Function $f(u)$ (d. h. ein Punkt, in welchem $f(u)$ sich verzweigt oder unendlich oder unbestimmt wird) liegen; im Uebrigen können sowohl die Curve $\mathfrak{N}$ als die Radien k, l willkürlich gewählt werden. Man nimmt nun einen beliebigen Punkt c der Curve $\mathfrak{N}$ zum Ausgangspunkt und Endpunkt von vier geschlossenen Integrationswegen, die man nach einander für das Integral der Function $f(u)$ anwendet, und die aus Abschnitten der Curve $\mathfrak{N}$ und je einem der obigen Kreise gebildet werden. Es seien $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ zwei Punkte des Kreises um p, welche so liegen, dass wenn der Kreis vom Punkte $\mathfrak{p}$ aus im positiven Sinne durchlaufen wird, man zu dem Punkte $\mathfrak{p}'$ vor dem Punkte $\mathfrak{p}''$ gelangt. Die entsprechende Lage mögen $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ als Punkte des zweiten Kreises haben, so dass durch $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{q}$ die positiven Umläufe

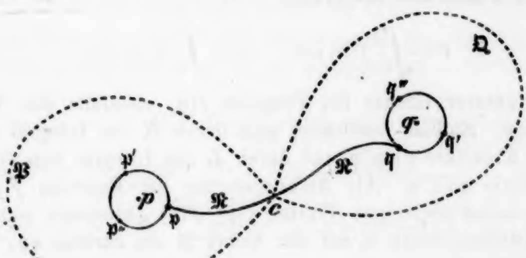

Fig. 1.

um p und q, durch $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''\mathfrak{p}'\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{q}''\mathfrak{q}'\mathfrak{q}$ die negativen bezeichnet werden (Fig. 1).

Man nenne ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die vier Integrale der Function $f(u)$, deren respective Integrationswege durch

$$c\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{q}c, \quad c\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''c, \quad c\mathfrak{q}\mathfrak{q}''\mathfrak{q}'\mathfrak{q}c, \quad c\mathfrak{p}\mathfrak{p}''\mathfrak{p}'\mathfrak{p}c$$

angegeben werden. Nach der oben erwähnten abgekürzten Bezeichnung hat man für ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die Ausdrücke

$$(4)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \int_c^{\overline{(q)}} f(u)\,du, & \omega_2 = \int_c^{\overline{(p)}} f(u)\,du, \\ \omega_3 = \int_c^{\overline{(q-)}} f(u)\,du, & \omega_4 = \int_c^{\overline{(p-)}} f(u)\,du. \end{cases}$$

An der unteren Grenze des Integrals ω_1 wählt man als Anfangswerth der zu integrirenden Function irgend einen der zu $u = c$ gehörigen Werthe von $f(u)$. Dieser specielle Werth $f(c)$ möge f_0 heissen. Für $\nu > 1$ wird bestimmt, dass der Anfangswerth von $f(u)$ im Integral ω_ν mit dem Endwerth dieser Function in $\omega_{\nu-1}$ übereinstimme.

Es werde nun auch dasjenige Integral der Function $f(u)$ betrachtet, dessen Integrationscurve sich aus den Wegen der vier Integrale ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, in dieser Reihenfolge genommen, zusammensetzt. Dasselbe ist gleich dem in (3) angeführten Integral; man bezeichnet es, wie in (3), durch ω, nachdem man festgesetzt hat, dass an seiner unteren Grenze die Grösse f_0 als Anfangswerth von $f(u)$ zur Anwendung kommen soll. Es besteht dann die Gleichung

$$(5)\qquad \omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4.$$

Bei ω ist der Werth von $f(u)$ auch im Endpunkte des Integrationsweges gleich f_0, da jeder der Punkte p, q im positiven und im negativen Sinne umkreist wird.

Es seien ferner P und Q die längs der Abschnitte $c\mathfrak{p}$ und $c\mathfrak{q}$ der Curve $\mathfrak{R}$ genommenen Integrale

$$(6)\qquad P = \int_c^{\mathfrak{p}} f(u)\,du, \qquad Q = \int_c^{\mathfrak{q}} f(u)\,du,$$

an deren unterer Grenze die Function $f(u)$ ebenfalls den Werth f_0 haben möge. Endlich bezeichnet man durch K das Integral von $f(u)$ längs der Kreislinie $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\mathfrak{p}$ und durch L das Integral von $f(u)$ längs der Kreislinie $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{q}$. Als Anfangswerthe der Function $f(u)$ in K und in L sollen diejenigen Werthe $f(\mathfrak{p})$, $f(\mathfrak{q})$ genommen werden, die aus f_0 entstehen, wenn u auf der Curve $\mathfrak{R}$ die Strecke $c\mathfrak{p}$, resp. $c\mathfrak{q}$ zurücklegt.

Da die Function $f(u)$ nach der Voraussetzung den Factor $e^{2\pi i \tau}$ aufnimmt, wenn u den Punkt q im positiven Sinne umkreist, so führt die Zerlegung des Integrationsweges von ω_1 in die Strecken $c\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}c$ zu der Gleichung

$$\omega_1 = (1 - e^{2\pi i \tau})\,Q + L.$$

In ω_2 ist der Anfangswerth der Function $f(u)$ gleich $e^{2\pi i \tau} f_0$, der

Endwerth derselben (nach (1)) gleich $e^{2\pi i(\sigma+\tau)} f_0$. Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass als Anfangswerth von $f(u)$ in P der Werth f_0, in K der bei dem directen Uebergang von c nach $\mathfrak{p}$ aus f_0 entstehende Werth $f(\mathfrak{p})$ angenommen wird, erhält man für ω_2 den Ausdruck

$$\omega_2 = e^{2\pi i\tau}(1 - e^{2\pi i\sigma}) P + e^{2\pi i\tau} K.$$

Es besteht ferner zwischen den Integralen ω_1 und ω_3 die Gleichung

$$\omega_3 = - e^{2\pi i\sigma} \omega_1,$$

und zwischen ω_2 und ω_4 die Gleichung

$$\omega_4 = - e^{-2\pi i\tau} \omega_2.$$

Die Function $f(u)$ hat in ω_3 den Anfangswerth $e^{2\pi i(\sigma+\tau)} f_0$, den Endwerth $e^{2\pi i\sigma} f_0$. Man kehre den Integrationsweg des Integrals ω_3 um, indem man dasselbe gleichzeitig mit -1 multiplicirt; dann wird einerseits der Anfangswerth der Function $f(u)$ gleich $e^{2\pi i\sigma} f_0$, andererseits die Drehungsrichtung des Kreisintegrals die positive. Hieraus folgt, dass ω_3 gleich dem Product aus ω_1 und der Constante $- e^{2\pi i\sigma}$ ist. In ω_4 kommt $e^{2\pi i\sigma} f_0$ als Anfangswerth, f_0 als Endwerth von $f(u)$ vor. Durch Umkehrung des Integrationsweges findet man daher für ω_4 den Werth $- e^{-2\pi i\tau} \omega_2$. Die abgeleiteten Ausdrücke

$$\omega_1 + \omega_3 = [1 - e^{2\pi i\sigma}] [(1 - e^{2\pi i\tau}) Q + L],$$
$$\omega_2 + \omega_4 = [e^{2\pi i\tau} - 1] [(1 - e^{2\pi i\sigma}) P + K]$$

werden in die Gleichung (5) substituirt. Dann geht das Integral ω in die Summe

$$(e^{2\pi i\sigma} - 1)(e^{2\pi i\tau} - 1)(Q - P) + (e^{2\pi i\tau} - 1) K - (e^{2\pi i\sigma} - 1) L$$

über. Aber da sowohl in P als auch in Q die Function $f(u)$ an der unteren Grenze den Werth f_0 hat, so ist nach (6)

$$Q - P = \int_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} f(u)\, du.$$

Auf diese Weise erhält man für ω die Gleichung

$$(7) \qquad \int_c^{\overline{(\mathfrak{q}; \mathfrak{p}, \mathfrak{q}-, \mathfrak{p}-)}} f(u)\, du = \begin{cases} (e^{2\pi i\sigma} - 1)(e^{2\pi i\tau} - 1) \int_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} f(u)\, du \\ + (e^{2\pi i\tau} - 1) K - (e^{2\pi i\sigma} - 1) L. \end{cases}$$

Dieselbe zeigt, dass der Werth des links stehenden Integrals sich nicht ändert, wenn statt des Punktes c (der auf der rechten Seite nicht mehr vorkommt) ein beliebiger anderer Punkt der Linie $\mathfrak{N}$ zum Ausgangspunkt und Endpunkt des Integrationsweges gemacht wird.

Verbindet man ferner die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ durch irgend eine zweite Curve $\mathfrak{N}_1$, welche der Bedingung genügt, dass auf dem von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_1$

eingeschlossenen Flächenstücke kein singulärer Punkt der Function $f(u)$ liegt, so hat, nach einem bekannten Satze, das Integral $\int_p^q f(u)\,du$ bei Benutzung des Integrationsweges $\mathfrak{N}_1$ denselben Werth wie bei Benutzung des Integrationsweges $\mathfrak{N}$. Also bleibt die Ersetzung der Linie $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{N}_1$ ebenfalls ohne Einfluss auf den Werth von ω.

Es ergiebt sich hieraus, dass die untere Grenze des Integrals ω in jeden beliebigen Punkt, der nicht singulär für $f(u)$ ist, verlegt werden kann. Jedoch muss als Anfangswerth von $f(u)$ derjenige Werth genommen werden, der bei der stetigen Verschiebung der unteren Integralgrenze aus f_0 entsteht. Statt den Werth der Function $f(u)$ an der unteren Integralgrenze zu geben, kann man selbstverständlich auch jeden anderen Punkt des Integrationsweges benutzen, um einen bestimmten Zweig der zu integrirenden Function (durch Wahl eines speciellen Werthes derselben) zu fixiren.

Lässt man die Variable u den Integrationsweg des Integrals ω rückwärts durchlaufen, so geht ω, da jedes einzelne Integralelement das Vorzeichen wechselt, in $-\omega$ über. Durch die Aenderung der Richtung für das Fortschreiten von u werden gleichzeitig die positiven Umläufe in negative und die negativen in positive verwandelt. Man findet auf diese Weise für $-\omega$ einen zu (5) analogen Ausdruck als Summe von vier Theilintegralen; jedoch stellt der erste Summandus (der aus ω_4 entsteht) jetzt einen positiven Umlauf um den Punkt p dar, und bei den drei folgenden Summanden wird bezw. q im positiven, p im negativen und q im negativen Sinne umkreist. Man erhält auf diese Weise die Formel

$$(8) \qquad \overline{\int_c}^{(p,q,p-,q-)} f(u)\,du = -\overline{\int_c}^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du.$$

Das Integral (3) nimmt also nur den Factor -1 auf, wenn die Punkte p und q bei der auf den Integrationsweg bezüglichen Angabe mit einander vertauscht werden.

Der Integrationsweg von ω ist im Vorhergehenden aus den Abschnitten der Linie $\mathfrak{N}$ und den Kreisen mit den Mittelpunkten p und q zusammengesetzt worden. Indessen hängt der Werth des Integrals ω von der Gestalt des Integrationsweges nur insofern ab, als dabei die Art der Umkreisung der singulären Punkte p und q und der Uebergang von der Umgebung des Punktes p zur Umgebung des Punktes q in Frage kommt, so dass man für diesen Weg auch andere Curvenformen anwenden kann. Es soll hier auf zwei verschiedene Modificationen des Integrationsweges von ω eingegangen werden. Man ziehe zunächst vom Punkte c aus zwei beliebige geschlossene, weder sich selbst noch einander schneidende Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ (Fig. 1), von

denen die erstere keinen anderen singulären Punkt der Function $f(u)$ als den Punkt p, die letztere keinen anderen als den Punkt q umschliesst. Auf dem von $\mathfrak{P}$ begrenzten Flächenstück soll der Abschnitt $c\mathfrak{p}$ der Linie $\mathfrak{N}$, auf dem von $\mathfrak{Q}$ begrenzten der Abschnitt $c\mathfrak{q}$ liegen. Bezeichnet man zur Abkürzung durch $\mathfrak{P}^+$, resp. $\mathfrak{Q}^+$ den positiven Umlauf längs $\mathfrak{P}$, resp. $\mathfrak{Q}$, und durch $\mathfrak{P}^-$ und $\mathfrak{Q}^-$ die bezüglichen negativen Umläufe, so können offenbar die vier auf einander folgenden Strecken

$$\mathfrak{Q}^+,\ \mathfrak{P}^+,\ \mathfrak{Q}^-,\ \mathfrak{P}^-$$

als Integrationsweg von ω, an Stelle des oben angegebenen Weges, gewählt werden.

Zu einer noch etwas kürzeren Darstellung des Integrationsweges von ω gelangt man, wenn man die Randcurve eines zusammenhängenden Flächenstücks einführt, das die Punkte p und q enthält. Es sei $\mathfrak{T}$ eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curve (Fig. 2), innerhalb derer die Punkte p und q (sammt der Linie $\mathfrak{N}$, Fig. 1), jedoch keine anderen singulären Punkte der Function $f(u)$ liegen. Das von $\mathfrak{T}$ begrenzte Flächenstück werde durch eine Linie cde derartig in zwei Theile getheilt, dass sich der Punkt p auf dem einen, der Punkt q auf dem anderen Flächentheil befindet. Von den zwei Endpunkten der Linie cde soll c derjenige sein, von welchem aus das im positiven Sinne längs $\mathfrak{T}$ genommene Wegdifferential zu dem den Punkt q enthaltenden Flächentheile führt. Dann lässt sich der zuvor definirte (im Punkte c beginnende) Integrationsweg des Integrals ω durch einen Weg ersetzen, der aus den vier Theilen

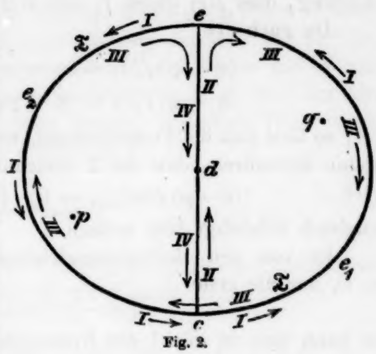

Fig. 2.

$$\mathfrak{T}^+,\ cde,\ \mathfrak{T}^-,\ edc$$

besteht, wo durch $\mathfrak{T}^+$ und durch $\mathfrak{T}^-$ der positive, resp. der negative Umlauf längs $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird. Nach Fig. 2 lautet dieser Integrationsweg

$$ce_1ee_2c,\quad cde,\quad ee_1ce_2e,\quad edc.$$

In der That enthält die Wegstrecke ce_1ee_2c, welche mit $ce_1edc + cdee_2c$ gleichbedeutend ist, den positiven Umlauf um q und den positiven Umlauf um p, und auf den übrigen Strecken $cdee_1ce_2edc$ wird zuerst der Punkt q, dann der Punkt p im negativen Sinne umkreist.

Sind in (1) die reellen Bestandtheile der Constanten σ und τ positiv, und hat die Function $\varphi(u)$ sowohl für $u=p$ als für $u=q$ einen endlichen Werth, so darf man die Kreisradien k und l unendlich klein wählen, wodurch die Kreisintegrale K und L (in denen $u=p+ke^{\vartheta i}$, resp. $u=q+le^{\vartheta i}$ zu setzen ist) einen verschwindend kleinen Werth annehmen. In diesem Falle ist zugleich, nach bekannter Regel, das bestimmte Integral $\int_p^q f(u)\,du$ convergent. Folglich wird aus (7), woselbst die Integralgrenzen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ durch p, q ersetzt werden können, die Gleichung

$$(9)\qquad \overline{\int_c}^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du = (e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{2\pi i\tau}-1)\int_p^q f(u)\,du$$

erhalten, die bereits in der Einleitung erwähnt wurde. Als Integrationsweg des auf der rechten Seite von (9) stehenden Integrals muss die Linie $\mathfrak{R}$ (oder ein auf dieselbe reducirbarer Weg) genommen werden; der Zweig der Function $f(u)$ ist daselbst wieder durch die Bedingung, dass $f(c)$ gleich f_0 sein soll, bestimmt.

Da nach (1)

$$(u-p)\,f(u) = (u-p)^{\sigma}\,(u-q)^{\tau-1}\,\varphi(u),$$
$$(u-q)\,f(u) = (u-p)^{\sigma-1}(u-q)^{\tau}\,\varphi(u)$$

ist, so lässt sich die Voraussetzung, welche zu der Gleichung (9) führte, dahin formuliren, dass die 2 Gleichungen

$$(10)\qquad [(u-p)\,f(u)]_{u=p}=0,\quad [(u-q)\,f(u)]_{u=q}=0$$

zugleich befriedigt sein müssen.

Ist von den Bedingungsgleichungen (10) nur die eine erfüllt, z. B. nur die erste

$$[(u-p)\,f(u)]_{u=p}=0,$$

so kann man in Fig. 1 den Kreisradius k unendlich klein nehmen und gleichzeitig den Punkt c mit dem Punkte $\mathfrak{p}$ zusammenfallen lassen. Dann werden, da ausser dem Kreisintegral K auch das in (6) bezeichnete Integral P verschwindet, die Integrale ω_2 und ω_4 gleich Null, so dass auf der rechten Seite von (5) nur die Summanden ω_1 und ω_3 übrig bleiben. Der Integrationsweg des Integrals ω_1 beginnt und endigt, gemäss der obigen Voraussetzung, im Punkte $\mathfrak{p}$ oder, was hier dasselbe bedeutet, im Punkte p. Da ferner $\omega_3 = -e^{2\pi i\sigma}\,\omega_1$ ist, so erhält man in dem gedachten Falle die Gleichung

$$(11)\qquad \overline{\int_c}^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du = (1-e^{2\pi i\sigma})\overline{\int_p}^{(q)} f(u)\,du\,.$$

Als Integrationsweg des rechts stehenden Integrals kann eine beliebige geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curve gewählt werden,

welche von p ausgeht und keinen anderen singulären Punkt von $f(u)$ als den Punkt q umschliesst. Ebenso findet man, wenn die 2te Bedingung (10) erfüllt ist, die Formel

$$\text{(11 a)}\qquad \overline{\int_c}^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du = (e^{2\pi i\tau}-1)\overline{\int_q}^{(p)} f(u)\,du.$$

Die vorstehenden Rechnungen liefern auch den Werth des Integrals

$$\text{(12)}\qquad \omega' = \overline{\int_c}^{(q-,p-,q,p)} f(u)\,du,$$

dessen Integrationsweg die Punkte q, p zuerst im negativen, dann im positiven Sinne umkreist. Der Anfangswerth der Function $f(u)$ an der unteren Integralgrenze $u=c$ soll in ω' derselbe wie in ω sein. Dann ist ω' identisch mit dem Product $e^{-2\pi i(\sigma+\tau)}\omega$. In dem oben definirten Integral ω_3 (Gl. (4)) war der Anfangswerth von $f(u)$ gleich $e^{2\pi i(\sigma+\tau)}f_0$; an ω_3 wurde ω_4 stetig angeschlossen, ebenso hatte ω_1 an ω_4 stetigen Anschluss, ω_2 an ω_1. Nun ist für die aus den vier Integralen $\omega_3, \omega_4, \omega_1, \omega_2$ gebildete Summe, wenn sie in dieser Reihenfolge genommen werden, der Integrationsweg derselbe wie für das Integral ω'; die genannte Summe unterscheidet sich daher von ω' nur dadurch, dass in ihr der Anfangswerth $e^{2\pi i(\sigma+\tau)}f_0$, in ω' aber der Anfangswerth f_0 für $f(u)$ zur Anwendung kommt. Auf diese Weise wird, mit Rücksicht auf (5), für ω' die Gleichung

$$\text{(13)}\qquad \overline{\int_c}^{(q-,p-,q,p)} f(u)\,du = e^{-2\pi i(\sigma+\tau)}\overline{\int_c}^{(q,p,q-,p-)} f(u)\,du,$$

in der $f(u)$ die Function (1) bezeichnet, abgeleitet. Sind die Bedingungen (10) erfüllt, so folgt aus (9) und (13) die Formel

$$\text{(14)}\qquad \overline{\int_c}^{(q-,p-,q,p)} f(u)\,du = (e^{-2\pi i\sigma}-1)(e^{-2\pi i\tau}-1)\int_p^q f(u)\,du.$$

Der für ω angewendete Integrationsweg möge ferner in der Art geändert werden, dass man die zwei Umkreisungen des Punktes q (die positive und die negative) mit einander vertauscht. Dann entsteht ein Integral

$$\text{(15)}\qquad \omega'' = \overline{\int_c}^{(q-,p,q,p-)} f(u)\,du,$$

für welches ähnliche Formeln wie für ω gelten. An der unteren Integralgrenze $u=c$ möge auch in ω'' der Werth f_0 für $f(u)$ genommen werden. Nennt man Λ das Kreisintegral, das aus L erhalten wird, wenn der Umlauf um den Punkt q nicht im positiven, sondern im negativen Sinne erfolgt, so modificirt sich die für ω angestellte

Rechnung, die zur Gleichung (7) führte, nur darin, dass die Grössen L und $e^{2\pi i\tau}$ durch Λ und $e^{-2\pi i\tau}$ zu ersetzen sind. Man hat demnach für ω'' die zu (7) analoge Gleichung

$$(16)\quad \bar{\int_c}^{(q-,p,q,p-)} f(u)\,du = \begin{cases}(e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{-2\pi i\tau}-1)\displaystyle\int_p^q f(u)\,du \\ +\,(e^{-2\pi i\tau}-1)K-(e^{2\pi i\sigma}-1)\Lambda,\end{cases}$$

aus der, wenn die Bedingungen (10) befriedigt sind, die der Formel (9) entsprechende Gleichung

$$(17)\quad \bar{\int_c}^{(q-,p,q,p-)} f(u)\,du = (e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{-2\pi i\tau}-1)\int_p^q f(u)\,du$$

gewonnen wird.

Die Umkehrung des Integrationsweges, welche bei gleichzeitiger Multiplication des Integrals durch den Factor -1 zulässig ist, bewirkt bei ω' (wie bei ω) nur eine Vertauschung der Punkte p und q in Bezug auf die Reihenfolge, in der sie von der Variable u umkreist werden. Aus ω'' wird, wenn u den in (15) angegebenen Weg in umgekehrter Richtung durchläuft, ein Integral erhalten, dessen Integrationsweg mit dem positiven Umlauf um p beginnt und mit dem positiven Umlauf um q schliesst. Es ist also

$$(18)\quad \bar{\int_c}^{(q-,p-,q,p)} f(u)\,du = -\bar{\int_c}^{(p-,q-,p,q)} f(u)\,du\,,$$

$$(19)\quad \bar{\int_c}^{(q-,p,q,p-)} f(u)\,du = -\bar{\int_c}^{(p,q-,p-,q)} f(u)\,du.$$

Die Integrale ω, ω', ω'' verschwinden, sobald einer der Punkte p, q aufhört, ein singulärer zu sein. Es sei z. B. $f(u)$ in der Umgebung des Punktes p eindeutig und stetig. Dann hat der Factor $e^{2\pi i\sigma}$, der zu $f(u)$ hinzutritt, wenn u den Punkt p umkreist, den Werth 1. Gleichzeitig verschwindet das Kreisintegral K. In Folge dessen werden in den Gleichungen (7) und (16) sämmtliche rechts stehende Summanden gleich Null. Das Analoge gilt, wenn $f(u)$ bei $u=q$ eindeutig und stetig bleibt.

Ist die Function $f(u)$ für $u=p$ unstetig, jedoch in der Umgebung des Punktes p eindeutig, und wird sie daselbst durch die Reihe

$$f(u)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu(u-p)^\nu+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu'(u-p)^{-\nu}$$

dargestellt, so hat das Integral ω den Werth

$$(20)\qquad \omega=2\pi i A_1'(e^{2\pi i\tau}-1).$$

Denn da $e^{2\pi i \sigma} = 1$ ist, so ergiebt sich aus (7) die Gleichung

$$\omega = (e^{2\pi i \tau} - 1)\, K,$$

und das Kreisintegral K nimmt, wenn die obige Reihe für $f(u)$ substituirt wird, den Werth $2\pi i A_1'$ an. Unter denselben Voraussetzungen in Bezug auf die Function $f(u)$ bestehen für ω' und ω'' die Gleichungen

$$(21) \qquad \omega' = 2\pi i A_1'(1 - e^{-2\pi i \tau}), \quad \omega'' = 2\pi i A_1'(e^{-2\pi i \tau} - 1),$$

von denen die erstere aus (13) und (20), die letztere aus (16) folgt.

§ 2.

Eine Function $F(u)$ habe die singulären Punkte $p, p_1, \ldots, p_n$, deren Anzahl als endlich vorausgesetzt wird; ausser denselben sei nur der Werth $u = \infty$ ein singulärer für die genannte Function. In der Umgebung des Punktes $u = p$ soll die (in der Einleitung erwähnte) Gleichung

$$(2) \qquad F(u) = (u-p)^{\sigma-1} \varphi(u)$$

gelten, in welcher $\varphi(u)$ eine bei $u = p$ eindeutige Function von u, und σ eine Constante bezeichnet. Macht die Variable u einen positiven Umlauf um die sämmtlichen endlichen singulären Punkte $p, p_1, \ldots, p_n$, so nimmt, wie vorausgesetzt wird, die Function $F(u)$ den constanten Factor $e^{2\pi i s}$ auf, bleibt aber im Uebrigen unverändert.

Man ziehe um den Punkt p (als Mittelpunkt) mit dem Radius k einen Kreis $\mathfrak{K}$, der keinen anderen singulären Punkt der Function $F(u)$ als den Punkt p umschliesst. Ferner werde ein beliebiger Punkt γ der u-Ebene, der nicht zu den singulären Punkten von $F(u)$ gehört, zum Mittelpunkte eines zweiten Kreises $\mathfrak{L}$ genommen, dessen Radius l so gross ist, dass sowohl der Kreis $\mathfrak{K}$ als auch die Punkte $p_1, \ldots, p_n$ auf der von $\mathfrak{L}$ begrenzten Kreisfläche liegen. Man wählt auf der Kreislinie $\mathfrak{K}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$, auf der Kreislinie $\mathfrak{L}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{q}$ und verbindet diese Punkte durch eine sich selbst nicht schneidende Linie $\mathfrak{N}$, welche aus der Kreisfläche $\mathfrak{L}$ nicht heraustritt und keinen der Punkte $p_1, \ldots, p_n$ enthält. Es sei endlich c irgend ein Punkt der Linie $\mathfrak{N}$; von den verschiedenen Werthen, welche die Function $F(u)$ in demselben annimmt, werde ein bestimmter, der F_0 heissen möge, fixirt.

Es soll nun ein Integral

$$\Omega = \int F(u)\, du$$

betrachtet werden, dessen Integrationsweg in dem Punkte c beginnt und endigt und sich aus den auf einander folgenden Theilen

$$c\mathfrak{q},\ \mathfrak{L}^+,\ \mathfrak{q}\mathfrak{p},\ \mathfrak{K}^+,\ \mathfrak{p}\mathfrak{q},\ \mathfrak{L}^-,\ \mathfrak{q}\mathfrak{p},\ \mathfrak{K}^-,\ \mathfrak{p}c$$

zusammensetzt. Als Anfangswerth für die zu integrirende Function $F(u)$ an der unteren Integralgrenze $u = c$ ist der genannte Werth F_0 anzuwenden; derselbe stellt zugleich den Werth von $F(u)$ im Endpunkte des Integrationsweges dar. Durch $\mathfrak{L}+$, $\mathfrak{K}+$, resp. $\mathfrak{L}-$, $\mathfrak{K}-$ wird der Umlauf längs der Kreise $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ in der positiven, resp. negativen Drehungsrichtung bezeichnet. Die Variable u des Integrals Ω umkreist also, vom Punkte c aus, zuerst sämmtliche singuläre Punkte $p, p_1, \ldots, p_n$, dann allein den Punkt p, beides im positiven Sinne, und führt hierauf die entsprechenden Umkreisungen auch im negativen Sinne aus.

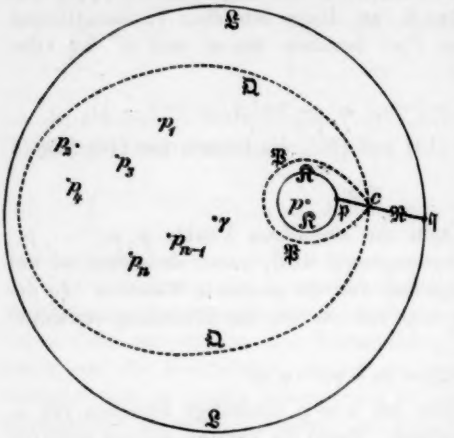

Fig. 3.

Wird die Gesammtheit der endlichen singulären Punkte $p, p_1, \ldots, p_n$ der Function $F(u)$ durch den Buchstaben $\mathfrak{S}$ zusammengefasst, so kann man, gemäss der im § 1 angegebenen abgekürzten Schreibweise, das obige Integral Ω durch den Ausdruck

$$\Omega = \overline{\int_c}^{(\mathfrak{S}, p, \mathfrak{S}-, p-)} F(u)\, du \tag{22}$$

darstellen.

Das Integral Ω geht durch eine einfache Substitution in ein Integral über, dessen Variable einen Doppelumlauf um zwei endliche singuläre Punkte macht. Man verbinde u mit einer neuen Variable v durch die Gleichung

$$u = \gamma + \frac{1}{v}, \qquad v = \frac{1}{u - \gamma}, \tag{23}$$

wo γ die Constante bedeutet, die den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{L}$ bildet, und nenne $p', p_1', \ldots, p_n'$ die Constanten

$$p' = \frac{1}{p - \gamma}, \quad p_1' = \frac{1}{p_1 - \gamma}, \ldots, p_n' = \frac{1}{p_n - \gamma}. \tag{24}$$

Dann entsprechen den Werthen $u = p$, $u = p_1, \ldots, u = p_n$ die Werthe $v = p'$, $v = p_1', \ldots, v = p_n'$, und dem Werthe $u = \infty$ der Werth $v = 0$. Die Function $F(u)$ möge durch die Substitution (23) in die Function $\psi(v)$ übergehen; diese hat die singulären Punkte $v = 0$, $v = p'$, $v = p_1', \ldots, v = p_n'$, während $v = \infty$ kein singulärer Werth für sie ist. Da die Punkte u, die auf der Kreislinie $\mathfrak{L}$ liegen,

durch die Gleichung $u - \gamma = le^{\vartheta i}$, in welcher ϑ von 0 bis 2π variirt, bestimmt sind, so gilt für die zugehörigen Punkte v die Gleichung $v = \frac{1}{l}\, e^{-\vartheta i}$. Der Kreis $\mathfrak{L}$ liefert also in der v-Ebene einen Kreis $\mathfrak{L}'$ mit dem Mittelpunkt $v = 0$ und dem Radius $\frac{1}{l}$, und zwar bewegt sich v längs $\mathfrak{L}'$ in negativer Drehungsrichtung, wenn u den Kreis $\mathfrak{L}$ in positiver Richtung durchläuft. Die Punkte $p', p_1', \ldots p_n'$ befinden sich sämmtlich ausserhalb des Kreises $\mathfrak{L}'$, da die von $\mathfrak{L}'$ umschlossene Kreisfläche denjenigen Theil der u-Ebene abbildet, der nach Fortlassung der Kreisfläche $\mathfrak{L}$ übrig bleibt. Nennt man sodann $\mathfrak{K}'$ den Kreis, der in der v-Ebene die Abbildung des Kreises $\mathfrak{K}$ darstellt, so gehört zur Kreisfläche $\mathfrak{K}$ die Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ (nicht die Ergänzungsfläche); denn kein Punkt der Kreisfläche $\mathfrak{K}$ kann, weil γ ausserhalb $\mathfrak{K}$ liegt, einem unendlich entfernten Punkte der v-Ebene entsprechen. Folglich enthält die Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ keinen anderen singulären Punkt der Function $\psi(v)$ als den Punkt $v = p'$. Die Drehungsrichtung ist bei correspondirenden Umläufen längs $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die gleiche, da die Umgebungen irgend zweier entsprechender Peripheriepunkte einander in den kleinsten Theilen ähnlich sind, und daselbst die inneren Seiten sich gegenseitig abbilden. Man bezeichnet ferner durch c', $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ die Constanten

$$(25)\qquad c' = \frac{1}{c-\gamma},\quad \mathfrak{p}' = \frac{1}{\mathfrak{p}-\gamma},\quad \mathfrak{q}' = \frac{1}{\mathfrak{q}-\gamma},$$

welche die Bildpunkte von $u = c$, $u = \mathfrak{p}$, $u = \mathfrak{q}$ darstellen. Die Punkte $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}'$ sind die Endpunkte einer (den Punkt c' enthaltenden) Linie $\mathfrak{N}'$, die in der v-Ebene der Linie $\mathfrak{N}$ entspricht (Fig. 4). Die Function $\psi(v)$ nimmt, den oben angeführten Voraussetzungen zufolge, den Factor $e^{-2\pi i\varepsilon}$, resp. den Factor $e^{2\pi i\sigma}$ auf, wenn die Variable v einen positiven Umlauf um den Punkt 0, resp. um den Punkt p' ausführt.

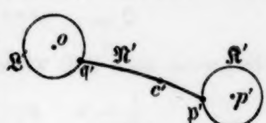

Fig. 4.

Das Integral Ω verwandelt sich durch die Substitution (23) in den Ausdruck

$$(26)\qquad \Omega = -\overline{\int_{c'}^{(0-,\mathfrak{p}',0,\mathfrak{p}'-)}} \psi(v)\,\frac{dv}{v^2},$$

dessen Integrationsweg aus den Theilen

$$c'\mathfrak{q}',\ \mathfrak{L}'-,\ \mathfrak{q}'\mathfrak{p}',\ \mathfrak{K}'+,\ \mathfrak{p}'\mathfrak{q}',\ \mathfrak{L}'+,\ \mathfrak{q}'\mathfrak{p}',\ \mathfrak{K}'-,\ \mathfrak{p}'c'$$

besteht. Dies ist ein Integral von der in (15) angegebenen Art. Setzt man

$$(27)\qquad \psi(v) = (v-p')^{\sigma-1}\, v^{1-\varepsilon}\,\chi(v),$$

so ist $\chi(v)$, wie aus den erwähnten Eigenschaften von $\psi(v)$ folgt, eine bei $v = 0$ und bei $v = p'$ eindeutige Function von v. Mithin

hat die zu integrirende Function in (26), $\frac{\psi(v)}{v^2}$, dieselbe Form wie die in (1) definirte Function $f(u)$. Man erhält aus der rechten Seite der Gleichung (1) den Ausdruck $\frac{\psi(v)}{v^2}$, wenn man

$$u,\ \varphi(u),\ p,\ q,\ \tau$$

bezw. durch

$$v,\ \chi(v),\ p',\ 0,\ -\varepsilon$$

ersetzt. Wird ausser diesen Aenderungen noch c' statt c geschrieben, so geht das in (15) bezeichnete Integral ω'' in $-\Omega$ über. Die Formel (16) liefert daher für Ω die Gleichung

$$(28)\qquad \Omega = \begin{cases} -(e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{2\pi i\varepsilon}-1)\int_{p'}^{q'}\psi(v)\frac{dv}{v^2}, \\ -(e^{2\pi i\varepsilon}-1)K'+(e^{2\pi i\sigma}-1)\Lambda', \end{cases}$$

in welcher K', Λ' die Integrale der Function $\frac{\psi(v)}{v^2}$ längs des Kreises $\mathfrak{K}'$ im positiven Sinne, resp. längs des Kreises $\mathfrak{L}'$ im negativen Sinne bedeuten.

Bleibt in (27) die Function $\chi(v)$ für $v=p'$ und für $v=0$ stetig, und ist der reelle Theil von σ positiv, der von ε negativ, so werden die Kreisintegrale K' und Λ' unendlich klein, sobald man die Radien der Kreise $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$ unendlich klein wählt. Dann ergiebt sich für Ω die Gleichung

$$\Omega = -(e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{2\pi i\varepsilon}-1)\int_{p'}^{0}\psi(v)\frac{dv}{v^2},$$

die, wenn nach (23) wieder

$$\frac{1}{v}=u-\gamma,\quad \frac{dv}{v^2}=-du,\quad \psi(v)=F(u)$$

gesetzt wird, die Gestalt

$$(29)\qquad \Omega=(e^{2i\pi\sigma}-1)(e^{2\pi i\varepsilon}-1)\int_{p}^{\infty}F(u)\,du$$

annimmt. Das Integral Ω wird also, falls das Integral $\int_p^\infty F(u)\,du$ convergirt, aus diesem durch Multiplication mit einer Grösse erhalten, welche ausschliesslich von σ und ε abhängt. Das Kreisintegral Λ', das hier als verschwindend klein angenommen wird, ist identisch mit dem über den unendlichen Horizont der u-Ebene erstreckten Integral der Function $F(u)$. Der Integrationsweg des obigen Integrals $\int_p^\infty F(u)\,du$ entsteht aus der Linie $\mathfrak{N}$ (Fig. 3), wenn man den Punkt $\mathfrak{p}$ mit p zusammenfallen und den Punkt $\mathfrak{q}$ in's Unendliche rücken lässt. Die Voraussetzung, unter der die Formel (29) gültig ist, wird durch die zwei (zu (10) analogen) Gleichungen

$$\left[(v-p')\,\frac{\psi(v)}{v^2}\right]_{v=p'}=0,\quad \left[\frac{\psi(v)}{v}\right]_{v=0}=0,$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$(30)\qquad [(u-p)\,F(u)]_{u=p}=0,\quad [(u-\gamma)\,F(u)]_{u=\infty}=0$$

ausgedrückt.

Um den Integrationsweg des Integrals Ω zu vereinfachen, ziehe man vom Punkte c aus (Fig. 3) zwei geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, von denen $\mathfrak{P}$ keinen anderen singulären Punkt der Function $F(u)$ als den Punkt p umschliesst, während das von $\mathfrak{Q}$ begrenzte Flächenstück sowohl die Punkte $p_1, \ldots p_n$ als auch die ganze Curve $\mathfrak{P}$ enthält. Dann kann der Integrationsweg von Ω offenbar aus den 4 Strecken

$$\mathfrak{Q}^+,\ \mathfrak{P}^+,\ \mathfrak{Q}^-,\ \mathfrak{P}^-$$

zusammengesetzt werden, wo $\mathfrak{Q}^+$, $\mathfrak{P}^+$ die positiven, und $\mathfrak{Q}^-$, $\mathfrak{P}^-$ die negativen Umläufe längs $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$ bedeuten.

Nach der bisherigen Definition des Integrationsweges von Ω umkreist die Variable u abwechselnd einerseits alle endlichen singulären Punkte der Function $F(u)$, andererseits den Punkt p allein. Indessen lässt sich dieser Integrationsweg noch in einer etwas anderen Weise auffassen, indem der Punkt p den Punkten $p_1, \ldots p_n$ gegenübergestellt werden kann. Um dies zu erläutern, verbindet man die letzteren n Punkte mit einander durch irgend eine gebrochene, sich selbst nicht schneidende Linie $\mathfrak{S}$ (Fig. 5), so dass ein Umlauf um $\mathfrak{S}$ einen Umlauf um $p_1, \ldots p_n$ darstellt. Man fixirt ferner zwei Punkte d_1, d_2 der Curve $\mathfrak{P}$ und zwei Punkte e_1, e_2 der Curve $\mathfrak{Q}$ und wählt die Bezeichnung derselben in der Art, dass die positiven Umläufe längs $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ kurz durch cd_1d_2c und ce_1e_2c, die negativen durch cd_2d_1c und ce_2e_1c angegeben werden. Endlich werde vom Punkte d_2 eine Verbindungslinie zum Punkte e_2 gezogen, welche die gebrochene Linie $\mathfrak{S}$ nicht schneidet, und welche so liegt, dass das Flächenstück, auf dem sich die Linie $\mathfrak{S}$ befindet, die Begrenzung $ce_1e_2d_2d_1c$ hat. Der Integrationsweg des Integrals Ω besteht, wenn man die Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ benutzt, aus den vier Abschnitten

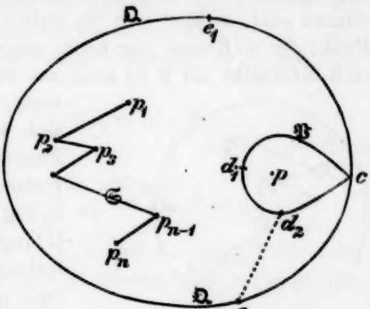

Fig. 5.

$$ce_1e_2c,\quad cd_1d_2c,\quad ce_2e_1c,\quad cd_2d_1c.$$

Der zweite und der dritte dieser Abschnitte bedeuten aber zusammen genommen, da man dafür den Weg $cd_1 d_2 e_2 e_1 c$ setzen darf, einen Umlauf um die gebrochene Linie $\mathfrak{S}$ in negativer Drehungsrichtung. Schaltet man andererseits hinter den ersten Abschnitt $ce_1 e_2 c$ des Integrationsweges die sich gegenseitig aufhebenden Strecken $cd_2 d_1 c$ und $cd_1 d_2 c$ ein, so sind die Wege $ce_1 e_2 c$ und $cd_2 d_1 c$ gleichbedeutend mit $ce_1 e_2 d_2 d_1 c$, d. h. mit dem positiven Umlauf um die Linie $\mathfrak{S}$, worauf dann der Weg $cd_1 d_2 c$, d. h. der positive Umlauf um den Punkt p folgt. Hieraus ergiebt sich, dass Ω sich auch als das Integral

$$(31) \qquad \Omega = \int_c^{\overline{(\mathfrak{S},\, p,\, \mathfrak{S}-,\, p-)}} F(u)\, du$$

darstellen lässt. Man kann also die positive und die negative Umkreisung der $n+1$ Punkte $p, p_1, \ldots p_n$ (in (22) kurz durch $\mathfrak{G}$, resp. $\mathfrak{G}-$, bezeichnet) durch die entsprechenden Umkreisungen der n Punkte $p_1, \ldots p_n$ ersetzen, ohne dass der Werth des Integrals Ω sich hierdurch änderte.

Als Ausgangspunkt des Integrationsweges des Integrals Ω kann, weil der Anfangswerth der Function $F(u)$ mit ihrem Endwerthe übereinstimmt, ein beliebiger Punkt dieses Weges genommen werden; denn eine Verschiebung der unteren Integralgrenze innerhalb des Integrationsweges ändert nur die Reihenfolge der einzelnen Summanden derjenigen Summe, als deren Grenzfall das Integral Ω anzusehen ist. Da ausserdem die Linien $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{S}$ ihrer Form nach willkürlich bleiben und nur hinsichtlich ihrer respectiven Lage zu den singulären Punkten bestimmt sind, so lässt sich die untere Grenze von Ω in jeden beliebigen Punkt der u-Ebene, der nicht singulär für $F(u)$ ist, verlegen, was (mit Rücksicht auf § 1) auch aus der Gleichung (26) folgt. Indessen muss, wenn die untere Integralgrenze sich verschiebt, der Anfangswerth der Function $F(u)$ dieser Aenderung gemäss bestimmt werden. Denkt man sich z. B. in Fig. 5 die untere Grenze des Integrals Ω längs der Curve $\mathfrak{P}$ in positiver Richtung fortgeschoben und in den Punkt d_1 verlegt, so hat man als Anfangswerth von $F(u)$ im Punkte d_1 denjenigen Werth zu nehmen, der aus F_0 entsteht, wenn u den Bogen cd_1 (Bruchtheil eines positiven Umlaufes um den Punkt p) durchläuft. Die Figur 5 (in der man noch die Punkte d_1 und e_1 mit einander verbinden möge) würde hierdurch in Figur 6 übergehen, in welcher dann die vier Strecken

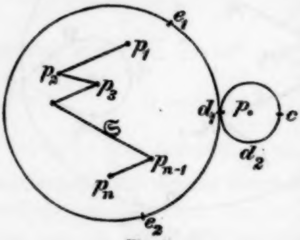

Fig. 6.

$$d_1 e_1 e_2 d_1, \quad d_1 d_2 c d_1, \quad d_1 e_2 e_1 d_1, \quad d_1 c d_2 d_1$$

den Integrationsweg von Ω bezeichnen.

Man kann endlich den Integrationsweg von Ω auch auf eine Form bringen, welche der mit Hülfe der Figur 2 gegebenen Darstellung des Integrationsweges von ω (§ 1) entspricht. In Figur 5 bilden der Bogen $c d_1 d_2$ der Curve $\mathfrak{P}$ und die Verbindungslinie $d_2 e_2$ zusammen eine Linie, durch welche das von $\mathfrak{O}$ begrenzte Flächenstück in zwei Theile getheilt wird. Auf dem einen dieser Flächentheile liegt der Punkt p, auf dem anderen die gebrochene Linie $\mathfrak{S}$, und man gelangt, wenn man vom Punkte c aus längs $\mathfrak{O}$ im positiven Sinne fortschreitet, zunächst zu dem die Linie $\mathfrak{S}$ enthaltenden Flächentheile. Wird nun der positive, resp. der negative Umlauf längs $\mathfrak{O}$ wiederum durch $\mathfrak{O}^+$, resp. $\mathfrak{O}^-$, bezeichnet, so kann der vom Punkte c ausgehende Integrationsweg des Integrals Ω nach Fig. 5 aus den vier Theilen

$$\mathfrak{O}^+,\quad c d_1 d_2 e_2,\quad \mathfrak{O}^-,\quad e_2 d_2 d_1 c$$

gebildet werden. Denn auf dem Wege $\mathfrak{O}^+$, der mit $c e_1 e_2 d_2 d_1 c + c d_1 d_2 e_2 c$ gleichbedeutend ist, wird zuerst die Linie $\mathfrak{S}$, dann der Punkt p im positiven Sinne umkreist. Die übrigen drei Strecken enthalten, da sie als $c d_1 d_2 e_2 e_1 c + c e_2 d_2 d_1 c$ geschrieben werden können, die negativen Umläufe um die Linie $\mathfrak{S}$ und um den Punkt p. Also stellen die vier Strecken in der That zusammen den in (31) angegebenen Integrationsweg dar.

Durchläuft die Variable u den in (22), resp. in (31) bezeichneten Integrationsweg in umgekehrter Richtung, so hat das zugehörige Integral der Function $F(u)$ den Werth $-\Omega$. Der Integrationsweg beginnt dann mit dem positiven Umlauf um den Punkt p und schliesst mit dem negativen Umlauf um die Gesammtheit der Punkte $p, p_1, \ldots p_n$, resp. um die Linie $\mathfrak{S}$. Man erhält auf diese Weise die zu (8) analogen Formeln

$$(32)\qquad \begin{cases} \overline{\int_c}^{(p,\,\mathfrak{G},\,p-,\,\mathfrak{G}-)} F(u)\,du = -\overline{\int_c}^{(\mathfrak{G},\,p,\,\mathfrak{G}-,\,p-)} F(u)\,du, \\ \overline{\int_c}^{(p,\,\mathfrak{S},\,p-,\,\mathfrak{S}-)} F(u)\,du = -\overline{\int_c}^{(\mathfrak{S},\,p,\,\mathfrak{S}-,\,p-)} F(u)\,du. \end{cases}$$

Für das Integral Ω wurde in dem Fall, wo die zwei Gleichungen (30) in Kraft sind, der Ausdruck (29) abgeleitet. Ist von den Bedingungen (30) nur die erste

$$[(u-p)\,F(u)]_{u=p} = 0$$

befriedigt, so besteht die Formel

$$(33)\qquad \Omega = (1 - e^{2\pi i\sigma}) \overline{\int_p}^{(\mathfrak{S})} F(u)\,du.$$

Denn wenn man in Fig. 5 den Punkt c in die Nachbarschaft des Punktes p legt und die Dimensionen der Curve $\mathfrak{P}$ unendlich klein wählt, so wird das längs $\mathfrak{P}$ genommene Integral der Function $F(u)$

im gedachten Falle unendlich klein. Es bleiben also nur die zwei Umläufe um die Linie $\mathfrak{S}$ übrig, woraus die Gleichung (33) folgt. Die Bestimmung des zur Anwendung kommenden Zweiges der Function $F(u)$ geschieht nach Fig. 5 oder Fig. 6. In derselben Weise findet man, wenn die zweite Bedingung (30)

$$[(u-\gamma)\,F(u)]_{u=\infty}=0$$

erfüllt ist, für das Integral Ω die Gleichung

$$(34)\qquad \Omega=(e^{2\pi i\varepsilon}-1)\overline{\int_{\infty}^{(p)}}F(u)\,du,$$

welche sich aus (26) und (11) ergiebt, wenn man den Radius des Kreises $\mathfrak{K}'$ (Fig. 4) unendlich klein nimmt. Die Integrationswege der auf den rechten Seiten von (33) und (34) stehenden Integrale sind einfache geschlossene Curven, von denen die eine vom Punkte p ausgeht und die Linie $\mathfrak{S}$ umgiebt, während die andere in einem beliebigen Punkte des unendlichen Horizontes ihren Anfang nimmt und den Punkt p, jedoch keinen der Punkte $p_1, \ldots, p_n$, umkreist.

Es sollen schliesslich noch zwei Integrale Ω' und Ω'', welche den in § 1 angegebenen Integralen ω' und ω'' analog gebildet sind, betrachtet werden. Es sei Ω' das Integral

$$(35)\qquad \Omega'=\overline{\int_{c}^{(\mathfrak{S}-,\,p-,\,\mathfrak{S},\,p)}}F(u)\,du,$$

dessen Integrationsweg von dem in (22) bezeichneten Integrationswege des Integrals Ω nur darin abweicht, dass die positive und die negative Drehungsrichtung mit einander vertauscht sind. Als Anfangswerth der Function $F(u)$ an der unteren Integralgrenze $u=c$ werde, wie in (22), der Werth F_0 genommen. Man findet leicht die der Formel (13) entsprechende Relation

$$(36)\qquad \Omega'=e^{-2\pi i(\sigma+\varepsilon)}\,\Omega,$$

da in Ω die negativen Umläufe mit dem Werthe $e^{2\pi i(\sigma+\varepsilon)}F_0$, in Ω' mit dem Werthe F_0 beginnen. Hat das Integral $\int_p^\infty F(u)\,du$ einen bestimmten Sinn, so gilt für Ω', wie aus (29) und (36) folgt, die Gleichung

$$(37)\qquad \Omega'=(e^{-2\pi i\sigma}-1)\,(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\int_p^\infty F(u)\,du.$$

Man kann Ω' auch als das zu (31) analoge Integral

$$(38)\qquad \Omega'=\overline{\int_{c}^{(\mathfrak{S}-,\,p-,\,\mathfrak{S},\,p)}}F(u)\,du$$

auffassen, in welchem die Umkreisung der Linie $\mathfrak{S}$ die Umkreisung der n Punkte $p_1, \ldots p_n$ bedeutet. Denn die für Ω angestellten Be-

trachtungen übertragen sich auf Ω', sobald die positive und die negative Drehungsrichtung mit einander vertauscht werden.

Man nennt ferner Ω'' das Integral

$$\Omega'' = \bar{\int_c}^{(\mathfrak{G}-,\, p,\, \mathfrak{G},\, p-)} F(u)\, du, \tag{39}$$

in welchem der Weg der Variable u nach Figur 5 durch

$$\mathfrak{Q}^-,\ \mathfrak{P}^+,\ \mathfrak{Q}^+,\ \mathfrak{P}^-$$

angegeben wird. Wendet man auf Ω'' die Substitution (23)

$$u = \gamma + \frac{1}{v}, \quad v = \frac{1}{u-\gamma}$$

an, welche $F(u)$ in $\psi(v)$ verwandelt, so entsteht die Gleichung (cfr. (26))

$$\Omega'' = -\bar{\int_{c'}}^{(o,\, p',\, o-,\, p-)} \psi(v)\, \frac{dv}{v^2},$$

in der $p' = \frac{1}{p-\gamma}$, $c' = \frac{1}{c-\gamma}$ gesetzt ist. Mithin kommt Ω'' auf ein Integral von der Form (3) zurück. Ebenso wie für das Integral Ω der Ausdruck (28) erhalten wurde, gewinnt man für Ω'' mit Hülfe von (7) die Gleichung

$$\Omega'' = \begin{cases} -\,(e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\displaystyle\int_{p'}^{q'} \psi(v)\,\frac{dv}{v^2} \\ -\,(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\,K' + (e^{2\pi i\sigma}-1)\,L'. \end{cases} \tag{40}$$

In derselben wird durch L' das in positiver Drehungsrichtung längs des Kreises $\mathfrak{L}'$ (Fig. 4) genommene Integral der Function $\frac{\psi(v)}{v^2}$ bezeichnet, während K' dieselbe Bedeutung wie in (28) hat. Sind die Bedingungen (30) erfüllt, so kann man die Kreise $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$ unendlich klein nehmen, so dass die Kreisintegrale K' und L' verschwinden. Dann entsteht aus (40) die Gleichung

$$\Omega'' = -\,(e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\int_{p'}^{0} \psi(v)\,\frac{dv}{v^2},$$

die, wenn man durch die Substitution $v = \frac{1}{u-\gamma}$ die Variable u wieder einführt, für Ω'' den Ausdruck

$$\Omega'' = (e^{2\pi i\sigma}-1)\,(e^{-2\pi i\varepsilon}-1)\int_p^{\infty} F(u)\, du \tag{41}$$

liefert. Benutzt man die gebrochene Linie $\mathfrak{S}$ zur Definition des Integrationsweges, so ist

$$\Omega'' = \bar{\int_c}^{(\mathfrak{S}-,\, p,\, \mathfrak{S},\, p-)} F(u)\, du, \tag{42}$$

wie sich unmittelbar aus der Figur 5 ergiebt, wenn man statt e_2, d_2 die Punkte e_1, d_1 durch eine Linie mit einander verbindet.

§ 3.

Um die Anwendung, welche die hier betrachteten bestimmten Integrale in der Theorie der linearen Differentialgleichungen finden, an einem Beispiel zu erläutern, soll kurz auf die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe

$$(43)\qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-\varrho]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0$$

eingegangen werden. Man gelangt bekanntlich zu Lösungen dieser Gleichung, indem man für y das bestimmte Integral*)

$$(44)\qquad y=\int_g^h(u-x)^{-\beta}\,\mathfrak{U}\,du,$$

in welchem $\mathfrak{U}$ nur von u abhängt, substituirt und die Formel der theilweisen Integration benutzt. Die Integralgrenze g ist, wie vorausgesetzt wird, eine Constante, h entweder constant oder gleich x. Von den logarithmischen Fällen der Gleichung (43) wird hier abgesehen. Es ergiebt sich, dass das Integral (44) eine Lösung von (43) ist, falls für $\mathfrak{U}$ das Product $u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$ genommen wird, und falls der Ausdruck

$$[(u-x)^{-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho+1}(u-1)^{\varrho-\alpha}]_{u=g}^{u=h},$$

der in Folge der theilweisen Integration als Summandus auftritt, den Werth Null hat. Zur Abkürzung werde

$$(45)\qquad \Phi(u,x)=(u-x)^{-\beta}\,u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1},$$

$$(46)\qquad M=(u-x)^{-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho+1}(u-1)^{\varrho-\alpha}$$

gesetzt. Dann ist

$$(47)\qquad y=\int_g^h\Phi(u,x)\,du$$

ein particuläres Integral von (43), sobald g und h die Bedingung

$$(48)\qquad [M]_{u=h}-[M]_{u=g}=0$$

erfüllen.

Die Gleichung (48) kann zunächst dadurch befriedigt werden, dass sowohl $[M]_{u=g}$ als auch $[M]_{u=h}$ verschwindet. Diese Fälle liefern für g und h die Werthe 0, 1, ∞, x. Indem man je zwei dieser 4 Werthe für g, h wählt, erhält man die bekannten 6 particulären Lösungen der Gleichung (43)

---

*) Es ist hier dieselbe Bezeichnung gewählt worden wie in § 1 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten" in Bd. 102 des Crelle'schen Journals, pag. 81, auf die verwiesen wird.

$$(49)\qquad \int_1^\infty \Phi(u,x)\,du,\qquad \int_0^x \Phi(u,x)\,du,$$

$$(50)\qquad \int_0^\infty \Phi(u,x)\,du,\qquad \int_1^x \Phi(u,x)\,du,$$

$$(51)\qquad \int_0^1 \Phi(u,x)\,du,\qquad \int_\infty^x \Phi(u,x)\,du,$$

welche (in dieser Reihenfolge) die zu $x = 0$, zu $x = 1$ und zu $x = \infty$ gehörigen Hauptintegrale darstellen. Man erkennt jedoch, dass die Grösse M nur dann für $u = 0$, bezw. $u = 1$, $u = \infty$, $u = x$ verschwindet, wenn die reellen Bestandtheile der Constanten $\beta - \varrho + 1$, $\varrho - \alpha$, α, $-\beta - 1$ positive Vorzeichen haben. Die Lösungen (49), (50), (51) sind folglich nicht allgemein anwendbar. Die Gültigkeit derselben muss in der That wegen der Convergenzbedingungen der bestimmten Integrale eine beschränkte bleiben.

Die Zahl der Bedingungen, denen die Constanten α, β, ϱ bei den einzelnen Integralen zu genügen haben, vermindert sich, wenn man, während die Werthe $0, 1, \infty, x$ für die Grenzen zur Anwendung kommen, $g = h$ setzt und für das Integral (47) eine geschlossene Curve als Integrationsweg einführt. Denn in diesem Falle bleibt für die bestimmten Integrale nur je eine Convergenzbedingung zu erfüllen übrig. Lässt man z. B., indem man $g = h = 0$ nimmt, in (47) die Variable u eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curve durchlaufen, welche vom Punkte 0 ausgeht und den Punkt 1 (jedoch nicht den Punkt x) umschliesst, so befriedigt, der obigen Rechnung zufolge, das so definirte Integral die Gleichung (43), sobald der reelle Theil der Constante $\beta - \varrho + 1$ positiv ist. Dieses Integral wird nach § 1, wenn der Umlauf im positiven Sinne geschieht, durch den Ausdruck

$$\int_0^{\overline{(1)}} (u - x)^{-\beta}\, u^{\beta - \varrho} (u - 1)^{\varrho - \alpha - 1}\, du$$

bezeichnet. Dasselbe bildet einen Ersatz für das erste Integral (51), wenn $\varrho - \alpha$ im reellen Theil negativ, $\beta - \varrho + 1$ positiv ist; für $\beta - \varrho + 1 < 0$ wird indessen sein Werth ebenfalls ein unbestimmter.

Man gelangt nun zu Lösungen der Differentialgleichung (43), welche niemals illusorisch werden und die Form bestimmter Integrale haben, wenn man in (47) die Variable u Doppelumläufe von der in den vorstehenden §§ 1 und 2 angegebenen Art ausführen lässt. Als Ausgangspunkt und Endpunkt des Integrationsweges des Integrals (47) werde ein beliebiger Werth $u = c$ genommen, der von den Werthen $0, 1, \infty, x$ verschieden ist. Für $g = h = c$ erhält man aus (48) die Bedingung, dass die mehrdeutige Function M ihren anfänglichen Werth wieder annehmen muss, wenn die Variable u die geschlossene Integrationscurve durchläuft. Da aber M das Product

$$(u-x)^{-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho+1}\,(u-1)^{\varrho-\alpha}$$

bedeutet, in welchem die drei Exponenten beliebige Constanten sind, so liegt es nahe, die Gleichung (48) dadurch zu erfüllen, dass man die Variable u, nachdem $g = h = c$ gesetzt ist, um diejenigen singulären Punkte, die sie überhaupt umkreist, zwei Umläufe, nämlich einen positiven und einen negativen, machen lässt. Hierdurch entstehen dann Integrale von der Form (3), (22) und (31).

Von den sechs in (49), (50), (51) genannten Integralen haben drei, nämlich

$$(52)\qquad \int_0^x \Phi(u,x)\,du,\quad \int_1^x \Phi(u,x)\,du,\quad \int_0^1 \Phi(u,x)\,du$$

eine endliche Begrenzung. Statt derselben mögen nunmehr die drei Integrale mit Doppelumlauf

$$(53)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_c^{\overline{(x,0,x-,0-)}} \Phi(u,x)\,du, \\ \displaystyle\int_c^{\overline{(x,1,x-,1-)}} \Phi(u,x)\,du, \\ \displaystyle\int_c^{\overline{(1,0,1-,0-)}} \Phi(u,x)\,du, \end{array}\right.$$

in denen $\Phi(u,x)$ wieder die Function (45) bedeutet, als particuläre Lösungen der Differentialgleichung (43) genommen werden. Diese Integrale haben, nachdem an ihrer unteren Grenze ein Werth der Function $\Phi(u,x)$ fixirt worden ist, für ein endliches, von 0 und 1 verschiedenes x stets einen bestimmten Sinn. Denn ihr Integrationsweg ist endlich, und die zu integrirende Function bleibt in allen Punkten desselben stetig. Nach Formel (9) werden die Ausdrücke (53), falls die Integrale (52) convergiren, mit den Producten

$$\begin{array}{l} [e^{2\pi i(\beta-\varrho)}-1]\,[e^{-2\pi i\beta}-1]\displaystyle\int_0^x \Phi(u,x)\,du, \\ [e^{2\pi i(\varrho-\alpha)}-1]\,[e^{-2\pi i\beta}-1]\displaystyle\int_1^x \Phi(u,x)\,du, \\ [e^{2\pi i(\beta-\varrho)}-1]\,[e^{2\pi i(\varrho-\alpha)}-1]\displaystyle\int_0^1 \Phi(u,x)\,du \end{array}$$

identisch.

Man denke sich ferner die Punkte 0 und x durch eine Linie $\mathfrak{A}$, die Punkte 1 und x durch eine Linie $\mathfrak{B}$, die Punkte 0 und 1 durch eine Linie $\mathfrak{C}$ verbunden und bilde die zu (31) analogen Ausdrücke

$$(54)\qquad \begin{cases} \overline{\int}_c^{(\mathfrak{A},\, 1,\, \mathfrak{A}-,\, 1-)} \Phi(u, x)\, du, \\ \overline{\int}_c^{(\mathfrak{B},\, 0,\, \mathfrak{B}-,\, 0-)} \Phi(u, x)\, du, \\ \overline{\int}_c^{(\mathfrak{C},\, x,\, \mathfrak{C}-,\, x-)} \Phi(u, x)\, du, \end{cases}$$

deren Integrationswege aus je zwei Umläufen um eine der Verbindungslinien und zwei Umläufen um einen singulären Punkt der Function Φ bestehen. Die Integrale (54), welche convergent sind, sobald x endlich und von 0 und 1 verschieden ist, treten an Stelle der drei Integrale

$$(55)\qquad \int_1^\infty \Phi(u, x)\, du, \quad \int_0^\infty \Phi(u, x)\, du, \quad \int_x^\infty \Phi(u, x)\, du,$$

falls letztere aufhören, einen bestimmten Sinn zu haben. Da die Function $\Phi(u, x)$ den Factor $e^{-2\pi i\alpha}$ aufnimmt, wenn die Variable u einen positiven Umlauf längs einer die drei Punkte 0, 1, x umschliessenden Curve macht, so ergiebt sich aus der Formel (29), dass die Integrale (54) im Fall der Convergenz der Ausdrücke (55) in die Producte

$$[e^{2\pi i(\varrho-\alpha)} - 1]\,[e^{-2\pi i\alpha} - 1] \int_1^\infty \Phi(u, x)\, du,$$

$$[e^{2\pi i(\beta-\varrho)} - 1]\,[e^{-2\pi i\alpha} - 1] \int_0^\infty \Phi(u, x)\, du,$$

$$[e^{-2\pi i\beta} - 1]\,[e^{-2\pi i\alpha} - 1] \int_x^\infty \Phi(u, x)\, du$$

übergehen.

Ist der reelle Theil der Constante $\varrho - \alpha$ positiv, so besteht für das erste der Integrale (54) gemäss der Formel (33) die Gleichung

$$\overline{\int}_c^{(\mathfrak{A},\, 1,\, \mathfrak{A}-,\, 1-)} \Phi(u, x)\, du = [1 - e^{2\pi i(\varrho-\alpha)}] \overline{\int}_1^{(\mathfrak{A})} \Phi(u, x)\, du.$$

Man kann daher statt des Integrals $\int_1^\infty \Phi(u, x)\, du$, falls dieses durch seine obere (aber nicht durch seine untere) Grenze divergent wird, das Integral $\overline{\int}_1^{(\mathfrak{A})} \Phi(u, x)\, du$ als particuläre Lösung von (43) anwenden. Die analogen Schlüsse gelten für die übrigen Integrale (55).

Die Differentialgleichung (43) ist hiermit im allgemeinen Falle durch bestimmte Integrale gelöst, da die Integrale (53) und (54) das vollständige System der Hauptintegrale dieser Gleichung darstellen.

Man bemerke, dass in den Fällen, wo von den Integralen (53) und (54) einzelne identisch verschwinden (s. den Schluss des § 1),

die entsprechenden einfacheren bestimmten Integrale anwendbar bleiben. Es sind dies zugleich diejenigen Fälle, wo hypergeometrische Reihen mit endlicher Gliederzahl vorkommen. Ist z. B. die Constante $\beta - \varrho$ ganzzahlig und positiv, so dass $\Phi(u, x)$ bei $u = 0$ eine eindeutige stetige Function von u wird, so verschwinden das erste und das dritte der Integrale (53) und das zweite Integral (54) für ein beliebiges x. Dann sind jedoch, da der Werth $u = 0$ als untere Integralgrenze in (47) gewählt werden darf, entweder das erste und das dritte der Integrale (52), resp. das zweite Integral (55), oder aber die zugehörigen Integrale mit einfacher geschlossener Integrationscurve convergent. Man erhält also wiederum ein vollständiges System bestimmter Integrale als Lösung der Differentialgleichung (43). Einer näheren Betrachtung sollen diese speciellen Fälle von (43) hier nicht unterzogen werden.

Zur Theorie der Euler'schen Integrale.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

In dem Euler'schen Integrale erster Art

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du,$$

welches hier durch $E(a, b)$ bezeichnet werden soll, müssen, damit dasselbe einen bestimmten Sinn habe, die reellen Bestandtheile der Grössen a und b positiv sein. Zur Ausdehnung der Definition auf negative Werthe von a und b kann zunächst die Reductionsformel dienen, welche $E(a, b)$ mit $E(a+m, b+n)$ verbindet (m und n ganzzahlig, $a+m>0$, $b+n>0$) oder die Darstellung der Grösse $E(a, b)$ durch ein unendliches Product. Für den Fall, dass nur eine der Constanten a, b im reellen Theile negativ ist, hat H. Hankel ein Integral eingeführt, dessen Integrationsweg eine geschlossene, von 0 oder 1 ausgehende Curve ist*). Dieses Verfahren hat Herr Bigler wesentlich erweitert, indem er für beliebige Werthe von a und b das Euler'sche Integral $E(a, b)$ durch zwei Integrale, deren Integrationswege einfache geschlossene Curven sind, ausdrückt**).

---

*) „Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments", Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrgang 9, 1864 (pag. 12). Hankel behandelt das Integral $\int_{+1}^{+1}(-y)^p(1-y)^q\,dy$, dessen Integrationscurve den Punkt 0 umschliesst.

**) „Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter", Crelle's Journal Bd. 102, 1887, § 2. Herr Bigler leitet für das Euler'sche Integral $E(a, b)$ die Gleichung

$$E(a, b) = \frac{1}{2i\sin(\pi a)}\,e^{-i\pi a}\,V - \frac{1}{2i\sin(\pi b)}\,e^{-i\pi b}\,W$$

ab, wo V und W zwei Integrale von $u^{a-1}(1-u)^{b-1}$ bedeuten, in denen die Integrationsvariable u (von einem beliebigen Punkte aus) einen einfachen Umlauf um den Punkt 0, resp. um den Punkt 1 ausführt.

In den nachstehenden Betrachtungen, welche sich an die Abhandlung des Verfassers „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf"*) anschliessen, wird nicht eine neue Darstellung des Euler'schen Integrals $E(a, b)$, sondern ein (auch für negative a, b brauchbarer) Ersatz desselben aufgesucht, insbesondere hinsichtlich der Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen. Man bezeichnet durch $\mathfrak{E}(a, b)$ das Integral

$$\mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i(a+b)}\int u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = \int (-u)^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du,$$

in welchem die Variable u einen Doppelumlauf von der in jener Abhandlung angegebenen Art um die Punkte 0 und 1 ausführt. Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ stellt, da es für alle endlichen Werthe von a und b einen bestimmten Sinn behält, eine transcendente ganze Function der zwei Argumente a, b dar. Sind die reellen Theile von a und b positiv, so wird $\mathfrak{E}(a, b)$ mit dem Ausdruck

$$(e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})(e^{\pi i b} - e^{-\pi i b})\,E(a, b) = -4 \sin(\pi a) \sin(\pi b)\,E(a, b)$$

identisch. Das Resultat, dass das Product aus dem Euler'schen Integrale $E(a, b)$ und der Grösse $-4\sin(\pi a)\sin(\pi b)e^{i\pi(a+b)}$ für beliebige endliche Argumente a, b endlich bleibt, ist bereits in den Rechnungen des Herrn Bigler enthalten, der indessen dieses Product selbst nicht zum Gegenstand seiner Untersuchungen nimmt.

Die im Folgenden behandelte Grösse $\mathfrak{E}(a, b)$ ist für reelle Werthe von a und b selbst reell; sie verschwindet, wenn a oder b gleich einer positiven ganzen Zahl, oder wenn $a+b$ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null wird. Wie das Euler'sche Integral $E(a, b)$ ist auch $\mathfrak{E}(a, b)$ symmetrisch in Bezug auf a und b. Für $\mathfrak{E}(a+m, b)$ besteht, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet, die Formel

$$\mathfrak{E}(a+m, b) = (-1)^m \frac{a(a+1)\ldots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+m-1)}\,\mathfrak{E}(a, b).$$

Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ bleibt ausserdem unverändert, wenn eins der Argumente a, b durch $1-a-b$ ersetzt wird.

Die Definition des Integrals $\mathfrak{E}(a, b)$ und die Ableitung der soeben erwähnten Eigenschaften desselben, sowie einiger anderer Formeln, bildet den Gegenstand des nachstehenden § 1. In § 2 wird vorausgesetzt, dass von den Constanten a und b die eine im reellen Theil positiv sei. Dann kommt $\mathfrak{E}(a, b)$ auf ein hier durch $\overline{E}(a, b)$ bezeichnetes Integral von der von Hankel betrachteten Art zurück, dessen Integrationsweg aus einer einfachen geschlossenen Curve besteht.

Der § 3 knüpft an das Verfahren an, durch welches H. Hankel das Euler'sche Integral zweiter Art $\Gamma(a)$ für beliebige Werthe von a

*) Dieser Band, pag. 470.

definirt*). Hankel leitet für den Quotienten $\frac{1}{\Gamma(a)}$, der, wie Herr Weierstrass hervorgehoben hat**), für jedes endliche a endlich bleibt, den allgemein gültigen Integralausdruck

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty} e^{-t}(-t)^{-a}dt$$

ab, dessen Integrationsweg im unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe beginnt und endigt und den Punkt 0 umschliesst. Setzt man $t = -u$, so dass die Variable u vom unendlich entfernten Punkt der negativen reellen Axe ausgeht, so entsteht die Gleichung

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2\pi i}\int e^{u}u^{-a}\,du,$$

welche von Heine***) und von Herrn Bigler†) in ihren Untersuchungen angewendet worden ist††). Die Rechnungen des nachstehenden § 3 beziehen sich nun auf das Integral

$$\int e^{u}u^{a-1}\,du,$$

dessen Integrationsweg mit dem des letztgenannten Ausdrucks übereinstimmt. Dasselbe wird hier durch $\overline{\Gamma}(a)$ bezeichnet. Der Vergleich mit der Hankel'schen Formel zeigt, dass

$$\overline{\Gamma}(a) = \frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)}$$

ist. Für ein positives a, wo das Euler'sche Integral $\Gamma(a)$ convergirt, ergiebt sich unmittelbar die Gleichung

$$\overline{\Gamma}(a) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})\,\Gamma(a) = 2i\sin(\pi a)\,\Gamma(a),$$

welche in die zuvor erwähnte übergeht, wenn die Relation

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

benutzt wird. Statt also den Quotienten $\frac{1}{\Gamma(a)}$ zu behandeln, kann man, wie im Folgenden geschieht, die Eigenschaft der Gammafunction, dass

*) § 2—3 der erwähnten Abh. im 9ten Jahrgang von Schlömilch's Zeitschrift.

**) „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten", Crelle's Journal, Bd. 51, pag. 7 und 36, 1856.

***) „Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy", Abschnitt I, in Crelle's Journal, Bd. 89, pag. 19, 1880.

†) l. c. § 1.

††) Man vergleiche auch die Abhandlung des Herrn J. Thomae „Beitrag zur Theorie der Function $P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma'\end{pmatrix} x$" in Schlömilch's Zeitschrift, Jahrgang 14, 1869.

ihre für endliche Argumente eintretenden Unstetigkeiten sich durch Multiplication mit $e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}$ oder mit sin (πa) beseitigen lassen, zum Ausgangspunkt der Betrachtung nehmen. Das Integral $\overline{\Gamma}(a)$, das eine transcendente ganze Function von a ist, steht zu $\Gamma(a)$ in einer ähnlichen Beziehung wie die in § 1 definirte Grösse $\mathfrak{E}(a, b)$ zu dem Euler'schen Integral $E(a, b)$. Aus den oben genannten Gleichungen folgt, dass

$$\overline{\Gamma}(a+1) = -a\overline{\Gamma}(a)$$

ist, und dass $\overline{\Gamma}(a)$ für positive ganzzahlige Werthe von a verschwindet.

Die Grössen $\mathfrak{E}(a, b)$, $\overline{E}(a, b)$ und $\overline{\Gamma}(a)$ finden, ebenso wie $E(a, b)$ und $\Gamma(a)$, bei der Integration gewisser linearer Differentialgleichungen Anwendung, indem sie den Zusammenhang zwischen den Lösungen in Reihenform und den Lösungen durch bestimmte Integrale vermitteln. Als Beispiel hierfür werden in § 4 die bestimmten Integrale, welche die Lösung der Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe im allgemeinen Falle darstellen, mit den zugehörigen Potenzreihen verglichen.

Die oben genannte (vorstehende) Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" wird im Folgenden kurz durch Abh. bezeichnet.

---

§ 1.

In der Ebene der Variable u ziehe man von einem Punkte c aus, der auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 liegt, zwei geschlossene, weder sich selbst noch einander schneidende Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, von denen die erstere den Punkt $u = 0$, die letztere den Punkt $u = 1$ umschliesst, und integrire die Function

$$f(u) = e^{-\pi i(a+b)}\, u^{a-1}(1-u)^{b-1} \tag{1}$$

nach u in der Art, dass die Grösse u zunächst längs $\mathfrak{Q}$ den Punkt 1, sodann längs $\mathfrak{P}$ den Punkt 0 in positiver Drehungsrichtung umkreist und hierauf die Curven $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ auch im entgegengesetzten Sinne durchläuft. In dem Anfangswerthe der Function $f(u)$ an der unteren Integralgrenze $u = c$,

$$f(c) = e^{-\pi i(a+b)}\, c^{a-1}(1-c)^{b-1},$$

wähle man diejenigen Werthe der Potenzen c^{a-1} und $(1-c)^{b-1}$, die durch die Reihen

$$(2)\begin{cases} c^{a-1} = [1-(1-c)]^{a-1} = 1 - \dfrac{a-1}{1}(1-c) + \dfrac{(a-1)(a-2)}{1.2}(1-c)^2 - \cdots, \\ (1-c)^{b-1} = 1 - \dfrac{b-1}{1}c + \dfrac{(b-1)(b-2)}{1.2}c^2 - \cdots \end{cases}$$

dargestellt werden, die also für reelle a, b reell und positiv sind. Dieser specielle Werth $f(c)$ wird f_0 genannt. Bringt man die Potenzen c^{a-1} und $(1-c)^{b-1}$ auf die Form

$$c^{a-1} = e^{(a-1)\log c}, \quad (1-c)^{b-1} = e^{(b-1)\log(1-c)},$$

so sind in f_0 für $\log c$ und $\log(1-c)$ die reellen Werthe zu nehmen.

Das so definirte Integral der Function $f(u)$ soll $\mathfrak{E}(a, b)$ genannt werden. Man hat für dasselbe, nach § 1 der erwähnten Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" die abgekürzte Bezeichnung

$$(3) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i(a+b)} \overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du.$$

Die reelle Axe der u-Ebene treffe, abgesehen von c, die Curve $\mathfrak{P}$ im Punkte $\varkappa$, die Curve $\mathfrak{Q}$ im Punkte λ. Indem man ausserdem zwei

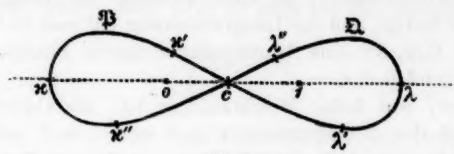

Fig. 1.

Punkte $\varkappa'$, $\varkappa''$ auf $\mathfrak{P}$ und zwei Punkte λ', λ'' auf $\mathfrak{Q}$ fixirt, kann man nach Fig. 1 die vier Theile des Integrationsweges von $\mathfrak{E}(a, b)$ durch

$$c\lambda'\lambda\lambda''c, \quad c\varkappa'\varkappa\varkappa''c, \quad c\lambda''\lambda\lambda'c, \quad c\varkappa''\varkappa\varkappa'c$$

bezeichnen. $\mathfrak{E}(a, b)$ ist hiernach gleich der Summe der vier Integrale

$$(4) \quad \overline{\int_c^{(1)}} f(u)\,du, \quad \overline{\int_c^{(0)}} f(u)\,du, \quad \overline{\int_c^{(1-)}} f(u)\,du, \quad \overline{\int_c^{(0-)}} f(u)\,du,$$

deren Integrationswege nur je einen der singulären Punkte $u = 0$ und $u = 1$ umkreisen.

Der Werth des Integrals $\mathfrak{E}(a, b)$ hängt von der unteren Integralgrenze c nicht ab (s. d. Abh.). Sind die reellen Bestandtheile der Constanten a und b positiv, so gilt für das auf der rechten Seite von (3) stehende Integral (nach Formel (9) der Abh.) die Gleichung

$$\overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = (e^{2\pi i a}-1)(e^{2\pi i b}-1)\,E(a, b),$$

in welcher $E(a, b)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$(5) \qquad E(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du$$

bedeutet; denn die Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ können alsdann auf je einen (doppelt durchlaufenen) Abschnitt der reellen Axe und einen unendlich

kleinen Kreis um den Punkt 0, resp. um den Punkt 1 reducirt werden. Auch für $E(a, b)$ gilt die Bedingung, dass die Potenzen u^{a-1} und $(1-u)^{b-1}$ im Punkte $u = c$ die Werthe (2) annehmen. Die Integrale $\mathfrak{E}(a, b)$ und $E(a, b)$ sind folglich im genannten Falle ($a > 0$, $b > 0$) durch die Relation

$$(6) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})(e^{\pi i b} - e^{-\pi i b})\, E(a, b)$$

mit einander verbunden, welcher man auch die Form

$$(6\text{a}) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = -4 \sin(\pi a) \sin(\pi b)\, E(a, b)$$

geben kann.

Das Integral $E(a, b)$ hat für alle endlichen Werthe von a und b einen bestimmten endlichen Werth. Denn die zu integrirende Function $f(u)$ ist, da man einen bestimmten Anfangswerth derselben fixirt hat, und die Variable u nach der Voraussetzung durch die Punkte 0 und 1 nicht hindurchgeht, in allen Punkten des Integrationsweges eindeutig und stetig, und der Integrationsweg hat eine endliche Länge. Mithin stellt $\mathfrak{E}(a, b)$ eine transcendente ganze Function der zwei Argumente a und b dar.

Setzt man, was keine Beschränkung ist, die Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ als Kreise mit den Mittelpunkten $u = 0$ und $u = 1$ voraus, so gilt für die Variable u auf $\mathfrak{P}$ die Gleichung $u = ce^{\vartheta i}$, auf $\mathfrak{Q}$ die Gleichung $u - 1 = (1-c)e^{\vartheta_1 i}$, wo ϑ zwischen 0 und 2π, ϑ_1 zwischen $-\pi$ und π variirt. Die Punkte $\varkappa$ und λ (Fig. 1) werden dann $\varkappa = -c$, $\lambda = 2 - c$. Wenn u den Halbkreis $c\varkappa'\varkappa$ durchläuft, so nimmt die Potenz u^{a-1} den Factor $e^{\pi i(a-1)}$ auf; ebenso tritt zu $(1-u)^{b-1}$ der Factor $e^{\pi i(b-1)}$ hinzu, wenn u in positiver Drehungsrichtung von c zu λ übergeht. Betrachtet man also die Producte

$$e^{-\pi i(a-1)}\, u^{a-1}, \quad e^{-\pi i(b-1)}\, (1-u)^{b-1}$$

und wählt für u^{a-1} und $(1-u)^{b-1}$ im Punkte $u = c$ die in (2) bezeichneten Werthe, so ist, wenn u den erwähnten Weg $c\varkappa'\varkappa$, bezw. $c\lambda'\lambda$ zurückgelegt hat, der Ausdruck $e^{-\pi i(a-1)}u^{a-1}$ im Punkte $\varkappa$ gleich dem in (2) angegebenen Werthe c^{a-1}, bezw. der Ausdruck $e^{-\pi i(b-1)}(1-u)^{b-1}$ im Punkte λ gleich dem in (2) angegebenen Werthe $(1-c)^{b-1}$. Diese Erwägungen übertragen sich auf den allgemeineren Fall, wo die Gestalt der Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ eine beliebige bleibt. Es seien A und B die Constanten

$$(7) \qquad \begin{cases} A = e^{-\pi i(a-1)}\varkappa^{a-1} = (-\varkappa)^{a-1} = e^{(a-1)\log(-\varkappa)}, \\ B = e^{-\pi i(b-1)}(1-\lambda)^{b-1} = (\lambda-1)^{b-1} = e^{(b-1)\log(\lambda-1)}, \end{cases}$$

in denen der reelle $\log(-\varkappa)$, resp. der reelle $\log(\lambda-1)$ zur Anwendung kommt. Durchläuft u den Bogen $c\varkappa'\varkappa$, resp. den Bogen $c\lambda'\lambda$ (Fig. 1), und hat die Function $f(u)$, welche man als das Product

$$e^{-\pi i(a-1)}u^{a-1}e^{-\pi i(b-1)}(1-u)^{b-1} = (-u)^{a-1}(u-1)^{b-1}$$

schreiben kann, im Punkte c den oben bezeichneten Werth f_0, so wird die Potenz $(-u)^{a-1}$ im Punkte $\varkappa$ gleich A und die Potenz $(u-1)^{b-1}$ im Punkte λ gleich B. Hieraus folgt, dass man $\mathfrak{E}(a, b)$ auch als das Integral

$$(8) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = \int_c^{\overline{(1,0,1-,0-)}} (-u)^{a-1}(u-1)^{b-1}\, du$$

definiren und die Bestimmung treffen kann, dass bei den positiven Umläufen längs $\mathfrak{P}$, bezw. $\mathfrak{Q}$ der Factor $(-u)^{a-1}$ der zu integrirenden Function für $u = \varkappa$ den Werth A, der Factor $(u-1)^{b-1}$ für $u = \lambda$ den Werth B annehmen soll. Denn diese Angabe der Werthe der Potenzen $(-u)^{a-1}$, $(u-1)^{b-1}$ in den Punkten $\varkappa$, λ (Fig. 1) ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass $f(u)$ im Punkte c den Anfangswerth f_0 habe. Für reelle a, b sind A, B reell und positiv. Die hier angestellte Betrachtung zeigt ferner, dass $\mathfrak{E}(a, b)$ auch als das Integral

$$(8a) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i(a-1)} \int_c^{\overline{(1,0,1-,0-)}} u^{a-1}(u-1)^{b-1}\, du$$

definirt werden kann, wenn man festsetzt, dass die Potenz $(u-1)^{b-1}$ bei dem positiven Umlauf längs $\mathfrak{Q}$ für $u = \lambda$ (Fig. 1) den obigen Werth B hat, während u^{a-1} an der unteren Integralgrenze c gleich dem in (2) bezeichneten Werthe c^{a-1} ist.

Setzt man in dem Integral (3)

$$u = 1 - u', \quad u' = 1 - u,$$

so entspricht dem positiven Umlauf der Variable u um $u = 0$, resp. $u = 1$ ein positiver Umlauf der Variable u' um $u' = 1$, resp. $u' = 0$. Wird also die Constante $1 - c$ durch c' bezeichnet, so ergiebt sich für $\mathfrak{E}(a, b)$ der Ausdruck

$$\mathfrak{E}(a, b) = -e^{-\pi i(a+b)} \int_{c'}^{\overline{(0,1,0-,1-)}} u'^{\,b-1}(1-u')^{a-1}\, du'.$$

In dem rechts stehenden Integral tritt, wenn die singulären Punkte 0 und 1 in Bezug auf die Reihenfolge der Umkreisung mit einander vertauscht werden, nur der Factor -1 hinzu (Formel (8) der Abh.); denn die Umkehrung des Integrationsweges hat jene Vertauschung zur Folge. Ausserdem kann man die untere Grenze c', da sie ohne Einfluss auf den Werth des Integrals ist, durch c ersetzen; der Anfangswerth von $f(u)$ wird dann wieder gleich f_0. Hierdurch entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i(a+b)} \int_c^{\overline{(1,0,1-,0-)}} u'^{\,b-1}(1-u')^{a-1}\, du',$$

welche beweist, dass

$$\mathfrak{E}(a, b) = \mathfrak{E}(b, a) \tag{9}$$

ist.

Die Anwendung der Formel der theilweisen Integration auf die Grösse

$$\mathfrak{E}(a+1, b) = -e^{-\pi i(a+b)} \int_c^{\overline{(1,0,1-,0-)}} u^a(1-u)^{b-1}\, du$$

führt zu dem Ausdrucke

$$\mathfrak{E}(a+1, b) =$$

$$= e^{-\pi i(a+b)} \left[\frac{u^a(1-u)^b}{b}\right]_{u=c}^{u=c} - \frac{a}{b}\, e^{-\pi i(a+b)} \int_c^{\overline{(1,0,1-,0-)}} u^{a-1}(1-u)^b\, du.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung heben sich die vom Integralzeichen freien Summanden gegenseitig auf; denn da die Variable u jeden der Punkte 0, 1 sowohl im positiven als auch im negativen Sinne umkreist, so nimmt das Product $u^a(1-u)^b$ im Endpunkte des Integrationsweges den anfänglichen Werth wieder an. Indem man sodann

$$(1-u)^b = (1-u)^{b-1} - u(1-u)^{b-1}$$

substituirt, findet man die Formel

$$\mathfrak{E}(a+1, b) = -\frac{a}{a+b}\, \mathfrak{E}(a, b), \tag{10}$$

aus der für ein beliebiges positives ganzzahliges m die Gleichungen

$$\mathfrak{E}(a+m, b) = (-1)^m \frac{a(a+1)\dots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+m-1))}\, \mathfrak{E}(a, b), \tag{11}$$

$$\mathfrak{E}(a-m, b) = (-1)^m \frac{(a+b-1)(a+b-2)\dots(a+b-m)}{(a-1)(a-2)\dots(a-m)}\, \mathfrak{E}(a, b) \tag{12}$$

erhalten werden. Die Gleichungen (11) und (12) unterscheiden sich nur durch den Factor $(-1)^m$ von den zwischen den Euler'schen Integralen $E(a+m, b)$ und $E(a, b)$, resp. $E(a-m, b)$ und $E(a, b)$ bestehenden Relationen.

Wird a gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null, so ist die Function $f(u)$ in der Umgebung des Punktes $u=0$ eindeutig. Alsdann heben sich in dem Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ diejenigen Bestandtheile gegenseitig auf, die sich auf die zwei Umkreisungen des Punktes $u = 1$ beziehen. Der Endwerth der Function $f(u)$ in dem ersten der Integrale (4), der gleich $e^{2\pi i b} f_0$ ist, stimmt im genannten Falle, wo $f(u)$ sich durch den Umlauf der Variable u um den Punkt $u = 0$ nicht ändert, mit dem Anfangs- und Endwerth von $f(u)$ im zweiten, also auch mit dem Anfangswerth von $f(u)$ im dritten der Integrale (4) überein. Hieraus folgt, dass die Summe des ersten

und des dritten Integrals gleich Null ist. Nennt man ferner K dasjenige (längs $\mathfrak{P}$ genommene) Integral

$$K = \overline{\int_c^{(0)}} f(u)\, du = e^{-\pi i(a+b)} \overline{\int_c^{(0)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du,$$

an dessen unterer Grenze $u = c$ die zu integrirende Function $f(u)$ den Werth f_0 hat, so ist das zweite der Integrale (4) gleich $e^{2\pi i b} K$ und das vierte gleich $-K$. Im Falle eines ganzzahligen Argumentes a besteht also für $\mathfrak{E}(a, b)$ die Gleichung

$$\mathfrak{E}(a, b) = (e^{2\pi i b} - 1)\, K = 2 i e^{\pi i b} \sin(\pi b)\, K.$$

Man hat nun zu unterscheiden, ob a positiv oder negativ, bezw. 0 ist. Für positive ganzzahlige Werthe von a verschwindet das Integral K, weil $f(u)$ dann bei $u = 0$ eindeutig und stetig bleibt. Bezeichnet also m irgend eine positive ganze Zahl, so ist

$$(13) \qquad \mathfrak{E}(m, b) = 0$$

für einen beliebigen Werth von b, und daher auch (cfr. 9)

$$(14) \qquad \mathfrak{E}(a, m) = 0$$

für einen beliebigen Werth von a. Ist dagegen a eine negative ganze Zahl, die $-m$ heissen möge, so entwickelt man, um K zu bestimmen, die Potenz $(1-u)^{b-1}$ in die Reihe

$$(1-u)^{b-1} = 1 - \frac{b-1}{1} u + \frac{(b-1)(b-2)}{1.2} u^2 - \cdots,$$

was mit der Bedingung im Einklang steht, dass in f_0 der Factor $(1-c)^{b-1}$ gleich der in (2) angegebenen Reihe sein soll. Hierdurch erhält man für $f(u)$, da $a = -m$, $e^{-\pi i a} = (-1)^m$ ist, die Entwickelung

$$f(u) = (-1)^m e^{-\pi i b}\left[u^{-m-1} - \frac{b-1}{1} u^{-m} + \cdots + (-1)^m \frac{(b-1)\ldots(b-m)}{1.2\ldots m} u \cdots\right],$$

die auch im Falle $m = 0$ gültig bleibt. Die Integration der Function $f(u)$ längs der geschlossenen Curve $\mathfrak{P}$ führt nun, da der mit u^{-1} multiplicirte Summandus allein ein von Null verschiedenes Resultat liefert, zu der Gleichung

$$K = \frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-m)}{1.2\ldots m} e^{-\pi i b} 2\pi i$$

und im Fall $m = 0$ zu der Gleichung

$$K = e^{-\pi i b} 2\pi i.$$

Also ist

$$(15) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}(0, b) &= -4\pi \sin(\pi b), \\ \mathfrak{E}(-m, b) &= -4\pi \dfrac{(b-1)(b-2)\ldots(b-m)}{1.2\ldots m} \sin(\pi b) \end{cases}$$

für beliebige Werthe von b und für positive ganzzahlige Werthe

von m. Diesen Gleichungen kann man wegen der Relation (9) auch die Form

$$(16)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}(a,0) &= -4\pi\sin(\pi a), \\ \mathfrak{E}(a,-m) &= -4\pi\dfrac{(a-1)(a-2)\ldots(a-m)}{1.2\ldots m}\sin(\pi a) \end{cases}$$

geben, wo dann a einen beliebigen Werth bedeutet.

Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ verschwindet, nach (13) und (14), für ein positives ganzzahliges a oder b. Dasselbe wird ferner gleich Null, sobald die Summe $a+b$ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null ist. Man setze zunächst voraus, dass weder a noch b ganzzahlig, aber $a+b$ gleich der negativen ganzen Zahl $-n$, resp. gleich 0 sei. Dann kann man in der Formel (11)

$$\mathfrak{E}(a,b) = (-1)^m\frac{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+m-1)}{a(a+1)\ldots(a+m-1)}\mathfrak{E}(a+m,b)$$

für m den Werth $n+1$, resp. den Werth 1 wählen, wodurch der Factor $a+b+m-1$ und folglich die ganze rechte Seite der letzteren Gleichung den Werth Null annimmt. Dass $\mathfrak{E}(a, b)$ auch in dem Fall verschwindet, wo a und b ganzzahlig sind und $a+b$ eine negative ganze Zahl oder Null ist, ergiebt sich aus den Formeln (15) und (16), da dann $\sin(\pi b)$, bezw. $\sin(\pi a)$ gleich Null wird. Also bestehen die Gleichungen

$$(17)\qquad \mathfrak{E}(a,-a) = 0,\quad \mathfrak{E}(a,-n-a) = 0$$

für jeden Werth von a und für jeden ganzzahligen Werth von n.

Man bemerke, dass die Gleichungen (15) sich auch mittelst der Formeln (10) und (6a) ableiten lassen, wenn man berücksichtigt, dass das Euler'sche Integral $E(a, b)$ für $a = 1$ den Werth $\frac{1}{b}$ hat. Nach (10) ist

$$\mathfrak{E}(a,b) = -\frac{a+b}{a}\mathfrak{E}(a+1,b),$$

und für $\mathfrak{E}(a+1, b)$ ergiebt sich aus (6a), da

$$\sin[\pi(a+1]) = -\sin(\pi a)$$

ist, der Ausdruck

$$\mathfrak{E}(a+1,b) = 4\sin(\pi a)\sin(\pi b)\,E(a+1,b).$$

Durch Benutzung der Reihe

$$\sin(\pi a) = \pi a\left[1-\frac{(\pi a)^2}{1.2.3}+\frac{(\pi a)^4}{1.2.3.4.5}-\cdots\right]$$

findet man daher für $\mathfrak{E}(a, b)$ die Gleichung

$$\mathfrak{E}(a,b) = -4\pi(a+b)\sin(\pi b)\left[1-\frac{(\pi a)^2}{1.2.3}+\cdots\right]E(a+1,b),$$

welche für $a = 0$ den im Vorhergehenden ermittelten Werth

$$\mathfrak{E}(0, b) = -4\pi \sin(\pi b)$$

liefert. Da ferner für ein positives ganzzahliges m die Relation

$$\mathfrak{E}(-m, b) = \frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-m)}{1.2\ldots m}\,\mathfrak{E}(0, b)$$

besteht, die aus (11) für $a = -m$ erhalten wird, so ist auch die zweite der Gleichungen (15) durch die obige Rechnung bestätigt.

Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ hat einen reellen Werth, sobald a und b reell sind. Dies folgt, wenn a und b zugleich positiv sind, unmittelbar aus der Gleichung (6a), da das Integral $E(a, b)$ dann convergent und reell ist. Auf den eben genannten Fall lässt sich aber auch der Fall negativer reeller Argumente a, b reduciren, da man mit Hülfe der Formel (11) die Grösse $\mathfrak{E}(a, b)$ durch eine Grösse $\mathfrak{E}(a+m, b+n)$, in der $a+m$, $b+n$ positiv sind, ausdrücken kann.

In die Gleichung (6a)

$$\mathfrak{E}(a, b) = -4 \sin(\pi a) \sin(\pi b)\, E(a, b)$$

führe man statt des Euler'schen Integrals $E(a, b)$ das unendliche Product ein, durch welches dasselbe dargestellt wird,

$$E(a, b) = \frac{a+b}{ab} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\nu(a+b+\nu)}{(a+\nu)(b+\nu)}, \tag{18}$$

und substituire auch für $\sin(\pi a)$ und $\sin(\pi b)$ die unendlichen Producte

$$\sin(\pi a) = \pi a \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(\nu+a)(\nu-a)}{\nu^2},$$

$$\sin(\pi b) = \pi b \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(\nu+b)(\nu-b)}{\nu^2}.$$

Dann heben sich die in (18) vorkommenden Nenner fort, und man findet $\mathfrak{E}(a, b)$ gleich dem unendlichen Producte

$$\mathfrak{E}(a, b) = -4\pi^2 (a+b) \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(1-\frac{a}{\nu}\right)\left(1-\frac{b}{\nu}\right)\left(1+\frac{a+b}{\nu}\right). \tag{19}$$

Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ bleibt unverändert, wenn man eins der Argumente a, b durch $1-a-b$ ersetzt. Aus der Formel (19) ergiebt sich für $\mathfrak{E}(1-a-b, b)$, falls die rechte Seite als der Grenzfall eines endlichen Productes geschrieben wird, der Ausdruck

$$\mathfrak{E}(1-a-b, b) = -4\pi^2(1-a) \lim_{n=\infty} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \left(1+\frac{a+b-1}{\nu}\right)\left(1-\frac{b}{\nu}\right)\left(1+\frac{1-a}{\nu}\right).$$

Aber da

$$(1-a)\prod_{\nu=1}^{\nu=n}\left(1+\frac{a+b-1}{\nu}\right)\left(1+\frac{1-a}{\nu}\right)$$

$$=(1-a)\,\frac{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+n-1)}{1.2\ldots n}\;\frac{(2-a)(3-a)\ldots(n+1-a)}{1.2\ldots n}$$

$$=\frac{(1-a)\ldots(n-a)}{1.2\ldots n}\,(a+b)\,\frac{(a+b+1)\ldots(a+b+n)}{1.2\ldots n}\;\frac{n+1-a}{a+b+n}$$

ist, und der Quotient $\frac{n+1-a}{a+b+n}$ sich mit wachsendem n dem Werthe Eins nähert, so entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{E}(1-a-b,b)=-4\pi^2(a+b)\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1-\frac{a}{\nu}\right)\left(1-\frac{b}{\nu}\right)\left(1+\frac{a+b}{\nu}\right),$$

deren rechte Seite (nach (19)) gleich $\mathfrak{E}(a,b)$ ist. Wegen der Symmetrie der Grösse $\mathfrak{E}(a,b)$ in Bezug auf ihre Argumente können auch in $\mathfrak{E}(1-a-b,b)$ die Werthe a und b vertauscht werden. Es ist demnach

$$\mathfrak{E}(a,b)=\mathfrak{E}(1-a-b,b)=\mathfrak{E}(a,1-a-b). \tag{20}$$

Bei diesem Beweise der Formel (20) wird die in (18) angegebene Entwickelung des Euler'schen Integrals $E(a,b)$ in ein unendliches Product als bekannt vorausgesetzt. Die genannte Formel soll nun noch auf eine zweite, directere Art hergeleitet werden, indem man $\mathfrak{E}(a,b)$ durch eine lineare Substitution in $\mathfrak{E}(1-a-b,b)$ überführt. Nach der am Eingang dieses Paragraphen gegebenen Definition hat man für $\mathfrak{E}(1-a-b,b)$ den Ausdruck

$$\mathfrak{E}(1-a-b,b)=e^{\pi i(a-1)}\overline{\int_c}^{(1,0,1-,0-)}u^{-a-b}(1-u)^{b-1}\,du,$$

unter der Voraussetzung, dass an der unteren Integralgrenze der Werth

$$[u^{-a-b}(1-u)^{b-1}]_{u=c}=e^{-(a+b)\log c}\,e^{(b-1)\log(1-c)},$$

in welchem $\log c$ und $\log(1-c)$ die reellen Logarithmen bedeuten, angewendet werde. Um $\mathfrak{E}(a,b)$ in das letztere Integral umzuformen, modificirt man zunächst die Figur 1, indem man specielle Annahmen über die Gestalt der Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ macht. Mit einem Radius, der grösser als 1 ist, werde um den Punkt $u=0$ als Mittelpunkt ein Kreis $\mathfrak{T}$ gezogen, welcher die positive reelle Axe im Punkte $u=\lambda$, die negative reelle Axe im Punkte $u=\varkappa$ treffen möge. Der Werth λ giebt die Länge des Kreisradius an. Man construirt ferner im Punkte c (der auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 liegt, im Uebrigen aber beliebig ist) eine Senkrechte $\mathfrak{S}$ und nennt γ und δ die Punkte, in denen die Gerade $\mathfrak{S}$ die obere, resp. die untere Hälfte des Kreises $\mathfrak{T}$

schneidet (Fig. 2). Dann kann die Curve $\mathfrak{P}$ (Fig. 1) aus der geraden Strecke $\gamma c \delta$ und dem Kreisbogen $\delta \varkappa \gamma$, die Curve $\mathfrak{Q}$ aus $\gamma c \delta$ und dem Kreisbogen $\delta \lambda \gamma$ gebildet werden. Der Integrationsweg des Integrals

$$\mathfrak{E}(a,\, b) = e^{-\pi i(a+b)} \int_c^{(1,0,1-,0-)} u^{a-1}(1-u)^{b-1} du$$

setzt sich hiernach aus den Strecken

$$c\delta\lambda\gamma c, \quad c\gamma\varkappa\delta c, \quad c\gamma\lambda\delta c, \quad c\delta\varkappa\gamma c$$

oder, was dasselbe bedeutet, aus

$$c\delta\lambda, \quad \lambda\gamma\varkappa\delta c\gamma\lambda, \quad \lambda\delta\varkappa\gamma c$$

zusammen. Die zuerst genannte Strecke $c\delta\lambda$ darf, da der Endwerth der zu integrirenden Function gleich ihrem Anfangswerthe ist, zur letzten Strecke genommen werden, wodurch der Weg

$$\lambda\gamma\varkappa\delta c\gamma\lambda, \quad \lambda\delta\varkappa\gamma c\delta\lambda$$

erhalten wird. Um den Werth der Function $f(u)$ im Anfangspunkte λ dieses Integrationsweges zu bestimmen, giebt man ihr die Form

(21) $f(u) = e^{-\pi i(a-1)} u^{a-1}(u-1)^{b-1}$.

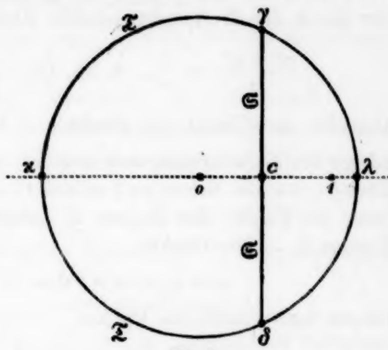

Fig. 2.

Der Anfangswerth der Potenz $(u-1)^{b-1}$ im Punkte λ ist gleich der in (7) angegebenen Constante B. Die Potenz u^{a-1} hat an der bisherigen unteren Integralgrenze $u = c$ den Werth $e^{(a-1)\log c}$, in welchem $\log c$ reell ist. Da aber $\log u$ reell bleibt, wenn die Variable u das Stück der reellen Axe von c bis λ durchläuft, so ist u^{a-1} im Punkte λ gleich der Constante

$$A' = e^{(a-1)\log\lambda},$$

in welcher $\log\lambda$ den reellen Logarithmus bedeutet. Der Anfangswerth der Function $f(u)$ im Punkte $u = \lambda$ wird folglich durch den Ausdruck

$$(22) \qquad f(\lambda) = e^{-\pi i(a-1)} A' B$$

dargestellt. Man führt nunmehr in das Integral $\mathfrak{E}(a,\, b)$ eine neue Variable v durch die Gleichung $u = \frac{1}{v}$ ein. Dann geht, da

$$u^{a-1}(u-1)^{b-1} = v^{2-a-b}(1-v)^{b-1}$$

ist, $\mathfrak{E}(a,\, b)$ in das Integral

$$\mathfrak{E}(a,\, b) = -\, e^{-\pi i(a-1)} \int v^{-a-b}(1-v)^{b-1} dv$$

über, in welchem v denjenigen Weg zu durchlaufen hat, der die Strecken $\lambda\gamma\varkappa\delta c\gamma\lambda$, $\lambda\delta\varkappa\gamma c\delta\lambda$ abbildet. Um diesen Weg der Variable v festzustellen, bemerke man zunächst, dass der Kreis $\mathfrak{T}$ in der v-Ebene einen Kreis $\mathfrak{T}_1$ mit dem Radius $\frac{1}{\lambda}$ und dem Mittelpunkte $v = 0$ liefert, und dass dem positiven Umlauf längs $\mathfrak{T}$ der negative Umlauf längs $\mathfrak{T}_1$ entspricht. Wird ferner $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$ gesetzt, wo u_1, u_2, v_1, v_2 reell sind, so folgen aus $u = \frac{1}{v}$ die Gleichungen

$$u_1 = \frac{v_1}{v_1^2 + v_2^2}, \quad u_2 = -\frac{v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Zu der Geraden $\mathfrak{S}$, für welche $u_1 = c$ ist, gehört also in der v-Ebene der durch den Nullpunkt gehende Kreis

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1} = \frac{1}{c}, \quad \text{d. h.} \quad \left(v_1 - \frac{1}{2c}\right)^2 + v_2^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2.$$

Derselbe umschliesst den Punkt $v = 1$, da der Werth $\frac{1}{c}$, welcher die Länge des Kreisdurchmessers angiebt, grösser als 1 ist. Der Theil des Kreises, der die Sehne $\gamma c\delta$ abbildet, liegt ausserhalb des Kreises $\mathfrak{T}_1$; denn die Fläche des Kreises $\mathfrak{T}$ entspricht der Ergänzungsfläche des Kreises $\mathfrak{T}_1$. Die Punkte

$$u = c, \; u = \varkappa, \; u = \lambda, \; u = \gamma, \; u = \delta$$

mögen bezw. durch die Punkte

$$v = c_1, \; v = \varkappa_1, \; v = \lambda_1, \; v = \gamma_1, \; v = \delta_1$$

abgebildet werden. Der Punkt λ_1 liegt, da $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$, und λ reell und grösser als 1 ist, auf der reellen Axe zwischen 0 und 1; $\varkappa_1$ ist gleich $-\frac{1}{\lambda}$, und c_1 gleich $\frac{1}{c}$. Der Punkt γ_1 befindet sich auf der unteren, δ_1 auf der oberen Halbebene (Fig. 3). Die Variable v durchläuft hiernach den aus Kreisbogen gebildeten Weg $\lambda_1\gamma_1\varkappa_1\delta_1c_1\gamma_1\lambda_1$, $\lambda_1\delta_1\varkappa_1\gamma_1c_1\delta_1\lambda_1$, der durch die vier Strecken

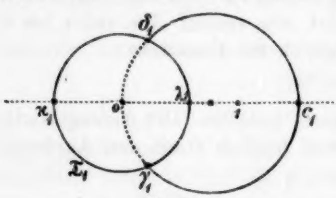

Fig. 3.

$$\lambda_1\gamma_1\varkappa_1\delta_1\lambda_1, \quad \lambda_1\delta_1c_1\gamma_1\lambda_1, \quad \lambda_1\delta_1\varkappa_1\gamma_1\lambda_1, \quad \lambda_1\gamma_1c_1\delta_1\lambda_1$$

ersetzt werden kann. Also umkreist die Grösse v zuerst im negativen Sinne den singulären Punkt 0, dann den singulären Punkt 1, woran sich ein positiver Umlauf um den Punkt 0 und ein positiver Umlauf um den Punkt 1 anschliessen. Man findet auf diese Weise für $\mathfrak{E}(a, b)$ den Ausdruck

$$\mathfrak{E}(a,b) = -e^{-\pi i(a-1)} \int_{\lambda_1}^{\overline{(0-,1-,0,1)}} v^{-a-b}(1-v)^{b-1}\,dv.$$

Der Werth der zu integrirenden Function $v^{-a-b}(1-v)^{b-1}$ an der unteren Grenze $v = \lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$ wird mit Hülfe der Gleichung (22) bestimmt. Substituirt man in A' und B die Werthe

$$\log \lambda = \log \frac{1}{\lambda_1} = -\log \lambda_1$$

und

$$\log(\lambda - 1) = \log \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} = \log(1-\lambda_1) - \log \lambda_1,$$

so wird das Product $A'B$ gleich dem Ausdruck (cfr. (7))

$$A'B = e^{(2-a-b)\log\lambda_1} e^{(b-1)\log(1-\lambda_1)},$$

in welchem die reellen Werthe von $\log \lambda_1$ und $\log(1-\lambda_1)$ zu nehmen sind. Da nun nach (21)

$$f(\lambda) = e^{-\pi i(a-1)} \lambda^{a-1}(\lambda-1)^{b-1} = e^{-\pi i(a-1)} \lambda_1^{2-a-b}(1-\lambda_1)^{b-1}$$

ist, so nimmt die Gleichung (22), welche den speciellen, zur unteren Integralgrenze gehörigen Werth $f(\lambda)$ angiebt, nach Multiplication mit $e^{\pi i(a-1)}\lambda_1^{-2}$ die Gestalt

$$\lambda_1^{-a-b}(1-\lambda_1)^{b-1} = \lambda_1^{-2} A'B = e^{-(a+b)\log\lambda_1} e^{(b-1)\log(1-\lambda_1)}$$

an. Folglich kommt an der unteren Grenze des in Rede stehenden Integrals der Werth

(23) $$[v^{-a-b}(1-v)^{b-1}]_{v=\lambda_1} = e^{-(a+b)\log\lambda_1} e^{(b-1)\log(1-\lambda_1)},$$

in welchem $\log \lambda_1$ und $\log(1-\lambda_1)$ die reellen Logarithmen bedeuten, zur Anwendung. Die Variable v führt die negativen Umläufe um die Punkte 0 und 1 vor den positiven aus. Indessen kann man nach Formel (13) der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" (wo $\sigma = 1 - a - b$, $\tau = b$ zu setzen ist), unter Beibehaltung des nämlichen Werthes der zu integrirenden Function an der unteren Grenze, die positiven Umläufe den negativen vorangehen lassen, wenn man gleichzeitig das Integral mit dem Factor

$$e^{-2\pi i(1-a-b)} e^{-2\pi i b} = e^{2\pi i a}$$

multiplicirt. Also ist

$$\mathfrak{E}(a,b) = -e^{\pi i(a-1)} \int_{\lambda_1}^{\overline{(0,1,0-,1-)}} v^{-a-b}(1-v)^{b-1}\,dv.$$

Endlich dürfen (nach Formel (8) der Abh.), wenn man rechts den Factor -1 hinzufügt, die Punkte 0 und 1 bei der auf den Integrationsweg bezüglichen Angabe mit einander vertauscht werden. Hierdurch entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{E}(a,b) = e^{\pi i(a-1)} \int_{\lambda_1}^{\overline{(1,0,1-,0-)}} v^{-a-b}(1-v)^{b-1}\,dv,$$

deren rechte Seite mit dem oben erwähnten Ausdruck $\mathfrak{E}(1-a-b, b)$ identisch wird, wenn man die untere Integralgrenze c durch λ_1 ersetzt. Da aber die Einführung des (ebenfalls zwischen 0 und 1 liegenden) Punktes λ_1 an Stelle von c den Werth des Integrals nicht ändert, und da nach (23) der Anfangswerth der zu integrirenden Function an der unteren Grenze $v = \lambda_1$ dem vorgeschriebenen Zweige derselben angehört (cfr. (2)), so ist hiermit die Formel (20)

$$\mathfrak{E}(a, b) = \mathfrak{E}(1-a-b, b) = \mathfrak{E}(a, 1-a-b)$$

aufs Neue bewiesen.

§ 2.

Es werde nunmehr vorausgesetzt, dass der reelle Bestandtheil der Constante a positiv sei. Dann kann man den Punkt c dicht an den Punkt 0 heranrücken lassen (Fig. 1) und die Dimensionen der Curve $\mathfrak{P}$ unendlich klein wählen. In diesem Fall bezeichnet man durch $\overline{E}(a, b)$ das Integral

$$-e^{-\pi i b}\lim_{c=0}\overline{\int_c^{(1)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du,$$

dessen Integrationscurve einen positiven Umlauf um den Punkt $u = 1$ darstellt, und in welchem an der unteren Grenze $u = c$ die in (2) angegebenen Werthe von u^{a-1} und $(1-u)^{b-1}$ zur Anwendung kommen sollen. Wird zur Fixirung des genannten Zweiges der zu integrirenden Function nicht die untere Grenze c, sondern der Punkt λ benutzt (Fig. 1), so hat man, nachdem

$$-e^{-\pi i b}u^{a-1}(1-u)^{b-1} = u^{a-1}(u-1)^{b-1}$$

gesetzt ist, für u^{a-1} und $(u-1)^{b-1}$ im Punkte λ die Werthe $e^{(a-1)\log\lambda}$ und $e^{(b-1)\log(\lambda-1)}$ zu nehmen, in denen $\log\lambda$ und $\log(\lambda-1)$ die reellen Logarithmen bedeuten (§ 1). Das auf diese Weise eindeutig bestimmte Integral

$$(24)\quad \overline{E}(a, b) = -e^{-\pi i b}\overline{\int_0^{(1)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}du = \overline{\int_0^{(1)}} u^{a-1}(u-1)^{b-1}du$$

steht, wenn ausser a auch b im reellen Theil positiv ist, zu dem Euler'schen Integral $E(a, b)$ in der Beziehung

$$(25)\quad \overline{E}(a, b) = (e^{\pi i b} - e^{-\pi i b})E(a, b) = 2i\sin(\pi b)E(a, b).$$

Denn im Fall $b > 0$ kann der Integrationsweg von $\overline{E}(a, b)$ auf einen doppelt durchlaufenen Abschnitt der reellen Axe (der dicht vor dem Punkte 1 endigt) und auf einen unendlich kleinen Kreis um den Punkt 1 reducirt werden, woraus die Formel (25) folgt.

Für das in § 1 behandelte Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ ergiebt sich, wenn der reelle Theil von a das positive Vorzeichen hat, die Gleichung

$$(26)\qquad \mathfrak{E}(a,b) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})\,\overline{E}(a,b).$$

Von den in (4) erwähnten vier Integralen, deren Summe gleich $\mathfrak{E}(a,b)$ ist, fallen das zweite und das vierte fort, sobald (im Fall $a>0$) die Curve $\mathfrak{P}$ unendlich klein genommen wird. Das erste und das dritte dieser Integrale haben dann die Summe

$$e^{-\pi i(a+b)}[1-e^{2\pi i a}]\overline{\int_0^{(1)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du,$$

die, weil für u^{a-1} und $(1-u)^{b-1}$ die nämlichen Bedingungen wie in (24) gelten, in die rechte Seite der Gleichung (26) übergeht. Sind beide Argumente a, b im reellen Theil positiv, so wird aus (26) und (25) die Gleichung (6) erhalten.

Die Formel der theilweisen Integration führt zu den Gleichungen

$$\begin{cases} \overline{E}(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b}\,\overline{E}(a,b), \\ \overline{E}(a,b+1) = -\dfrac{b}{a+b}\,\overline{E}(a,b). \end{cases}$$

Bezeichnet also m eine positive ganze Zahl, so ist

$$(27)\qquad \begin{cases} \overline{E}(a+m,b) = \dfrac{a(a+1)\ldots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+m-1)}\,\overline{E}(a,b), \\ \overline{E}(a,b+m) = (-1)^m\,\dfrac{b(b+1)\ldots(b+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+m-1)}\,\overline{E}(a,b), \end{cases}$$

und

$$(27\text{a})\qquad \overline{E}(a,b-m) = (-1)^m\,\frac{(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-m)}{(b-1)(b-2)\ldots(b-m)}\,\overline{E}(a,b).$$

Für ein positives ganzzahliges b nimmt das Integral $\overline{E}(a,b)$, da die zu integrirende Function dann in der Umgebung des Punktes $u=1$ stetig und eindeutig bleibt, den Werth Null an. Ausserdem verschwindet $\overline{E}(a,b)$, sobald die Summe $a+b$ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null wird, wie aus (27) folgt. Man hat demnach die Gleichungen

$$(28)\qquad \begin{cases} \overline{E}(a,m) = 0, \\ \overline{E}(a,-a) = 0, \qquad \overline{E}(a,-m-a) = 0, \end{cases}$$

in denen m irgend eine positive ganze Zahl, und a einen beliebigen Werth, dessen reeller Bestandtheil positiv ist, bedeutet.

Ist b gleich einer negativen ganzen Zahl $-m$ oder gleich Null, so kommt, nachdem man in (24) die Reihe

$$u^{a-1}(1-u)^{b-1} = [1-(1-u)]^{a-1}(1-u)^{-m-1}$$
$$= (1-u)^{-m-1}\Big[1-\frac{a-1}{1}(1-u)+\cdots+(-1)^m\frac{(a-1)\ldots(a-m)}{1.2\ldots m}(1-u)^m+\cdots\Big]$$

substituirt hat, für die Integration nach u nur der mit $(1-u)^{-1}$ multiplicirte Summandus in Betracht. Man findet auf diese Weise, da $e^{-\pi i b}$ gleich $(-1)^m$ wird, die Werthe

$$(29)\qquad \begin{cases} \overline{E}(a, 0) = 2\pi i, \\ \overline{E}(a, -m) = 2\pi i\,\dfrac{(a-1)(a-2)\ldots(a-m)}{1.2\ldots m}, \end{cases}$$

die man auch aus (26) und (16) ableiten kann.

In die Gleichung (25) werde für das Euler'sche Integral $E(a, b)$ das Product (18) und für $\sin(\pi b)$ das Product

$$\sin(\pi b) = \pi b \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(\nu+b)(\nu-b)}{\nu^2}$$

eingesetzt. Dann ergiebt sich für $\overline{E}(a, b)$ der Ausdruck

$$(30)\qquad \overline{E}(a, b) = 2\pi i\,\frac{a+b}{a} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{a+b+\nu}{a+\nu}\left(1-\frac{b}{\nu}\right).$$

Während das Integral (24) nur unter der Voraussetzung, dass der reelle Bestandtheil von a positiv ist, einen bestimmten Sinn hat, kann man die Gleichung (30) auch für negative Werthe von a gelten lassen.

Die Grösse $\overline{E}(a, b)$ bleibt unverändert, wenn man das zweite Argument b durch $1-a-b$ ersetzt. Denn aus der Formel (20)

$$\mathfrak{E}(a, b) = \mathfrak{E}(a, 1-a-b)$$

folgt nach Berücksichtigung von (26)

$$(31)\qquad \overline{E}(a, b) = \overline{E}(a, 1-a-b).$$

Um diese Eigenschaft des Integrals $\overline{E}(a, b)$ direct zu beweisen, wendet man auf den Ausdruck (24)

$$\overline{E}(a, b) = \int_0^{\overline{(1)}} u^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du$$

die Substitution $u-1 = \frac{1}{v-1}$ an. Als Weg der Variable u möge ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkte $u=1$ gewählt werden; dann erhält man als Weg der Variable v ebenfalls einen Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkte $v=1$, da die Gleichung $u-1=e^{\vartheta i}$ in $v-1=e^{-\vartheta i}$ übergeht. Im Punkte $u=\lambda$ (Fig. 1), der hier $u=2$ ist, wird die Function $u^{a-1}(u-1)^{b-1}$ nach der Voraussetzung gleich $e^{(a-1)\log 2}$, wo $\log 2$ den reellen Logarithmus bedeutet. Zu $u=2$ gehört der Werth $v=2$, zu $u=0$ der Werth $v=0$. Indem man bei dem Integral nach v, unter Multiplication

mit dem Factor — 1, den Integrationsweg umkehrt und hierdurch die negative Drehungsrichtung in die positive verwandelt, findet man

$$\overline{E}(a, b) = \overline{\int_0^{(1)}} v^{a-1}(v-1)^{-a-b} dv.$$

Dieses Integral ist aber nach (24) gleich $\overline{E}(a, 1-a-b)$, da die Function $v^{a-1}(v-1)^{-a-b}$ im Punkte $v=2$ den Werth $e^{(a-1)\log 2}$, in welchem $\log 2$ reell ist, annimmt. Mithin sind $\overline{E}(a, b)$ und $\overline{E}(a, 1-a-b)$ identische Grössen.

Transformirt man das Integral (24) durch die Substitution $u = 1-w$, so ergiebt sich, da die Variable w vom Punkte 1 aus einen positiven Umlauf um den Punkt 0 macht, die Gleichung

$$(32)\qquad \overline{E}(a, b) = e^{-\pi i b} \overline{\int_1^{(0)}} w^{b-1}(1-w)^{a-1} dw.$$

Für Punkte w, welche reell und der unteren Integralgrenze 1 benachbart sind, haben die Potenzen w^{b-1}, $(1-w)^{a-1}$ in (32) die Werthe $e^{(b-1)\log w}$, $e^{(a-1)\log(1-w)}$, in denen $\log w$, $\log(1-w)$ die reellen Logarithmen bedeuten.

In (24) werde ferner eine Variable t durch die Gleichung $u = \frac{1}{t}$ eingeführt. Dann ist

$$u^{a-1}(1-u)^{b-1} du = - t^{-a-b}(t-1)^{b-1} dt.$$

Zieht man in der u-Ebene um den Punkt $u=1$ als Mittelpunkt einen kleinen Kreis mit dem Radius l, so kann man in (24) den Weg der Variable u aus der doppelt durchlaufenen Strecke von $u=0$ bis $u=1-l$ und dem genannten Kreise zusammensetzen. Die Kreisfläche um $u=1$ wird in der t-Ebene durch eine Kreisfläche, die den Punkt $t=1$ enthält, abgebildet, und zwar entspricht dem positiven Umlauf um $u=1$ ein positiver Umlauf um $t=1$. Auf dem ersten Theil der Bahn der Variable t, welcher durch den Abschnitt der positiven reellen Axe von $t=\infty$ bis $t=\frac{1}{1-l}$ gebildet wird, hat man, gemäss der Definition von $\overline{E}(a, b)$, die Potenzen t^{-a-b}, $(t-1)^{b-1}$ gleich $e^{-(a+b)\log t}$, $e^{(b-1)\log(t-1)}$, wo $\log t$ und $\log(t-1)$ reell sind, zu nehmen. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung wird für $\overline{E}(a, b)$ der Ausdruck

$$(32\text{a})\qquad \overline{E}(a, b) = e^{-\pi i b} \overline{\int_\infty^{(1)}} t^{-a-b}(t-1)^{b-1} dt$$

erhalten.

§ 3.

Man ziehe in der u-Ebene um den Punkt $u = 0$ als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius k und betrachte ein Integral

$$\int e^u u^{a-1}\, du,$$

in welchem die Variable u zuerst den Abschnitt der negativen reellen Axe von $-\infty$ bis $-k$, dann den genannten Kreis (im positiven Sinne) durchläuft und vom Punkte $-k$ längs der negativen reellen Axe zu $-\infty$ zurückkehrt. In dem Schnittpunkte $u = k$ des Kreises mit der positiven reellen Axe werde für die Potenz u^{a-1} der Werth $e^{(a-1)\log k}$, in welchem $\log k$ den reellen Logarithmus bedeutet, genommen. Das hierdurch definirte Integral soll durch $\overline{\Gamma}(a)$ bezeichnet werden. Man hat für dasselbe (nach § 1 der Abh.) den abgekürzten Ausdruck

$$\overline{\Gamma}(a) = \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1}\, du. \tag{33}$$

Der horizontale Strich über dem Buchstaben Γ soll, wie der Strich über dem rechts stehenden Integralzeichen, auf die geschlossene Integrationscurve hindeuten.

Die Grösse des Kreisradius k hat auf den Werth des Integrals (33) keinen Einfluss. Denn wenn man den gewählten Kreis durch irgend einen concentrischen ersetzt, so liegt auf der von den zwei Kreisen begrenzten ringförmigen Fläche kein singulärer Punkt der zu integrirenden Function. Ebenso kann statt des oben angeführten Weges jede beliebige, sich selbst nicht schneidende Curve, die in $-\infty$ beginnt und endigt und den Punkt $u = 0$ umschliesst, als Integrationsweg von $\overline{\Gamma}(a)$ genommen werden.

Substituirt man in (33) $u = -v$, so ergiebt sich, da die Variable v von $+\infty$ aus einen positiven Umlauf um den Punkt 0 ausführt, die Gleichung

$$\overline{\Gamma}(a) = -\overline{\int}_{+\infty}^{(0)} e^{-v}(-v)^{a-1}\, dv.$$

Hierin ist

$$(-v)^{a-1} = e^{-\pi i(a-1)}\, v^{a-1} = -e^{-\pi i a}\, v^{a-1}$$

zu setzen, wenn man bestimmt, dass für die Potenz v^{a-1} im Punkte $v = k$ der Werth $e^{(a-1)\log k}$, wo $\log k$ reell ist, zur Anwendung kommen soll. Denn da zu v^{a-1} der Factor $e^{\pi i(a-1)}$ hinzutritt, wenn v im positiven Sinne längs des Halbkreises vom Punkte k zum Punkte $-k$ übergeht, so ist nach obiger Gleichung die Potenz $(-v)^{a-1}$ im

Punkte $v = -k$ gleich dem Producte aus $e^{-\pi i(a-1)} e^{(a-1)\log k}$ und $e^{\pi i(a-1)}$, d. h. gleich $e^{(a-1)\log k}$ (wo $\log k$ reell), was der für u^{a-1} aufgestellten Bedingung entspricht. Demnach ist $\overline{\Gamma}(a)$ gleich dem Ausdruck

$$(34) \qquad \overline{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \overline{\int}_{+\infty}^{(0)} e^{-v} v^{a-1}\, dv,$$

in welchem für ein reelles a die positiven reellen Werthe von v^{a-1} auf der zuerst durchlaufenen Strecke der positiven reellen Axe zu nehmen sind.

Ist der reelle Bestandtheil von a positiv, so besteht zwischen $\overline{\Gamma}(a)$ und dem Euler'schen Integrale zweiter Art

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1}\, du$$

die Relation

$$(35) \qquad \overline{\Gamma}(a) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})\Gamma(a) = 2i \sin(\pi a)\Gamma(a).$$

Denn in diesem Falle darf man den Kreisradius k unendlich klein wählen, wodurch das Integral (34) sich in das Product $(e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})\Gamma(a)$ verwandelt, da das Kreisintegral zu vernachlässigen ist, und die Potenz v^{a-1} durch den Umlauf um $v = 0$ den Factor $e^{2\pi i a}$ aufnimmt.

Das Integral $\overline{\Gamma}(a)$ stellt eine transcendente ganze Function von a dar. Der Beweis, dass die unendlich entfernten Strecken des Integrationsweges nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum Werthe des Integrals liefern, wird für $\overline{\Gamma}(a)$ in derselben Art wie für das Euler'sche Integral $\Gamma(a)$ geführt. Auf den im Endlichen liegenden Theilen des Integrationsweges von $\overline{\Gamma}(a)$ hat aber die zu integrirende Function $e^u u^{a-1}$, da ein bestimmter Zweig der Potenz u^{a-1} gewählt worden ist, stets einen eindeutigen endlichen Werth. Also ist $\overline{\Gamma}(a)$ in der That für jedes endliche a stetig und eindeutig.

Durch theilweise Integration ergiebt sich für $\overline{\Gamma}(a+1)$ die Gleichung

$$\overline{\Gamma}(a+1) = \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^a\, du = [e^u u^a]_{u=-\infty}^{u=-\infty} - a \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1}\, du,$$

aus welcher, da der vom Integralzeichen freie Summandus verschwindet, die Formel

$$(36) \qquad \overline{\Gamma}(a+1) = -a\overline{\Gamma}(a)$$

folgt. Durch wiederholte Benutzung derselben erhält man die weiteren Gleichungen

$$(37) \qquad \overline{\Gamma}(a+m) = (-1)^m a(a+1)\cdots(a+m-1)\,\overline{\Gamma}(a),$$

$$(38) \qquad \overline{\Gamma}(a-m) = (-1)^m \frac{\overline{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\cdots(a-m)},$$

in denen m eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Die Anwendungen, welche das Euler'sche Integral $\Gamma(a)$ bei den linearen Differentialgleichungen findet, beruhen zum grossen Theile auf der zu (37) analogen Formel

$$\Gamma(a+m) = a(a+1)\cdots(a+m-1)\,\Gamma(a).$$

Bei gewissen Differentialgleichungen, die sich durch bestimmte Integrale lösen lassen, wird nämlich, wenn man zu den Reihenentwickelungen übergeht und m den Stellenzeiger nennt, durch die erwähnte Formel der Factor $a(a+1)\cdots(a+m-1)$ in den Zähler des allgemeinen Terms der Reihe eingeführt, während $\Gamma(a)$ als Factor vor die ganze Reihe tritt. Diese Anwendungen erfahren nun eine Ausdehnung, falls man (durch Aenderung des Integrationsweges) das Integral $\bar{\Gamma}(a)$ an die Stelle des Euler'schen Integrals $\Gamma(a)$ treten lässt. Denn hierdurch wird es möglich, mit Hülfe der Gleichung (38) Factoren von der Form $(a-1)(a-2)\cdots(a-m)$ in den Nenner des allgemeinen Terms der Reihe zu bringen. Letzteres ist bei dem Euler'schen Integral nicht ausführbar, da mit wachsendem m die Differenz $a-m$ negativ, also das Integral $\Gamma(a-m)$ divergent wird.

Die zwei geradlinigen Integrale, die in $\bar{\Gamma}(a)$ enthalten sind, heben sich gegenseitig auf, sobald a ganzzahlig, mithin $e^u u^{a-1}$ in der ganzen u-Ebene eindeutig wird. Ist a zugleich positiv, so verschwindet auch das übrigbleibende Kreisintegral. Ist dagegen a gleich einer negativen ganzen Zahl $-m$, bezw. gleich 0, so kommt, wenn e^u gleich $1+\frac{u}{1}+\cdots$ gesetzt wird, in der Entwickelung der zu integrirenden Function die Potenz u^{-1} vor, und zwar mit dem Coefficienten $\frac{1}{1.2\ldots m}$, bezw. 1. Demnach ergeben sich die Gleichungen

$$(39)\qquad \bar{\Gamma}(m) = 0,$$

$$(40)\qquad \bar{\Gamma}(0) = 2\pi i, \quad \bar{\Gamma}(-m) = \frac{2\pi i}{1.2\ldots m},$$

in denen m wiederum irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet. Die Grösse $\bar{\Gamma}(a)$ wird unendlich klein, wenn der reelle Theil von a sich dem Werthe $-\infty$ nähert. Dies folgt für ein ganzzahliges Argument aus (40) und für ein nichtganzzahliges aus (38).

Führt man in (35) für das Euler'sche Integral $\Gamma(a)$ und für $\sin(\pi a)$ die unendlichen Producte

$$\Gamma(a) = \lim_{(n=\infty)}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\,n^a\right],$$

$$\sin(\pi a) = \pi a \lim_{(n=\infty)} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{(\nu+a)(\nu-a)}{\nu^2}$$

ein, so entsteht für $\bar{\Gamma}(a)$ die Gleichung

$$(41)\qquad \bar{\Gamma}(a) = 2\pi i \lim_{(n=\infty)}\left[\frac{(1-a)(2-a)\ldots(n-a)}{1.2\ldots n}\,n^a\right].$$

Aus (35) leitet man ferner die Formeln

(42) $$\overline{\Gamma}(a)\,\overline{\Gamma}(1-a) = -4\pi\sin(\pi a),$$

(43) $$\overline{\Gamma}(a) = \frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)}$$

ab, da $\sin(\pi[1-a]) = \sin(\pi a)$, und

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

ist. Endlich werde die Gleichung, welche die Euler'schen Integrale erster und zweiter Art mit einander verbindet,

$$E(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

durch $(e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})(e^{\pi i b} - e^{-\pi i b})$ multiplicirt. Dann ergiebt sich, nach Berücksichtigung von (6) und (35), die Formel

(44) $$\mathfrak{E}(a, b) = \frac{\overline{\Gamma}(a)\,\overline{\Gamma}(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

§ 4.

Die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe

(45) $$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)\,x - \varrho]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

ist in § 3 der vorstehenden Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" im allgemeinen Falle durch bestimmte Integrale, deren Integrationswege aus Doppelumläufen bestehen, gelöst worden. Es wurde daselbst eine Linie $\mathfrak{A}$ vom Punkte 0 zum Punkte x, eine Linie $\mathfrak{B}$ vom Punkte 1 zum Punkte x, eine Linie $\mathfrak{C}$ vom Punkte 0 zum Punkte 1 gezogen, und die Umkreisung dieser Linien durch die Integrationsvariable u in analoger Weise wie die Umkreisung der einzelnen singulären Punkte (§ 1 der Abh.) bezeichnet. Als Lösungen der Differentialgleichung (45) ergaben sich (l. c. (53) und (54)) die bestimmten Integrale

(46) $$\overline{\int_c^{(\mathfrak{A},1,\mathfrak{A}-,1-)}}\Phi(u,x)\,du,\quad \overline{\int_c^{(x,0,x-,0-)}}\Phi(u,x)\,du,$$

(47) $$\overline{\int_c^{(\mathfrak{B},0,\mathfrak{B}-,0-)}}\Phi(u,x)\,du,\quad \overline{\int_c^{(x,1,x-,1-)}}\Phi(u,x)\,du,$$

(48) $$\overline{\int_c^{(\mathfrak{C},x,\mathfrak{C}-,x-)}}\Phi(u,x)\,du,\quad \overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}}\Phi(u,x)\,du,$$

in denen $\Phi(u, x)$ die Function

(49) $$\Phi(u,x) = (u-x)^{-\beta}\,u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1},$$

und c eine beliebige, von 0 und 1 verschiedene Constante bedeutet.

Die Integrale (46) sind die zwei Hauptintegrale der Differentialgleichung für die Umgebung des Punktes $x = 0$. Um dieselben nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln, setzt man den Abstand der Punkte x und 0 von einander als klein voraus. Bei dem ersten Integral (46) möge der Punkt c auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 angenommen werden. Zieht man durch c einerseits einen Kreis $\mathfrak{P}$, der den Punkt 0 zum Mittelpunkt hat und die Linie $\mathfrak{A}$ umschliesst, andererseits einen Kreis $\mathfrak{Q}$ mit dem Mittelpunkte 1 (Fig. 4), so kann der Integrationsweg des ersten Integrals (46) kurz durch

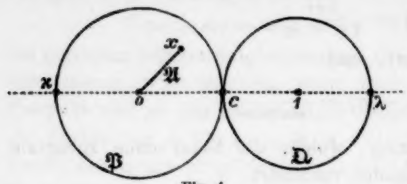

Fig. 4.

$$\mathfrak{P}^+, \ \mathfrak{Q}^+, \ \mathfrak{P}^-, \ \mathfrak{Q}^-$$

bezeichnet werden (§ 1 der Abh.). Jeder der Punkte dieses Integrationsweges hat vom Punkte 0 einen grösseren Abstand als der Punkt x, d. h. es ist mod. $\frac{x}{u} < 1$. In Folge dessen besteht für den in (49) vorkommenden Factor $(u - x)^{-\beta}$ die convergente Entwickelung

$$(50) \qquad (u - x)^{-\beta} = u^{-\beta}\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-\beta}$$
$$= u^{-\beta}\left[1 + \frac{\beta}{1}\,\frac{x}{u} + \frac{\beta(\beta+1)}{1\,.\,2}\,\frac{x^2}{u^2} + \cdots\right].$$

Substituirt man diesen Ausdruck in das betrachtete Integral, so treten in den einzelnen Summanden die Potenzen von x vor die Integralzeichen, und die zu integrirenden Functionen werden von x unabhängig. Als singuläre Punkte, die von u umkreist werden, sind dann nur noch die Punkte 0 und 1 vorhanden. Man erhält daher für das erste Integral (46) die Reihe

$$\overline{\int_c}^{(0,1,0-,1-)} u^{-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\left[1 + \frac{\beta}{1}\,\frac{x}{u} + \frac{\beta(\beta+1)}{1\,.\,2}\,\frac{x^2}{u^2} + \cdots\right] du$$
$$= G_0 + \frac{\beta}{1}\,G_1 x + \cdots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1\,.\,2\ldots m}\,G_m x^m + \cdots,$$

in der G_m das constante Integral

$$G_m = \overline{\int_c}^{(0,1,0-,1-)} u^{-\varrho-m}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

bedeutet. An der unteren Integralgrenze $u = c$ möge im ersten Integral (46) die Potenz $u^{\beta-\varrho}$ gleich $e^{(\beta-\varrho)\log c}$, ferner die in (50) vorkommende Potenz $u^{-\beta}$ gleich $e^{-\beta\log c}$ sein, wo unter $\log c$ der reelle Werth verstanden wird; die Potenz $(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$ soll, wenn u zum ersten Male

im Punkte λ eintrifft (Fig. 4), den Werth $e^{(\varrho-\alpha-1)\log(\lambda-1)}$, in welchem $\log(\lambda-1)$ reell ist, annehmen. Diese Bestimmungen übertragen sich auf das Integral G_m. Werden in dem Integrationswege von G_m (unter Beibehaltung des Anfangswerthes der zu integrirenden Function) die Punkte 0 und 1 hinsichtlich der Reihenfolge der Umkreisungen mit einander vertauscht, so tritt nur der Factor -1 zu dem Integral hinzu (Gl. (8) der Abh.). Indem man ausserdem mit $e^{\pi i(\varrho+m-1)}$, $=(-1)^m e^{\pi i(\varrho-1)}$, multiplicirt, hat man die Gleichung

$$(-1)^m e^{\pi i(\varrho-1)} G_m = e^{\pi i(\varrho+m)} \overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}} u^{-\varrho-m}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du,$$

deren rechte Seite nach § 1, Formel (8a), gleich $\mathfrak{E}(1-\varrho-m,\ \varrho-\alpha)$ ist. Somit ergiebt sich

$$G_m = (-1)^m e^{\pi i(1-\varrho)}\,\mathfrak{E}(1-\varrho-m,\ \varrho-\alpha).$$

Ist ϱ gleich 0 oder gleich einer negativen ganzen Zahl $-n$, so haben, nach (13), die Coefficienten $G_0, G_1, \ldots G_n$ den Werth Null, während die Coefficienten G_{n+1} etc. durch die Formeln (15) bestimmt werden. In diesem speciellen Falle beginnt die oben erhaltene Reihe mit der Potenz x^{n+1}, d. h. $x^{1-\varrho}$, und wird (abgesehen von einem constanten Factor) mit der durch das zweite Integral (46) ausgedrückten particulären Lösung identisch; die Differentialgleichung (45) hat dann bekanntlich in der Umgebung des Punktes $x=0$ im Allgemeinen noch ein logarithmisches Integral, worauf indessen hier nicht eingegangen werden soll. In allen übrigen Fällen kann man für $\mathfrak{E}(1-\varrho-m,\ \varrho-\alpha)$ nach (12) das Product

$$\mathfrak{E}(1-\varrho-m,\ \varrho-\alpha) = (-1)^m \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+m-1)}\,\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \varrho-\alpha)$$

setzen, so dass

$$G_0 = e^{\pi i(1-\varrho)}\,\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \varrho-\alpha),$$

$$G_m = e^{\pi i(1-\varrho)} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+m-1)}\,\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \varrho-\alpha)$$

wird. Auf diese Weise findet man für das erste Integral (46) den Ausdruck

$$(51)\quad \overline{\int_c^{(\mathfrak{A},1,\mathfrak{A}-,1-)}} \Phi(u,x)\,du = e^{\pi i(1-\varrho)}\,\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \varrho-\alpha)\,F(\alpha,\beta;\varrho;x),$$

wo $F(\alpha,\beta;\varrho;x)$ die Gauss'sche hypergeometrische Reihe

$$(52)\quad F(\alpha,\beta;\varrho;x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\varrho}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)}x^2 + \cdots$$

bedeutet.

Abgesehen von dem soeben erwähnten Falle, dass ϱ eine negative ganze Zahl oder Null ist, nimmt die auf der rechten Seite von (51)

stehende Constante $\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \varrho-\alpha)$, welche man nach (20) auch $\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \alpha)$ oder $\mathfrak{E}(\alpha,\ \varrho-\alpha)$ schreiben kann, den Werth Null an, wenn α oder $\varrho-\alpha$ eine positive ganze Zahl ist. Das erste Integral (46) verschwindet dann identisch; es tritt aber ein Integral mit einfacherer Integrationscurve an seine Stelle. Man setze zunächst voraus, dass $\varrho-\alpha$, aber nicht α, eine positive ganze Zahl sei. In diesem Falle wird statt des ersten Integrals (46) das Integral

$$\overline{\int_1^{(\mathfrak{A})}} \Phi(u, x)\, du$$

genommen, das der Gleichung (45) genügt (s. d. Abh.), und das convergirt, sobald der reelle Theil von $\varrho-\alpha$ positiv ist. Der Integrationsweg desselben, der aus einem einmaligen Umlauf um die Linie $\mathfrak{A}$ besteht, kann als ein Kreis mit dem Mittelpunkte $u=0$ und mit einem Radius, der den Werth 1 nicht völlig erreicht, gedacht werden, so dass für den in $\Phi(u,x)$ enthaltenen Factor $(u-x)^{-\beta}$ wiederum die Entwickelung (50) gilt. Indem man G_m' als das Integral

$$G_m' = \overline{\int_1^{(0)}} u^{-\varrho-m}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

definirt, findet man

$$\overline{\int_1^{(\mathfrak{A})}} \Phi(u, x)\, du =$$
$$= G_0' + \frac{\beta}{1} G_1' x + \cdots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1\,.\,2\ldots m} G_m' x^m + \cdots.$$

Die Grösse G_m' ist nach (32), wenn man für $(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$ das Product aus $e^{\pi i(\varrho-\alpha-1)}$ und $(1-u)^{\varrho-\alpha-1}$ setzt und die Anfangswerthe von $u^{-\varrho-m}$ und $(1-u)^{\varrho-\alpha-1}$ in der für (32) angegebenen Art bestimmt, gleich dem Ausdruck

$$G_m' = (-1)^m e^{-\pi i\alpha}\, \overline{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\varrho-m)$$

oder, wegen (27a),

$$G_m' = e^{-\pi i\alpha} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+m-1)}\, \overline{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\varrho).$$

Man gelangt daher zu der Gleichung

$$(53)\quad \overline{\int_1^{(\mathfrak{A})}} \Phi(u, x)\, du = e^{-\pi i\alpha}\, \overline{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\varrho)\, F(\alpha, \beta;\ \varrho;\ x),$$

in welcher der reelle Bestandtheil von $\varrho-\alpha$ nach der Voraussetzung positiv sein soll. Die Constante $\overline{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\varrho)$, die nach (31) mit $\overline{E}(\varrho-\alpha,\ \alpha)$ identisch ist, verschwindet nur, wenn $1-\varrho$ oder wenn α eine positive ganze Zahl wird.

Da die Function $\Phi(u, x)$ auf die Form

$$\Phi(u, x) = u^{-\alpha-1}\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-\beta}\left(1 - \frac{1}{u}\right)^{\varrho-\alpha-1}$$

gebracht werden kann (cfr. (49)), so nähert sich das Product $u\Phi(u, x)$ mit unbegrenzt wachsendem u dem Werthe Null, wenn der reelle Theil der Constante α positiv ist. In diesem Falle ist das Integral

$$\overline{\int_{\infty}^{(1)}}\Phi(u, x)\,du$$

convergent; dasselbe unterscheidet sich nur durch einen constanten Factor von dem ersten Integral (46) (cfr. Gl. (34) der Abh.), an dessen Stelle es angewendet wird, wenn α ganzzahlig und positiv ist. Der Integrationsweg beginne und endige im unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe, Man darf, da x zur Umgebung des Punktes 0 gehören soll, mod. $x <$ mod. u annehmen, also für $(u - x)^{-\beta}$ wieder die Reihe (50) substituiren. Hierdurch ergiebt sich

$$\overline{\int_{\infty}^{(1)}}\Phi(u, x)\,du =$$

$$= G_0'' + \frac{\beta}{1}G_1''x + \cdots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots m}G_m''x^m + \cdots,$$

wo

$$G_m'' = \overline{\int_{\infty}^{(1)}}u^{-\varrho-m}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

gesetzt ist. Aber aus (32a) folgt

$$\overline{E}(\alpha+m, \varrho-\alpha) = e^{-\pi i(\varrho-\alpha)}\overline{\int_{\infty}^{(1)}}u^{-\varrho-m}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du.$$

Daher erhält man für G_m'', wenn der in (32a) angewendete Zweig der zu integrirenden Function gewählt wird, den Ausdruck

$$G_m'' = e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\overline{E}(\alpha+m, \varrho-\alpha),$$

der durch (27) in

$$G_m' = e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+m-1)}\overline{E}(\alpha, \varrho-\alpha)$$

übergeht. Auf diese Weise entsteht für das obige Integral die Gleichung

$$(54)\qquad \overline{\int_{\infty}^{(1)}}\Phi(u, x)\,du = e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\overline{E}(\alpha, \varrho-\alpha)\,F(\alpha, \beta; \varrho; x),$$

in der α eine im reellen Theile positive Constante bezeichnet.

Ist sowohl der reelle Theil von α als auch der von $\varrho - \alpha$ positiv, so convergirt bekanntlich das Integral

(55) $$\int_1^\infty \Phi(u, x)\, du = \int_1^\infty (u - x)^{-\beta}\, u^{\beta-\varrho}(u - 1)^{\varrho-\alpha-1}\, du,$$

das für mod. $x < 1$ mit dem Producte

$$E(\alpha,\ \varrho - \alpha)\, F(\alpha,\ \beta;\ \varrho;\ x)$$

identisch wird.

Bei dem zweiten Integral (46)

$$\int_c^{\overline{(x,0,x-,0-)}} \Phi(u, x)\, du = \int_c^{\overline{(x,0,x-,0-)}} (u - x)^{-\beta}\, u^{\beta-\varrho}\, (u - 1)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

möge der Punkt c, welcher die untere Grenze bildet, auf der Verbindungslinie der Punkte 0 und x angenommen werden (Fig. 5). Man zieht durch c zwei geschlossene Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in der Art, dass $\mathfrak{P}$ den Punkt 0, $\mathfrak{Q}$ den Punkt x umschliesst, während der Punkt 1

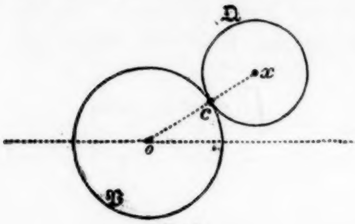

Fig. 5.

ausserhalb beider Curven bleibt; dann kann der Weg der Variable u kurz durch $\mathfrak{Q}^+$, $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{Q}^-$, $\mathfrak{P}^-$ bezeichnet werden. Das Integral wird durch die Substitution $u = vx$ umgeformt, aus der

$$\Phi(u, x)\, du = (-1)^{\varrho-\alpha-\beta+1}\, x^{1-\varrho}\, v^{\beta-\varrho}\,(1 - v)^{-\beta}(1 - vx)^{\varrho-\alpha-1}\, dv$$

folgt, und die Potenz $(1 - vx)^{\varrho-\alpha-1}$ in die Reihe

$$1 - \frac{\varrho - \alpha - 1}{1}\, vx + \frac{(\varrho - \alpha - 1)(\varrho - \alpha - 2)}{1\,.\,2}\, v^2x^2 - \cdots$$

entwickelt. Den Punkten $u = 0$ und $u = x$ entsprechen die Punkte $v = 0$ und $v = 1$; die Fig. 5 liefert daher in der v-Ebene eine Figur von der Art der Fig. 1. Der Ausgangspunkt der von v durchlaufenen Curve heisse c_1; derselbe liegt auf der reellen Axe zwischen 0 und 1. Man hat hiernach, wenn $(-1)^{\varrho-\alpha-\beta+1}$ durch $e^{\pi i(\varrho-\alpha-\beta+1)}$ ersetzt wird, die Gleichung

$$e^{\pi i(\alpha+\beta-\varrho-1)}\, x^{\varrho-1} \int_c^{\overline{(x,0,x-,0-)}} \Phi(u, x)\, du =$$

$$= \int_{c_1}^{\overline{(1,0,1-,0-)}} v^{\beta-\varrho}(1-v)^{-\beta}\left[1 + \frac{\alpha-\varrho+1}{1} vx + \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1.2} v^2x^2 + \cdots\right] dv.$$

An der unteren Integralgrenze c_1 mögen für $v^{\beta-\varrho}$, $(1 - v)^{-\beta}$ die

Werthe $e^{(\beta-\varrho)\log c_1}$, $e^{-\beta\log(1-c_1)}$, in denen $\log c_1$ und $\log(1-c_1)$ reell sind, genommen werden. Dann ist nach (3)

$$\overline{\int}_{c_1}^{(1,0,1-,0-)} v^{\beta-\varrho+m}(1-v)^{-\beta}\,dv = e^{\pi i(m-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+m+1,\ 1-\beta),$$

wofür man nach (11), unter der Voraussetzung, dass $\varrho-1$ nicht eine positive ganze Zahl ist, das Product

$$e^{-\pi i\varrho}\,\frac{(\beta-\varrho+1)(\beta-\varrho+2)\dots(\beta-\varrho+m)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\dots(m+1-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta)$$

schreiben kann. Die Reihenentwickelung für das zweite Integral (46) lautet also

$$(56)\qquad \overline{\int}_{c}^{(x,0,x-,0-)}\Phi(u,x)\,du =$$

$$= e^{\pi i(1-\alpha-\beta)}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,1-\beta)x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1,\beta-\varrho+1;2-\varrho;x),$$

woselbst F das in (52) angegebene Functionszeichen bedeutet.

Die zwei Integrale (46) stellen eine und dieselbe particuläre Lösung der Gleichung (45) dar, sobald die Constante ϱ ganzzahlig ist. Dies gilt nicht allein in dem früher erwähnten Fall, dass ϱ eine negative ganze Zahl oder Null ist, sowie im Fall $\varrho=1$, sondern auch, wenn $\varrho-1$ gleich einer positiven ganzen Zahl wird. Von den soeben genannten Coefficienten $\mathfrak{E}(\beta-\varrho+m+1,\ 1-\beta)$, die nach (20) gleich $\mathfrak{E}(\varrho-m-1,\ 1-\beta)$ sind, nehmen, wenn $\varrho-1$ gleich der positiven ganzen Zahl n ist, die n ersten, welche für $m=0,1,\dots n-1$ erhalten werden, den Werth Null an. In Folge dessen wird das Anfangsglied der Entwickelung des zweiten Integrals (46) nach steigenden Potenzen von x gleich einer Constanten, und eine einfache Rechnung zeigt, dass, abgesehen von einem constanten Factor, die zwei Integrale (46) dann identisch sind. Als Ergänzung derselben tritt (specielle Fälle ausgenommen) ein logarithmisches Integral hinzu.

Ist $\beta-\varrho+1$ oder $1-\beta$ eine positive ganze Zahl, so verschwindet das zweite Integral (46) für beliebige Werthe von x. An Stelle desselben kann man jedoch, als particuläre Lösung der Gleichung (45), das Integral

$$(57)\qquad \overline{\int}_{0}^{(x)}\Phi(u,x)\,du$$

anwenden, sobald der reelle Theil von $\beta-\varrho+1$, und das Integral

$$(58)\qquad \overline{\int}_{x}^{(0)}\Phi(u,x)\,du,$$

sobald der reelle Theil von $1-\beta$ positiv ist. Auch in (57) und (58) substituirt man $u=vx$ und entwickelt die Potenz $(1-vx)^{\varrho-\alpha-1}$ nach

dem binomischen Satze. Die Rechnung wird der zuvor angestellten völlig analog. Man erhält die Gleichungen

$$e^{\pi i(\alpha+\beta-\varrho-1)}\,x^{\varrho-1}\overline{\int_0^{(x)}}\Phi(u,x)\,du=$$

$$=\overline{\int_0^{(1)}}v^{\beta-\varrho}(1-v)^{-\beta}\left[1+\frac{\alpha-\varrho+1}{1}vx+\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1.2}v^2x^2+\cdots\right]dv,$$

$$e^{\pi i(\alpha+\beta-\varrho-1)}\,x^{\varrho-1}\overline{\int_x^{(0)}}\Phi(u,x)\,du=$$

$$=\overline{\int_1^{(0)}}v^{\beta-\varrho}(1-v)^{-\beta}\left[1+\frac{\alpha-\varrho+1}{1}vx+\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1.2}v^2x^2+\cdots\right]dv$$

und setzt in der ersten, gemäss (24) und (27),

$$\overline{\int_0^{(1)}}v^{\beta-\varrho+m}(1-v)^{-\beta}\,dv=e^{-\pi i\beta}\,\overline{E}(\beta-\varrho+m+1,\ 1-\beta)=$$

$$=e^{-\pi i\beta}\,\frac{(\beta-\varrho+1)(\beta-\varrho+2)\ldots(\beta-\varrho+m)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(m+1-\varrho)}\,\overline{E}(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta),$$

in der zweiten, gemäss (32) und (27),

$$\overline{\int_1^{(0)}}v^{\beta-\varrho+m}(1-v)^{-\beta}\,dv=e^{\pi i(\beta-\varrho+m+1)}\,\overline{E}(1-\beta,\ \beta-\varrho+m+1)=$$

$$=e^{\pi i(\beta-\varrho+1)}\,\frac{(\beta-\varrho+1)(\beta-\varrho+2)\ldots(\beta-\varrho+m)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(m+1-\varrho)}\,\overline{E}(1-\beta,\ \beta-\varrho+1).$$

Hiernach ist das Integral (57) gleich dem Product

$$e^{\pi i(\varrho-\alpha-2\beta+1)}\,\overline{E}(\beta-\varrho+1,\,1-\beta)\,x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1,\,\beta-\varrho+1;\,2-\varrho;\,x),$$

und das Integral (58) gleich dem Product

$$e^{-\pi i\alpha}\,\overline{E}(1-\beta,\ \beta-\varrho+1)\,x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1,\,\beta-\varrho+1;\,2-\varrho;\,x).$$

Die Betrachtung der Integrale (47) und (48) soll auf den allgemeinen Fall beschränkt werden. Die Integrale (47) sind die Hauptintegrale der Gleichung (45) in der Umgebung des Punktes $x=1$. Bei dem ersten derselben werde die untere Grenze c auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 (wie in Fig. 4), bei dem zweiten auf der Verbindungslinie der Punkte 1 und x angenommen. Man entwickelt in dem erstgenannten Integrale die Potenz $(u-x)^{-\beta}$ in die Reihe

$$(u-x)^{-\beta}=[u-1-(x-1)]^{-\beta}=(u-1)^{-\beta}\left(1-\frac{x-1}{u-1}\right)^{-\beta}$$

$$=(u-1)^{-\beta}\left[1+\frac{\beta}{1}\,\frac{x-1}{u-1}+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\left(\frac{x-1}{u-1}\right)^2+\cdots\right],$$

die convergent ist, da mod. $(x-1)<$ mod. $(u-1)$ vorausgesetzt werden darf, und gelangt hierdurch, nach Anwendung der Formeln (8a) und (12), zu der Gleichung

$$(59) \qquad \overline{\int_c}^{(\mathfrak{B},\, 0,\, \mathfrak{B}-,\, 0-)} \Phi(u, x)\, du =$$

$$= e^{\pi i(\beta-\varrho)}\, \mathfrak{E}(\beta - \varrho + 1,\, \varrho - \alpha - \beta)\, F(\alpha, \beta;\, \alpha + \beta - \varrho + 1;\, 1 - x).$$

In das zweite Integral (47) führt man eine neue Variable v durch die Substitution $u - 1 = v(x - 1)$ ein, worauf $[1 - v(1 - x)]^{\beta-\varrho}$ nach steigenden Potenzen von $1 - x$ entwickelt wird. Dann ergiebt sich mit Hülfe der Formeln (3) und (11), bei passender Bestimmung des Anfangswerthes der zu integrirenden Function, die Gleichung

$$(60) \qquad \overline{\int_c}^{(x,\, 1,\, x-,\, 1-)} \Phi(u, x)\, du =$$

$$= e^{\pi i(1-\beta)}\, \mathfrak{E}(\varrho-\alpha,\, 1-\beta)(1-x)^{\varrho-\alpha-\beta}\, F(\varrho-\alpha,\, \varrho-\beta;\, \varrho-\alpha-\beta+1;\, 1-x).$$

Die zwei Ausdrücke (48) stellen die Hauptintegrale der Gleichung (45) für das Gebiet der grossen Werthe von x dar. In dem ersten dieser Integrale,

$$\overline{\int_c}^{(\mathfrak{E},\, x,\, \mathfrak{E}-,\, x-)} \Phi(u, x)\, du,$$

möge als untere Grenze c ein Punkt der Verbindungslinie der Punkte 0 und x gewählt werden. Man zieht, wie in Figur 5, durch den Punkt c einerseits einen Kreis $\mathfrak{P}$ mit dem Mittelpunkte 0, andererseits einen Kreis $\mathfrak{Q}$ mit dem Mittelpunkte x, setzt aber hier mod. $c > 1$ voraus, so dass der Punkt 1 und die Linie $\mathfrak{E}$ vom Kreise $\mathfrak{P}$ umschlossen werden. Dann geben die Umläufe $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{Q}^+$, $\mathfrak{P}^-$, $\mathfrak{Q}^-$ den Integrationsweg des genannten Integrals an. Da für die Punkte u dieses Weges mod. u stets grösser als 1 ist, so kann in dem Producte

$$\Phi(u, x) = u^{-\alpha-1}\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-\beta}\left(1 - \frac{1}{u}\right)^{\varrho-\alpha-1}$$

die Potenz $\left(1 - \frac{1}{u}\right)^{\varrho-\alpha-1}$ in die Reihe

$$1 - \frac{\varrho - \alpha - 1}{1}\,\frac{1}{u} + \frac{(\varrho - \alpha - 1)(\varrho - \alpha - 2)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{u^2} - \cdots$$

entwickelt werden. Durch Anwendung der Substitution $u = vx$ erhält man demnach

$$\Phi(u, x)\, du = x^{-\alpha}\, v^{\beta-\alpha-1}(v - 1)^{-\beta}\left(1 - \frac{1}{vx}\right)^{\varrho-\alpha-1} dv =$$

$$= (-1)^{-\beta}\, x^{-\alpha}\, v^{\beta-\alpha-1}(1 - v)^{-\beta}\left[1 - \frac{\varrho - \alpha - 1}{1}\,\frac{1}{vx} + \cdots\right] dv.$$

Wird der letztere Ausdruck nach v integrirt, gemäss der obigen Angabe, so sind in den einzelnen Summanden die Werthe 0 und 1 die singulären Punkte, welche von der Variable v umkreist werden. Auf diese Weise findet man für das erste Integral (48) den Ausdruck

(61) $$\overline{\int_c}^{(\mathfrak{C},\, x,\, \mathfrak{C}-,\, x-)} \Phi(u, x)\, du =$$
$$= e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\, \mathfrak{E}(\beta-\alpha,\, 1-\beta)\, x^{-\alpha} F\left(\alpha,\, \alpha-\varrho+1;\, \alpha-\beta+1;\, \frac{1}{x}\right).$$

Für das zweite Integral (48),

$$\overline{\int_c}^{(1,\, 0,\, 1-,\, 0-)} \Phi(u, x)\, du,$$

kann man die Figur 4 zu Grunde legen und die untere Grenze c als Punkt der reellen Axe zwischen 0 und 1 wählen; nur muss x jetzt als ein ausserhalb der Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ befindlicher Punkt vorausgesetzt werden. Man nimmt mod. x als so gross an, dass für jeden Punkt u des Integrationsweges mod. $u <$ mod. x ist, und entwickelt die Potenz $(u-x)^{-\beta}$, $=(-x)^{-\beta}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{-\beta}$, in die Reihe

$$(-1)^{-\beta} x^{-\beta}\left(1+\frac{\beta}{1}\frac{u}{x}+\frac{\beta(\beta+1)}{1\,.\,2}\frac{u^2}{x^2}+\cdots\right).$$

Dann entsteht, nach Berücksichtigung von (8a) und (11), die Gleichung

(62) $$\overline{\int_c}^{(1,\, 0,\, 1-,\, 0-)} \Phi(u, x)\, du =$$
$$= e^{-\pi i\varrho}\, \mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\, \varrho-\alpha)\, x^{-\beta} F\left(\beta,\, \beta-\varrho+1;\, \beta-\alpha+1;\, \frac{1}{x}\right).$$

Verschwinden einzelne der Integrale (47) und (48) identisch, — in welchen Fällen die auf den rechten Seiten von (59) bis (62) stehenden respectiven Grössen $\mathfrak{E}$ ein positives ganzzahliges Argument erhalten, — so hat man an ihrer Stelle die zu (53), (54) etc. analogen Integrale als particuläre Lösungen der Differentialgleichung (45) anzuwenden.

Ueber eine specielle Classe von Configurationen auf den elliptischen Normalcurven *n*. Ordnung.

Von

A. Schönflies in Göttingen.

In den Göttinger Nachrichten habe ich kürzlich einige Sätze über solche Configurationen m_3 mitgetheilt, die aus Cyklen von Polygonen bestehen, welche sich wechselseitig ein- und umgeschrieben sind*). Es hat sich herausgestellt, dass solche Configurationen in unendlicher Anzahl auf den Curven dritter Ordnung existiren. Werden die Coordinaten der allgemeinen C_3 so als elliptische Functionen eines Parameters u dargestellt, dass einem Wendepunkt das Argument $u = 0$ entspricht, so können als Configurationspunkte — bis auf einen a. a. O. nur kurz berührten Ausnahmefall — nur solche Punkte auftreten, deren Argumente ein rationales Verhältniss zu irgend einer primitiven Periode der Curve besitzen.

Der eben erwähnte Ausnahmefall bedarf noch der Erledigung. Er soll im Folgenden ausführlich untersucht werden; ich werde daher alle Configurationen ermitteln, die ihm entsprechen. Gleichzeitig werde ich eine Verallgemeinerung der bezüglichen Aufgabe eintreten lassen.

Das Problem, Configurationen m_3 der angegebenen Art auf den Curven dritter Ordnung zu finden, lässt sich nämlich auf die elliptischen Normalcurven der *n*. Ordnung übertragen. Als elliptische Normalcurven der *n*. Ordnung bezeichne ich im Anschluss an Herrn Klein**) diejenigen Curven *n*. Ordnung im Raum von $n - 1$ Dimensionen, deren homogene Coordinaten $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ sich durch linear unabhängige σ-Producte von je n Factoren folgendermassen darstellen lassen:

---

*) Ueber regelmässige Configurationen n_3 auf den Curven dritter Ordnung. Jahrg. 1889. S. 334.

**) Vgl. z. B. Ueber die elliptischen Normalcurven der n^{ten} Ordnung etc. Abhandl. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 13, S. 339.

$$\begin{aligned}\varrho x_0 &= A \cdot \prod_1^n \sigma(u-a_i),\\ \varrho x_1 &= B \cdot \prod_1^n \sigma(u-b_i),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varrho x_{n-1} &= N \cdot \prod_1^n \sigma(u-n_i),\end{aligned}$$

wo überdies

$$\sum a_i = \sum b_i = \sum n_i$$

zu nehmen ist.

Auf allen diesen Curven giebt es unendlich viele Configurationen, welche den ebenen Configurationen m_3 analog gebildet sind. Als Configurationspunkte kommen wieder — bis auf den sofort näher zu charakterisirenden Ausnahmefall — nur solche Punkte in Betracht, deren Argumente, bei geeigneter Vertheilung des Parameters u über die Curve, ein rationales Verhältniss zu irgend einer primitiven Periode der Curve besitzen.

Die Bestimmung der bezüglichen Argumente hängt von der Auflösung eines Systems homogener linearer Gleichungen ab. Die Determinante desselben ist im Allgemeinen von Null verschieden; ist sie gleich Null, so tritt der Ausnahmefall ein. Die Aufgabe, welche im Folgenden erledigt werden soll, kommt also darauf hinaus, alle Gleichungssysteme zu ermitteln, deren Determinante verschwinden kann, und sodann zu prüfen, ob und welche Configurationen diesen Gleichungssystemen entsprechen. Das Resultat lautet dahin, dass für alle diese Curven derartige Configurationen existiren; beispielsweise giebt es auf der Raumcurve vierter Ordnung vom Geschlecht eins unendlich viele Cyklen von Tetraedern, deren Ecken auf der Curve liegen, und die einander cyklisch ein- und umgeschrieben sind. Die Zahl dieser Tetraeder ist beliebig; ausserdem kann eine der Tetraederebenen in jedem Fall willkürlich gewählt werden.

§ 1.

Definition der Configurationen. Aufstellung des zugehörigen Systems von Gleichungen.

1. Für die geometrische Einkleidung der im Folgenden abzuleitenden Resultate bediene ich mich der von Herrn Veronese*) eingeführten Benennungen, und bezeichne den Raum von n Dimensionen durch R_n, beispielsweise die Ebene durch R_2, die Gerade durch R_1

*) Vgl. Math. Annalen Bd. 19, S. 161.

und den Punkt durch R_0. Ausserdem betrachte ich von nun an für die eigentliche Darstellung nicht eine Curve n. Ordnung im Raum R_{n-1}, sondern vielmehr eine Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung im Raum R_n. Wie bekannt, kann die Zuordnung der Curvenpunkte zum Argument u der σ-Functionen immer so getroffen werden, dass dem Argument $u = 0$ das Analogon eines Wendepunktes entspricht, d. h. ein solcher Punkt, in welchem die Curve der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung mit einem R_{n-1} $n+1$ zusammenfallende Punkte gemein hat. Alsdann besteht für die Argumente der $n+1$ Schnittpunkte eines beliebigen R_{n-1} mit der Curve die Relation

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \lambda\omega + \mu\omega',$$

wo λ und μ ganze Zahlen sind und ω, ω' ein primitives Periodenpaar der Curve bilden. Ich schreibe dafür, wie üblich,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n \equiv 0.$$

2. *Die zu betrachtenden Configurationen m_{n+1} werden von m Punkten R_0 der Curve $\mathfrak{C}_{n+1}$ und m Räumen R_{n-1} gebildet, und zwar so, dass in jedem dieser Räume $n+1$ Punkte liegen, und durch jeden Punkt $n+1$ von den Räumen hindurchgehen.* Diese Configurationen sollen überdies den gleichen Bedingungen cyklischer Vertauschung genügen, wie die Polygoncyklen der Configurationen m_3. Genauer wird dies durch die folgenden Gleichungen $(1, 1', \ldots 1^q)$ definirt, welche den Gleichungen $\mathrm{I}, \mathrm{I}' \ldots \mathrm{I}^q$ a. a. O. entsprechen.

Es seien $u_0, u_1 \ldots u_p$ die Argumente von $p+1$ beliebigen Punkten der Curve $\mathfrak{C}_{n+1}$, wo $p \geqq n$ sein soll. Je n auf einander folgende bestimmen einen R_{n-1}; solcher R_{n-1} giebt es $p+1$, und zwar haben je zwei auf einander folgende $n-1$ Punkte, d. h. einen R_{n-2} gemein. In der Ebene R_2 bilden sie einen geschlossenen Linienzug von $p+1$ Seiten, im Raum R_3 eine geschlossene Reihe von $p+1$ Ebenen, resp. Dreiecken, die je eine Gerade gemein haben; allgemein mögen sie daher als ein geschlossener Zug von $p+1$ Räumen R_{n+1} bezeichnet werden. Er heisse P_0.

Aus den obigen Argumenten u_i leiten wir die Argumente

$$u_i', u_i'', \ldots u_i^{(q)}$$

ab mittelst folgender Systeme von Gleichungen

$$(1)\ \sum_{i=0}^{n-1} u_i + u_0' \equiv 0,\quad \sum_{i=1}^{n} u_i + u_1' \equiv 0, \cdots \sum_{i=p}^{n+p-1} u_i + u_p' \equiv 0,$$

$$(1')\ \sum_{i=0}^{n-1} u_i' + u_0'' \equiv 0,\quad \sum_{i=1}^{n} u_i' + u_1'' \equiv 0, \cdots \sum_{i=p}^{n+p-1} u_i' + u_p'' \equiv 0,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$(1^{q-1})\ \sum_{i=0}^{n-1} u_i^{(q-1)} + u_0^{(q)} \equiv 0,\quad \sum_{i=1}^{n} u_i^{(q-1)} + u_1^{(q)} \equiv 0, \cdots \sum_{i=p}^{n+p-1} u_i^{(q-1)} + u_p^{(q)} \equiv 0,$$

so bestimmen auch die Punkte, deren Argumente

$$u_i', u_i'', \ldots u_i^{(q)}$$

sind, je einen geschlossenen Zug von $p+1$ Räumen R_{n-1} von der Art, dass die Punkte eines jeden derselben der Reihe nach in den R_{n-1} des vorhergehenden Zuges liegen, d. h. dass jeder Zug dem folgenden umgeschrieben ist. Wir bezeichnen sie resp. durch

$$P_1, P_2, \ldots P_q.$$

Nun soll aber die Reihe sich schliessen, also auch P_q dem P_0 regelmässig umgeschrieben sein; dazu ist hinreichend und nothwendig, dass für irgend einen festen Werth l die Argumente u_i den folgenden Gleichungen genügen

$$(1^{(q)}) \quad \sum_{i=0}^{n-1} u_i^{(q)} + u_l \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^{(q)} + u_{l+1} \equiv 0, \cdots \sum_{i=p}^{n+p-1} u_i^{(q)} + u_{p+l} \equiv 0.$$

Die so definirten $(p+1)(q+1) = m$ Punkte der Curve $\mathfrak{C}_{n+1}$ bilden die Configuration m_{n+1}, wenn es möglich ist, sie so zu bestimmen, dass sich für die Argumente $u_i^{(k)}$ lauter verschiedene incongruente Werthe ergeben.

Ich bemerke noch, dass hier, wie auch im Folgenden, die unteren Indices nur in Bezug auf $p+1$ als Modul zu betrachten sind.

3. Aus den Gleichungen (1) bis $(1^{(q)})$ lassen sich andere Gleichungen ableiten, welche nur die Argumente u_i enthalten. *Dieselben haben die fundamentale Eigenschaft bei cyklischer Vertauschung der Variabeln u_i cyklisch in einander überzugehen;* es folgt dies unmittelbar daraus, dass die Gleichungen (1) bis $(1^{(q)})$ diese Eigenschaft besitzen. Die bezüglichen Gleichungen seien

$$(2) \quad \begin{array}{l} a_0 u_0 + a_1 u_1 + \cdots + a_p u_p \equiv 0, \\ a_1 u_0 + a_2 u_1 + \cdots + a_0 u_p \equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_p u_0 + a_0 u_1 + \cdots + a_{p-1} u_p \equiv 0. \end{array}$$

Die Coefficienten $a_0, a_1 \ldots a_p$ dürfen wir, wie leicht ersichtlich, als ganzzahlig und positiv voraussetzen.

Diese Gleichungen bestimmen die Argumente u_i. Ist die Determinante derselben von Null verschieden, und Δ ihr Werth, so besteht für jedes u_i die Relation

$$\Delta u_i \equiv 0$$

und es ergeben sich die analogen Resultate, wie für die ebenen Curven 3. Ordnung. Die a. a. O. gegebene Ableitung derselben lässt sich unmittelbar auf die Curven $\mathfrak{C}_{n+1}$ übertragen. Es folgt also auch hier, dass *jedes einfache System von Argumenten u_i, welches den Gleichungen* (2) *genügt, die Werthe*

$$\frac{\varpi}{\Delta},\ g\frac{\varpi}{\Delta},\ g^2\frac{\varpi}{\Delta}\ \cdots\ g^p\frac{\varpi}{\Delta}$$

hat, wenn ϖ irgend eine primitive Periode ist, und für g die Congruenz

$$g^{p+1} \equiv 1 \text{ mod. } \Delta$$

besteht. Die zugehörigen Punkte bilden den geschlossenen Zug P_0. Die Argumente des eingeschriebenen Zuges sind wie a. a. O. durch gewisse Zahlen

$$h,\ hg,\ hg^2,\ \ldots\ hg^p$$

bestimmt. Wenn nun die zugehörige Configuration nicht etwa illusorisch wird, so giebt es stets zwei kleinste Zahlen q und l, so dass

$$h^{q+1} \equiv g^l \text{ mod. } \Delta.$$

Ist $q = 0$, so ist der eingeschriebene Zug mit P_0 identisch, d. h. die $p + 1$ Argumente u_i liefern bereits eine Configuration $(p + 1)_{n+1}$, deren $p + 1$ Punkte einen sich selbst ein- und umgeschriebenen Zug von $p + 1$ Räumen R_{n-1} bestimmen. Ist dagegen q grösser als 0, so besteht die Configuration aus $m = (p + 1)(q + 1)$ Punkten, die einen Cyklus von $q + 1$ einander ein- und umgeschriebenen Raumzügen bilden.

Beispielsweise liefern für $\Delta = 21$ die Zahlen $g = 5$, $h = 11$ eine der Raumcurve 4. Ordnung eingeschriebene Configuration 12_4, die aus zwei sich wechselseitig umgeschriebenen Zügen von je sechs Ebenen besteht. Der Werth von l ist vier. Die zugehörigen Zahlen sind

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 5, & 4, & 20, & 16, & 17, \\ 11, & 13, & 2, & 10, & 8, & 19. \end{array}$$

Bis hierher enthält diese Mittheilung nur eine Verallgemeinerung der bereits a. a. O. abgeleiteten Resultate. Ich bemerke noch, dass auch die zweite Gattung von Configurationen m_3, die ich a. a. O. betrachtet habe, in analoger Weise auf den Normalcurven $\mathfrak{C}_{n+1}$ existirt.

§ 2.

Discussion der Determinante Δ.

In diesem Paragraphen soll die Aufgabe gelöst werden, *alle Werthsysteme $a_0, a_1 \ldots a_p$ zu ermitteln, für welche die Determinante Δ verschwinden kann.* Dabei ist festzuhalten, dass sämmtliche Coefficienten a_i positive ganze Zahlen sind.

Wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 & \ldots & a_p \\ a_1, & a_2, & a_3 & \ldots & a_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p, & a_0, & a_1 & \ldots & a_{p-1} \end{vmatrix}$$

verschwindet, so können die Relationen (2), auch wenn wir sie — was übrigens in diesem Paragraphen durchgehends geschehen soll — als Gleichungen betrachten, durch unendlich viele Werthsysteme u_i befriedigt werden, die nicht sämmtlich Null sind. Ich nehme nun zunächst an, dass nicht etwa alle Unterdeterminanten erster Ordnung den Werth Null haben. Solcher Unterdeterminanten giebt es im Ganzen nur $p+1$ von einander verschiedene; zu allen Elementen a_i mit gleichem Index gehört dieselbe Unterdeterminante. Diese Unterdeterminanten gehen ebenfalls bei cyklischer Vertauschung der a_i in einander über; wir bezeichnen sie durch

$$A_0, A_1, A_2 \ldots A_p.$$

Alsdann erhalten die Auflösungen der linearen Gleichungen (2) die Form

$$u_0 : u_1 : u_2 : \cdots : u_p = \begin{cases} A_0 : A_1 : A_2 : \cdots : A_p, \\ A_1 : A_2 : A_3 : \cdots : A_0, \\ A_p : A_0 : A_1 : \cdots : A_{p-1}. \end{cases}$$

Wenn daher nicht alle Unterdeterminanten A_i gleichzeitig verschwinden, so müssen sie sämmtlich von Null verschieden sein. Es bestehen daher die Gleichungen

$$\mu u_1 = \nu u_0, \quad \mu u_2 = \nu u_1, \quad \cdots \quad \mu u_0 = \nu u_p,$$

in denen μ und ν ganze Zahlen sind. Diese $p+1$ Gleichungen sind mit den Gleichungen (2) äquivalent; ihnen muss durch Werthe $u_0, u_1 \ldots u_p$, die sämmtlich von Null verschieden sind, genügt werden können. Die Multiplication derselben ergiebt

$$\mu^{p+1} = \nu^{p+1},$$

also, da μ und ν ganze Zahlen sind,

$$\mu = \pm \nu.$$

Ist nun $p+1$ ungerade, so gilt nur das obere Zeichen; *alsdann sind alle u_i einander gleich*, und es ist

(3) $$a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0.$$

Ist dagegen $p+1$ gerade, so kann auch das negative Zeichen in Betracht kommen. In diesem Fall *sind alle u_i mit geradem Index und alle u_i mit ungeradem Index einander gleich*, und es besteht die Gleichung

(4) $$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{p-1} - a_p = 0.$$

Andrerseits ist aber auch evident, dass die Determinante Δ, wenn die a_i einer der vorstehenden Gleichungen genügen, wirklich den Werth Null hat.

Nehmen wir nun weiter an, dass die Unterdeterminanten A_i sämmtlich verschwinden, so handelt es sich um Auffindung aller ganzzahligen Werthe a_i, für die

(5) $$A_0 = 0, \quad A_1 = 0 \cdots A_p = 0$$

ist, natürlich so, dass nicht alle a_i gleichzeitig Null sind. Sollen diese Gleichungen befriedigt werden können, so muss zwischen den A_i eine identische Relation bestehen. Diese ist in der That vorhanden; denn da Δ verschwindet, so ist

$$a_0 A_0 + a_1 A_1 + \cdots + a_p A_p = 0.$$

Andrerseits ist evident, dass die A_i von einander linear unabhängig sind; jedes A_i enthält nämlich nur ein Glied, welches eine p^{te} Potenz desselben Coefficienten ist, nämlich a_i^p. Endlich können aber auch die A_i keinen gemeinsamen Theiler haben; wovon man sich leicht überzeugt, indem man z. B. den a_i specielle Werthe giebt. Es giebt daher eine endliche Anzahl von Verhältnissen

$$a_0 : a_1 : a_2 : \cdots : a_p,$$

welche den Gleichungen (5) genügen.

Sei nun

$$f(a_0, a_1) = 0$$

die Eliminationsgleichung zwischen a_0 und a_1 und λ eine Wurzel derselben, so dass

$$a_1 - \lambda a_0 = 0$$

ist, so bestehen wegen des cyklischen Verhaltens der Functionen A_i auch die Gleichungen

$$f(a_1, a_2) = 0, \quad f(a_2, a_3) = 0, \cdots f(a_p, a_0) = 0,$$

d. h. für die zur Wurzel λ gehörigen Werthe ist

$$a_1 - \lambda a_0 = 0, \quad a_2 - \lambda a_1 = 0, \cdots a_0 - \lambda a_p = 0;$$

es ist daher

$$\lambda^{p+1} = 1.$$

Beachten wir nun, dass es sich in dem vorliegenden Fall nur um ganzzahlige positive Werthe a_i handelt, so folgt, dass *als Lösungen der Gleichungen* (5) *allein solche a_i sich ergeben, für die*

(6) $$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_p$$

ist. Andrerseits ist aber auch evident, dass die Determinante Δ verschwindet, wenn alle a_i einander gleich sind.

§ 3.

Aufstellung der Configurationen mit verschwindender Determinante.

Configurationen mit lauter distincten Punkten existiren nur, wenn alle u_i von einander verschieden sind. Das vorstehende zeigt, dass dies unter der Bedingung $\Delta = 0$ nur dann möglich ist, wenn alle a_i einander gleich sind. Es ist demnach zu untersuchen, welcher Art die Relationen (1) bis ($1^{(q)}$) sein müssen, damit in den Relationen (2) alle Coefficienten einander gleich werden. Diese Untersuchung lässt sich ohne Schwierigkeit durchführen. Das Resultat lautet, dass es nur *einen* Fall giebt, welcher zu wirklichen Configurationen führt; er entspricht den Werthen $p = n$ und $l = 0$ in den Gleichungen (1). Es scheint am einfachsten, diesen Fall zunächst zu erledigen, und dann erst den Beweis zu führen, dass er der einzige ist.

Bezeichnen wir noch

$$u_0^{(\lambda)} + u_1^{(\lambda)} + \cdots + u_n^{(\lambda)} = U^{(\lambda)}, \tag{7}$$

so kann die zugehörige Classe von Configurationen durch folgende Gleichungen definirt werden*)

$$\begin{array}{llll} U - u_0 + u_0' \equiv 0, & U - u_1 + u_1' \equiv 0, & \cdots & U - u_n + u_n' \equiv 0 \\ U' - u_0' + u_0'' \equiv 0, & U' - u_1' + u_1'' \equiv 0, & \cdots & U' - u_n' + u_n'' \equiv 0. \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U^{(q)} - u_0^{(q)} + u_0 \equiv 0, & U^{(q)} - u_1^{(q)} + u_1 \equiv 0, & \cdots & U^{(q)} - u_n^{(q)} + u_n \equiv 0. \end{array} \tag{8}$$

Die Existenz dieser Configurationen ist nun zu erweisen. Ich bemerke noch, dass dieselben bei den Curven dritter Ordnung aus einem Cyklus von Dreiecken bestehen, bei den Raumcurven C_4 aus einem Cyklus von Tetraedern, und allgemein bei den elliptischen Normalcurven der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung aus einem Cyklus von Raumgebilden, deren jedes $n+1$ Punkte und $n+1$ gegenüberliegende Räume R_{n-1} enthält, somit das genaue Analogon zum Dreieck und Tetraeder bildet.

Wir addiren je n auf einander folgende Gleichungen der ersten Zeile, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen der zweiten Zeile

$$(n-1)\,U + u_0 - u_0'' \equiv 0, \quad \cdots \quad (n-1)\,U + u_n - u_n'' \equiv 0,$$

und wenn wir von diesen Gleichungen wieder der Reihe nach je n addiren, so folgt analog

$$[n(n-1)+1]\,U - u_0 + u_0''' \equiv 0, \quad \cdots \quad [n(n-1)+1]\,U - u_n + u_n''' \equiv 0.$$

In dieser Weise können wir fortfahren. Definiren wir noch eine Reihe von positiven ganzen Zahlen

*) Diese Gleichungen gehen aus den Gleichungen (1) durch eine geringe Modification in der Bezeichnung hervor, die hier zweckmässig scheint.

durch die Gleichungen

$$n_1,\ n_2,\ \cdots\ n_q$$

$$n-1 \quad = n_1,$$
$$n^2 - n_1 \quad = n_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$n^q - n_{q-1} = n_q,$$

so dass

$$n_\lambda = n^\lambda - n^{\lambda-1} + n^{\lambda-2} - \cdots \pm 1,$$

ist, so bestehen für jeden Index λ die n Gleichungen

$$n_\lambda U \pm (u_0 - u_0^{(\lambda+1)}) \equiv 0, \ \cdots\ n_\lambda U \pm (u_n - u_n^{(\lambda+1)}) \equiv 0,$$

und zwar gilt das positive oder negative Zeichen, je nachdem λ ungerade oder gerade ist. Bilden wir nun zuletzt diejenigen Gleichungen, welche nur die u_i enthalten, so sind wegen $l=0$ alle diese Gleichungen identisch; es ergiebt sich also in der That nur eine Gleichung, nämlich

$$N \cdot U \equiv 0, \tag{9}$$

wo N für n_q geschrieben ist, also

$$N = n^q - n^{q-1} + n^{q-2} - \cdots + (-1)^q.$$

Dies gilt für jeden beliebigen Werth von q.

Es fragt sich aber noch, ob den vorstehenden Gleichungen (8) auch Configurationen mit lauter distincten Punkten entsprechen. Durch Addition aller Gleichungen derselben Zeile in (8) erhalten wir

$$nU + U' \equiv 0, \quad nU' + U'' \equiv 0, \ \cdots\ nU^{(q-1)} + U^{(q)} \equiv 0,$$

d. h. es ist

$$U' \equiv -nU, \quad U'' \equiv n^2 U, \ \cdots\ U^{(q)} \equiv (-1)^q n^q U.$$

Wird nun gemäss Gl. (9)

$$U \equiv \frac{\varpi}{N}$$

gesetzt, wo ϖ irgend eine primitive Periode der Curve ist, so folgt

$$U' \equiv -\frac{n}{N}\varpi, \quad U'' \equiv \frac{n^2}{N}\varpi, \ \cdots\ U^{(q)} \equiv (-1)^q \frac{n^q}{N}\varpi$$

und diesen Gleichungen kann in folgender Weise durch lauter verschiedene, incongruente Werthe $u_i^{(k)}$ genügt werden.

Die Punkte mit den Argumenten u_i liegen in einem und demselben R_{n-1}. Nimmt man also irgend einen R_{n-1} so an, dass er die Curve $\mathfrak{C}_{n+1}$ in $n+1$ verschiedenen Punkten schneidet, so können die Argumente von n dieser Punkte als Werthe $u_0, u_1 \ldots u_{n-1}$ betrachtet werden. Dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Schnittpunkt kommt das Argument u_n' zu. Alsdann sind alle übrigen Argumente bestimmt; sie ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (8) und zwar folgt:

$$
(10)\quad
\begin{array}{lll}
u_0' \equiv u_0 - \frac{\varpi}{N}, & u_1' \equiv u_1 - \frac{\varpi}{N}, & u_n' \equiv u_n - \frac{\varpi}{N}, \\
u_0'' \equiv u_0 + n_1 \frac{\varpi}{N}, & u_1'' \equiv u_1 + n_1 \frac{\varpi}{N}, & \cdots\; u_n'' \equiv u_n + n_1 \frac{\varpi}{N}, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
u_0^{(q)} \equiv u_0 + (-1)^q n_{q-1} \frac{\varpi}{N}, & u_1^{(q)} \equiv u_1 + (-1)^q n_{q-1} \frac{\varpi}{N}, & \cdots\; u_n^{(q)} \equiv u_n + (-1)^q n_{q-1} \frac{\varpi}{N}.
\end{array}
$$

Diese Argumente genügen einerseits den Gleichungen (8), andrerseits sind sie, da bis auf einen sogleich zu nennenden Ausnahmefall

$$n_\lambda < N$$

ist, in der That sämmtlich von einander verschieden. Die Ausnahme tritt für $n = 2$, $q = 1$ ein; dann ist $N = 1$, und die Configuration würde aus zwei sich wechselseitig einbeschriebenen Dreiecken auf einer C_3 bestehen. Aber für beide Dreiecke fallen die Eckpunkte mit den Schnittpunkten der Ausgangsgeraden zusammen. Wir erhalten daher folgendes Resultat:

Auf jeder elliptischen Normalcurve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung im Raum von n Dimensionen giebt es unendlich viele Configurationen, die aus lauter einander cyklisch ein- und umgeschriebenen Raumgebilden bestehen, deren jedes $n+1$ Punkte und $n+1$ gegenüberliegende Räume R_{n-1} enthält.

Für die ebene C_3 und die Raumcurve C_4 ergeben sich im Besonderen folgende Sätze:

Jeder allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung lassen sich unendlich viele Configurationen $(3p)_3$ einschreiben, die aus p Cyklen von Dreiecken bestehen, die einander ein- und umgeschrieben sind). Die Zahl p ist beliebig, muss aber grösser als 2 sein. Eine Configurationsgerade kann beliebig gewählt werden.* Für $p = 3$ ergiebt sich die Desargues'sche Configuration 9_3, deren Existenz auf den Curven C_3 in unendlicher Zahl von Herrn Kantor erwiesen wurde.**)

Jeder Raumcurve vierter Ordnung erster Art lassen sich unendlich viele Configurationen $(4p)_4$ einschreiben, die aus p Cyklen von Tetraedern bestehen, die einander ein- und umgeschrieben sind. Die Zahl p ist beliebig. Eine Configurationsebene kann beliebig gewählt werden.

Ist speciell $p = 2$, so ergeben sich die bereits von Herrn Ameseder aufgefundenen Configurationen 8_4, welche zwei sich wechselseitig ein- und umgeschriebene Tetraeder bilden***). Die zugehörigen Argumente sind

---

*) Zu speciellen Cyklen dieser Art ist auch Herr de Vries gelangt, wie ich einer brieflichen Mittheilung an mich entnehme, indem er einen n-punktigen Tangentialcyklus zu Inflexionstripeln ergänzt.

**) Ueber die Configurationen $(3, 3)_8$ und $(3, 3)_9$ und ihren Zusammenhang mit den Curven 3. Ordnung. Wiener Ber. Bd. 84, S. 930.

***) Ueber Configurationen auf der Raumcurve 4. Ordnung 1. Species. Wiener Berichte, Bd. 87, S. 1187.

$$\begin{array}{cccc} u_0, & u_1, & u_2, & u_3, \\ u_0 - \frac{\varpi}{2}, & u_1 - \frac{\varpi}{2}, & u_2 - \frac{\varpi}{2}, & u_3 - \frac{\varpi}{2}, \end{array}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \equiv \frac{\varpi}{2}.$$

Ist im allgemeinen Fall der Raum R_{n-1} fixirt, so hängt die zugehörige Configuration noch von q und ϖ ab. Wie q, so kann auch ϖ beliebig gewählt werden. Sind ω und ω' zwei Fundamentalperioden und setzen wir

$$\varpi = \lambda\omega + \mu\omega',$$

so gehören zu jeder primitiven Periode ϖ, für welche λ und μ kleiner als N sind, andere Configurationen.

Ferner wird den Gleichungen (8) auch genügt, wenn man

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n \equiv m\frac{\varpi}{N}$$

setzt, wo m irgend eine ganze Zahl ist. Behalten wir wieder für $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ dieselben Werthe bei, wie oben, und bestimmen u_n durch die vorstehende Relation, so ist damit ebenfalls *eine Configuration definirt, welche überdies von der oben betrachteten verschieden ist.* Die zugehörigen Configurationspunkte sind durch die Zahlen

$$m, \; mn_1, \; mn_2, \cdots mn_{q-1}$$

bestimmt, und sind im Allgemeinen sämmtlich von einander verschieden. Es kann aber ein besonderer Fall eintreten, der zu erwähnen ist. Wenn nämlich m nicht relativ prim zu N ist und eine Zahl n_{r-1} existirt, so dass

$$m \cdot n_{r-1} \equiv 0 \text{ mod. } N$$

ist, so fallen die Punkte $u_i^{(r)}$ mit den Punkten u_i zusammen, und *es bilden bereits die r Raumgebilde*

$$P_0, \; P_1, \cdots P_{r-1}$$

eine geschlossene Configuration der betrachteten Art. Fallen aber die Punkte $u_i^{(r)}$ mit den Punkten u_i zusammen, so müssen, da alle Punkte eindeutig bestimmt sind, auch die Punkte $u_i^{(r+1)}$ mit den Punkten u_i' identisch sein, und allgemein die $u_i^{(r+k)}$ mit den $u_i^{(k)}$. Es ist daher r ein Theiler von $q+1$, und die Configuration reducirt sich auf eine mehrfach zu zählende Configuration von weniger Punkten.*)

*) Aus dem Obigen fliesst folgendes zahlentheoretische Theorem: Es seien durch die Gleichung

$$n_\lambda = n^\lambda - n^{\lambda-1} + n^{\lambda-2} - \cdots + (-1)^\lambda$$

für $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots q$ die Zahlen

$$1, \; n_1, \; n_2, \; n_3 \ldots n_q$$

Ich bemerke noch, dass die oben für die elliptischen Curven C_3 nachgewiesenen Configurationen sämmtlich *auch auf den Curven C_3 mit Doppelpunkt existiren.* Den Grund habe ich in der kürzlich in den Göttinger Nachrichten veröffentlichten Mittheilung angegeben; (a. a. O. S. 343). Auch die ebenda ausgesprochene Behauptung, dass *auf den Curven C_3 mit Spitze überhaupt keine Configurationen n_3 dieser Art existiren*, ist aus dem Vorhergehenden einleuchtend. Das gleiche gilt für die analogen Raumgebilde im Raum R_n.

§ 4.

Beweis, dass keine andern Configurationen existiren, für welche $\Delta = 0$ ist.

Es handelt sich noch darum den Beweis zu liefern, dass die vorstehend behandelten Configurationen die einzigen sind, für welche alle Coefficienten a_i einander gleich werden. Dazu bilden wir uns aus den Gleichungen (1) bis $(1^{(q)})$ auf dieselbe Weise, wie oben S. 534, nämlich durch Addition von je n Gleichungen Relationen zwischen dem System der u_i und jedem System $u_i^{(k)}$. Alle diese Gleichungen gehen bei cyklischer Vertauschung der u_i und $u_i^{(k)}$ in einander über. Für jedes k haben dieselben die Gestalt

$$\lambda_i u_0 + \lambda_{i+1} u_1 + \cdots + \lambda_{i+p} u_p \pm u_{p+1-i}^{(k)} \equiv 0,$$
$$i = 0, 1, 2 \ldots p$$

und zwar gilt das positive oder negative Zeichen, je nachdem der Index k ungerade oder gerade ist. Die λ_i sind positive ganze Zahlen. Seien nun im Besondern

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p \pm u_0^{(q)} \equiv 0,\\ &\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \cdots + \alpha_0 u_p \pm u_p^{(q)} \equiv 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\alpha_p u_0 + \alpha_0 u_1 + \cdots + \alpha_{p-1} u_p \pm u_1^{(q)} \equiv 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen zwischen den Argumenten u_i und $u_i^{(q)}$. Wir addiren wieder je n aufeinander folgende dieser Gleichungen, beispielsweise die n ersten. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = (0, n-1), \cdots \quad \alpha_p + \alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-2} = (p, n-2),$$

so erhalten wir

---

definirt. Ist dann n_{r-1} die kleinste Zahl, die mit n_q einen gemeinsamen Theiler hat, so ist r ein Theiler von $q+1$ und es besteht für jeden Index i eine Relation

$$m \cdot n_i \equiv m \cdot n_{r+i} \bmod. n_q.$$

$$(0,n-1)u_0+(1,n)u_1+\cdots+(p,n-2)u_p\pm(u_0^{(q)}+u_p^{(q)}+\cdots+u_{p-n+2}^{(q)})\equiv 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen $(1^{(q)})$

$$(0,n-1)\,u_0+(1,n)\,u_1+\cdots+(p,n-2)\,u_p\mp u_{l-n+1}\equiv 0.$$

Nun sollen alle Coefficienten einander gleich sein; d. h. es ist

$$\begin{aligned}
(0,n-1)&=(1,n),\\
(1,n)&=(2,n+1),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
(l-n,l-1)&=(l-n+1,l)\mp 1,\\
(l-n+1,l)\mp 1&=(l-n+2,l+1),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
(p,n-2)&=(0,n-1).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

(12) $\qquad \alpha_0=\alpha_n,\quad \alpha_1=\alpha_{n+1},\ \cdots\ \alpha_p=\alpha_{n-1},$

(13) $\qquad \alpha_{l-n}\pm 1=\alpha_l,\quad \alpha_{l-n+1}=\alpha_{l+1}\pm 1.$

Diese Gleichungen zeigen, dass in jedem Fall die $p+1$ Grössen α_i — resp. die um ± 1 vermehrten Grössen — einen oder mehrere Cyklen bilden, so dass alle Elemente desselben Cyklus einander gleich sind, und Anfangsglied und Endglied eines jeden Cyklus identisch sind. Daraus folgt leicht, dass die beiden Elemente

$$\alpha_{l-n}\pm 1 \quad\text{und}\quad \alpha_{l+1}\pm 1$$

demselben Cyklus angehören, weil ohne dies der Summand ± 1, nachdem er bei einem Coefficienten aufgetreten ist, nicht wieder verschwinden kann. Dem Cyklus, welcher den Index $l-n$ enthält, gehört aber auch der Index l an; daher kommen die Indices l und $l+1$ in demselben Cyklus vor; d. h. n ist relativ prim zu $p+1$ und alle Coefficienten bilden einen einzigen Cyklus.

In den Gleichungen (12) und (13) kommt jeder Coefficient zweimal vor. Wenn nun die Indices in (13) sämmtlich verschieden wären, so würde, da n relativ prim zu $p+1$ ist, bereits aus den Gleichungen (12) allein die Gleichheit aller Coefficienten α_i folgen; dies aber verstösst gegen (13). Die Indices in (13) können daher nicht sämmtlich verschieden sein; es muss entweder

$$l-n\equiv l+1 \mod. p+1$$

oder

$$l\equiv l-n+1 \mod. p+1$$

sein. Von diesen Congruenzen kann aber, da $p\geq n$ sein soll, nur die erste Geltung haben, sie liefert das Resultat, dass

$$n=p$$

ist. Damit ist bereits bewiesen, dass die Gleichungen, welche die zugehörigen Configurationen bestimmen, entweder die Gleichungen (8) sind, oder sich von den Gleichungen (8) nur dadurch unterscheiden, dass in der letzten Zeile $u_0, u_1 \dots u_n$ durch $u_l, u_{l+1} \dots u_{l+n}$ ersetzt ist. Aber in diesem Fall kann, wie die Entwickelungen des vorigen Paragraphen erkennen lassen, nur für $l = 0$ die Gleichheit aller Coefficienten a_i eintreten. *Damit ist der Beweis erbracht, dass es in der That keine andern Configurationen giebt, für welche* $\Delta = 0$ *ist, als die des vorigen Paragraphen.*

Göttingen, im Juni 1889.

Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln.

Von

Ludwig Scheeffer †.

Aus seinen hinterlassenen Papieren mitgetheilt von A. Mayer.*)

§ 1.

Functionen einer Veränderlichen.

Um festzustellen, ob eine Function einer Veränderlichen, $f(x)$, deren erste Ableitung für $x = 0$ verschwindet, an dieser Stelle ein Maximum oder Minimum besitzt, verfährt man bekanntlich folgendermassen. Man bildet die höheren Ableitungen $f''(x)$, $f'''(x)$, ... Ist n die Ordnung der ersten unter denselben, welche für $x = 0$ einen von Null verschiedenen Werth annimmt, so wird, wenn wir noch der Kürze wegen $f(0) = 0$ voraussetzen, nach Lagrange:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n!}\, x^n, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

*) Die vorliegende Arbeit ist entstanden in der kurzen Zeit von Mitte Februar bis Mitte März 1885 (vgl. die Anmerkung zu § 2). Sie war jedoch noch nicht bis zur Reinschrift gediehen, als Scheeffer seine italienische Reise antrat, von der er den Todeskeim mit nach Hause zurückbringen sollte. Nach seinen Briefen hatte die Abhandlung jedenfalls noch nicht eine solche Abrundung erhalten, mit der er vollständig zufrieden gewesen wäre. Denn er spricht mehrmals davon, sie mir (wozu er selbst leider nicht mehr kam) baldmöglichst zu schicken, um zu erfahren, was ein Anderer an der Darstellung auszusetzen fände. Ich habe mich daher auch nicht vollkommen streng an das Manuscript gehalten; doch sind grössere Aenderungen nur in § 7 von Nr. 3 an vorgenommen worden, und auch diese kommen der Hauptsache nach auf blosse Umstellungen zurück. Ueberall sonst findet man, bis auf ganz geringfügige Correcturen und Zusätze, den Wortlaut der Originalarbeit. — Wieder abgedruckt a. d. Berichten der K. sächs. G. d. W. v. Jahre 1886. *A. Mayer.*

Dann kann man (vorausgesetzt, dass $f^{(n)}(x)$ eine stetige Function ist) für den absoluten Werth von x eine obere Grenze g so bestimmen, dass, so lange $-g < x < g$ ist, $f^{(n)}(\vartheta x)$ jedenfalls das Vorzeichen von $f^{(n)}(0)$ hat. Ist nun n eine ungerade Zahl, so wechselt die rechte Seite der Gleichung (1) mit x das Vorzeichen, die Function $f(x)$ kann also für beliebig kleine Argumente x sowohl positiv als negativ werden und es findet aus diesem Grunde weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Ist dagegen n eine gerade Zahl, so hat die rechte Seite immer das Vorzeichen von $f^{(n)}(\vartheta x)$, welches für alle Argumente x zwischen $-g$ und $+g$ mit dem Vorzeichen von $f^{(n)}(0)$ übereinstimmt; das Gleiche gilt daher von der Function $f(x)$ und es findet also für $x = 0$ ein Maximum oder Minimum statt, je nachdem $f^{(n)}(0)$ negativ oder positiv ist.

Wir bemerken, dass die Gültigkeit der vorstehenden Deduction nicht von der Entwickelbarkeit der Function $f(x)$ abhängt. Vielmehr gelten alle Schlüsse unbedingt, sobald sämmtliche Ableitungen von $f(x)$ (eigentlich sogar nur die n ersten) in der Umgebung der Stelle $x = 0$ endlich und stetig sind. Das aufgestellte Kriterium bleibt daher beispielsweise auch für die Function

$$f(x) = x^2 - e^{-\frac{1}{x^2}}$$

richtig, obschon dieselbe nicht nach Potenzen von x entwickelt werden kann. Die beiden ersten Ableitungen sind hier stetige Functionen, ausserdem ist $f''(0)$ positiv $(= 2)$; daraus folgt ohne Bedenken, dass ein Minimum eintritt.

Das Kriterium versagt bei Functionen mit durchaus endlichen und stetigen Ableitungen nur dann, wenn für $x = 0$ gleichzeitig die sämmtlichen Ableitungen verschwinden, wie dies bei den Functionen $e^{-\frac{1}{x^2}}$ und $xe^{-\frac{1}{x^2}}$ der Fall ist. Die erste dieser beiden Functionen hat an der Stelle $x = 0$ ein Minimum, die zweite weder ein Minimum noch ein Maximum; aber die Veränderung *beider* Functionen ist in der Umgebung des Punktes $x = 0$ eine so langsame, dass sie in der Potenzentwickelung (1) überhaupt nicht zum Ausdrucke gelangt. Das Kriterium führt daher in diesem Falle nicht gerade zu falschen Resultaten, aber es lässt doch die Frage nach dem Maximum oder Minimum gänzlich offen, welches Verhalten wir eben mit den Worten „das Kriterium versagt“ ausdrücken wollten.

Man kann den Unterschied solcher Functionen, welche für $x = 0$ sämmtliche Ableitungen gleich Null haben und aus diesem Grunde dem allgemeinen Kriterium unzugänglich sind, von den gewöhnlichen Functionen, auf welche dasselbe anwendbar ist, auch ohne Bezugnahme auf die *Ableitungen* folgendermassen charakterisiren:

Bei den gewöhnlichen Functionen geht die Werthänderung in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nach beiden Seiten rascher vor sich, als die Aenderung einer angebbaren Potenz ax^n, d. h. es lassen sich positive Zahlen a, n, g so angeben, dass für alle Werthe von x zwischen $-g$ und $+g$ der absolute Betrag der Function $f(x)$ *grösser* als der von ax^n ist, ausgenommen den einzigen Werth $x = 0$, für den $f(x)$ *gleich* ax^n wird, wobei man offenbar zugleich n als ganze Zahl annehmen kann. Bei den Functionen der anderen Art dagegen existiren solche Zahlen n, a, g nicht, vielmehr wird, den absoluten Werthen nach, $f(x)$ in unmittelbarer Nähe der Stelle $x = 0$ noch *kleiner* als jede beliebige Potenz ax^n.

In der That kann man, wenn in der Gleichung (1) $f^{(n)}(0)$ nicht gleich Null ist, zunächst g so bestimmen, dass für $-g \leqq x \leqq g$ immer auch $f^n(x)$ von Null verschieden ist. Nimmt man dann die Zahl a kleiner als den kleinsten absoluten Werth von $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ im Intervalle $-g$ bis $+g$ an, so ist die Bedingung $[f(x)] > [ax^n]$ für $-g < x < g$ erfüllt; und umgekehrt, wenn diese letzte Bedingung erfüllt ist, können die n ersten Ableitungen von $f(x)$ für $x = 0$ nicht sämmtlich verschwinden, da sonst

$$f(x) = f^{(n+1)}(\vartheta x)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

und somit $\lim\limits_{x=0} \frac{f(x)}{ax^n} = 0$ wäre, was mit der Voraussetzung $[f(x)] > [ax^n]$ für $-g < x < g$ unverträglich ist.

§ 2.
Functionen zweier Veränderlichen. Unrichtigkeit der üblichen Schlussweise.

Den Fall zweier Variabeln x und y sucht man häufig folgendermassen auf den eben erledigten zurückzuführen.

Verschwinden an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ die beiden ersten partiellen Ableitungen der Function $f(x, y)$ nach x und y, so setzt man $x = \varkappa\xi$, $y = \varkappa\eta$ und entwickelt die Differenz $f(\varkappa\xi, \varkappa\eta) - f(0, 0)$, oder, wenn wir der Einfachheit wegen wiederum $f(0, 0) = 0$ annehmen, die Function $f(\varkappa\xi, \varkappa\eta)$ (kurz mit $f_{\xi\eta}(\varkappa)$ bezeichnet) unter Benutzung der Lagrange'schen Restform nach Potenzen von $\varkappa$. Dies giebt:

$$(2)\qquad f(\varkappa\xi, \varkappa\eta) = \frac{1}{1\,.\,2}\,f''_{\xi\eta}(0)\,\varkappa^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,f'''_{\xi\eta}(0)\,\varkappa^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\,f^{(n)}_{\xi\eta}(\vartheta\varkappa)\,\varkappa^n, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Hier ist $\frac{1}{r!}\,f^{(r)}_{\xi\eta}(0)$ ein homogener Ausdruck r^{ten} Grades in ξ und η, welcher sich von dem Gliede r^{ter} Ordnung in der Entwickelung der

Function $f(x, y)$ nach Potenzen von x und y nur dadurch unterscheidet, dass überall ξ, η an Stelle von x, y steht.

Es lässt sich nun im Allgemeinen vermittelst der vorher angegebenen Kriterien für jeden bestimmten Werth des Verhältnisses $\xi : \eta$ entscheiden, ob die bloss noch von der einen Variabeln $\varkappa$ abhängige Function $f_{\xi\eta}(\varkappa)$ an der Stelle $\varkappa = 0$ ein Maximum oder Minimum besitzt. Deuten wir x und y als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene, so wird durch die Gleichungen $x = \varkappa\xi$, $y = \varkappa\eta$ bei constanten Werthen von ξ und η und veränderlichem $\varkappa$ jedesmal eine Gerade definirt, die durch den Nullpunkt geht, und umgekehrt kann jede den Nullpunkt enthaltende Gerade in jener Form dargestellt werden. Es findet dann auf der einzelnen Geraden ξ, η im Nullpunkte ein Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$ oder keines von beiden statt, je nachdem die erste von Null verschiedene Ableitung $f_{\xi\eta}^{(n)}(0)$ von gerader Ordnung und entweder negativ oder positiv, oder von ungerader Ordnung ist.

Man pflegt nun weiter zu schliessen, dass wenn auf jeder der unendlich vielen Geraden durch den Nullpunkt ein Maximum (resp. Minimum) für $\varkappa = 0$ vorhanden ist, ein solches auch für die Function $f(x, y)$ der beiden unabhängigen Variabeln x und y an der Stelle $(0, 0)$ stattfinden müsse, während, wenn auf einigen dieser Geraden ein Maximum, auf anderen ein Minimum eintritt, von einem Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$ an der Stelle $(0, 0)$ nicht die Rede sein könne. Auf diese Weise würde sich als *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung des Minimums (resp. Maximums) die ergeben, dass für *jedes* beliebige Werthepaar ξ, η die erste von Null verschiedene unter den in (2) vorkommenden homogenen Formen $f'_{\xi\eta}(0)$, $f''_{\xi\eta}(0), \ldots$ von gerader Ordnung und positivem (resp. negativem) Werthe sein müsse, und dieses Kriterium würde nur dann versagen, wenn für gewisse Verhältnisse $\xi : \eta$ *alle* jene Formen gleichzeitig verschwänden.

Die vorstehende Deduction enthält indes einen Fehler. Daraus, dass an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ ein Minimum der Function $f(x, y)$ auf jeder einzelnen Geraden stattfindet, folgt noch nicht, dass auch ein Minimum überhaupt eintritt. Die Existenz eines solchen hängt vielmehr davon ab, ob sich eine obere Grenze g so angeben lässt, dass die Function $f(x, y)$ für alle Werthe x, y, welche der Bedingung $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < g$ genügen, positiv wird; oder — geometrisch zu reden — davon, ob ein Kreis mit dem Mittelpunkte $(0, 0)$ existirt, innerhalb dessen die Function $f(x, y)$ durchaus positiv ist — ausgenommen die Stelle $(0, 0)$ selbst, wo sie verschwindet. Es kann aber sehr wohl auf jeder einzelnen Geraden ein Minimum im Null-

punkte stattfinden, ohne dass ein solcher Kreis existirt. Man wird das am Besten an einem Beispiele ersehen.

Es seien durch die Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ zwei Curven definirt, deren jede den Nullpunkt enthält und die xy-Ebene wenigstens in der Umgebung desselben in zwei Theile zerschneidet: einen, in welchem $\varphi(x, y)$ (resp. $\psi(x, y)$) positiv, und einen, in welchem $\varphi(x, y)$ (resp. $\psi(x, y)$) negativ ist. Das Product $f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y)$ wird dann bei dem Fortgange auf einem den Nullpunkt umgebenden kleinen Kreise zweimal positiv und zweimal negativ werden (vgl. Fig. 1) und beim Fortgange auf einer den Nullpunkt enthaltenden Geraden an der Stelle (0, 0) einen Maximal- oder Minimalwerth annehmen, je nachdem die Gerade in's Gebiet $f(x, y) < 0$ oder in's Gebiet $f(x, y) > 0$ eintritt.

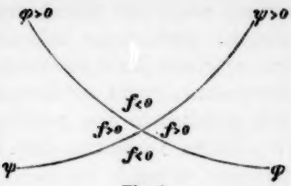

Fig. 1.

Nun kann es aber vorkommen, dass alle überhaupt möglichen Geraden, welche man durch den Nullpunkt legen kann, zunächst im Gebiete $f(x, y) > 0$ bleiben; und zwar wird dies immer eintreten, wenn die beiden Curven an der Stelle (0, 0) eine gemeinschaftliche Tangente haben und in gleichem Sinne gekrümmt sind. In diesem Falle findet auf jeder einzelnen Geraden im Nullpunkte ein Minimum statt, nicht aber ein Minimum überhaupt, da in jeder Nähe des Punktes (0, 0) noch negative Werthe von $f(x, y)$ vorkommen. Es sei z. B.

$$\varphi(x, y) = y - p^2 x^2, \quad \psi(x, y) = y - q^2 x^2.$$

Dann haben wir zwei Parabeln, welche im Nullpunkte die x-Axe berühren und ihre Höhlungen nach oben kehren. Das Product

$$f(x, y) = (y - p^2 x^2)(y - q^2 x^2)$$

ist sowohl oberhalb als unterhalb beider Curven positiv, in dem

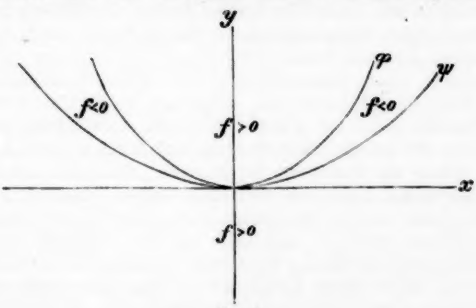

Fig. 2.

zwischen den Curven gelegenen Theile der Ebene aber negativ (vgl. Fig. 2). Jede von der y- und der x-Axe verschiedene, durch

den Nullpunkt gelegte Gerade trifft in grösserem oder geringerem Abstande von diesem einmal das Gebiet $f < 0$, tritt aber vom Nullpunkte aus immer zunächst in das Gebiet $f > 0$. Die Strecke vom Nullpunkte bis zum Uebergange der Geraden in den negativen Theil sinkt allerdings, wenn die Gerade um den Nullpunkt gegen die x-Axe hin gedreht wird, unter jede angebbare Grenze; aber in dem Momente, wo sie gleich Null werden würde, nämlich beim Zusammenfallen mit der x-Axe, streift die Gerade nur noch das negative Gebiet und hält sich gänzlich in dem positiven Theile.

Dieses Verhalten der Function $f(x, y)$ auf den verschiedenen Geraden, wonach die x-Axe eine ausgezeichnete Stellung unter den letzten einnimmt, spiegelt sich in dem Verhalten der Coefficienten der Entwickelung (2) gleichsam ab. Es wird nämlich

$$f(\varkappa\xi, \varkappa\eta) = \eta^2\varkappa^2 - (p^2 + q^2)\,\xi^2\eta\varkappa^3 + p^2q^2\xi^4\varkappa^4;$$

der Coefficient von $\varkappa^2$ ist also im Allgemeinen positiv, ausgenommen für $\eta = 0$, d. h. für den Fall, dass die Linie ξ, η mit der x-Axe zusammenfällt, wo dann gleichzeitig mit dem Coefficienten von $\varkappa^2$ derjenige von $\varkappa^3$ verschwindet, sodass nun derjenige von $\varkappa^4$ ausschlaggebend wird, welcher wiederum positiv ist.*)

§ 3.

Verschiedene Versuche der Verbesserung.

Nachdem wir erkannt haben, dass aus dem Stattfinden des Maximums, resp. Minimums einer Function $f(x, y)$ auf allen einzelnen

---

*) Das Beispiel $(y - p^2x^2)(y - q^2x^2)$, (welches zugleich das denkbar einfachste sein dürfte), rührt von Herrn G. Peano her. Derselbe hat in einigen dem Werke: *A. Genocchi, Calcolo differenziale pubblicato con aggiunte dal G. Peano, Torino* 1884" beigefügten Noten zuerst die oben auseinandergesetzte Schlussweise, welche man in der Theorie der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Veränderlichen häufig angewandt findet, in ihrer Fehlerhaftigkeit erkannt und bis zu einem gewissen Punkte durch eine bessere ersetzt. Ich war, ohne Peano zu kennen, durch Untersuchungen über höhere Variationen bestimmter Integrale auf Beispiele geführt worden, welche mir für das Gebiet der Variationsrechnung schliesslich genau die gleiche Erkenntniss verschafften, welche Peano auf dem Gebiete der gewöhnlichen Maxima und Minima gewonnen hatte (vgl. meine Note: Ueber die Bedeutung der Begriffe „Maximum und Minimum" in der Variationsrechnung, Leipz. Ber. 1885 und Mathem. Annalen XXVI, p. 197). Ich fand sodann, dass analoge Verhältnisse auch in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima vorliegen, und hatte die hier folgenden Untersuchungen, welche über diejenigen von Peano wesentlich hinausgehen, der Hauptsache nach beendigt, als ich durch Herrn A. Mayer auf das neu erschienene Werk von Genocchi-Peano hingewiesen wurde, welches, wie mir derselbe mittheilte, auch von Herrn Harnack in einem Nachtrage zu seiner Serret-Uebersetzung (II, 1 p. 380) bereits citirt wird. Ich werde in diesem Aufsatze diejenigen Resultate, welche sich bei Peano finden, ausdrücklich als solche bezeichnen.

durch den Nullpunkt zu legenden Geraden noch keine Schlüsse auf ein Maximum oder Minimum in der *Ebene* gezogen werden können, tritt die Frage nach erweiterten Kriterien für die Maxima und Minima der letzten Art auf. Wir wollen, bevor wir diese Frage in völlig erschöpfender Weise beantworten, zunächst einige Schritte auf einem Wege vorwärts thun, welcher auf den ersten Augenblick verlockend erscheinen könnte, während eine nähere Betrachtung desselben uns überzeugen wird, dass er nicht wesentlich weiter führt als der zuerst eingeschlagene.

Bei dem Beispiele $f(x, y) = (y - p^2x^2)(y - q^2x^2)$ erhalten wir auf allen Geraden ein Minimum im Nullpunkte. Nicht so überhaupt auf allen Curven, welche durch den Nullpunkt gelegt werden können; vielmehr muss sich auf jeder Curve, welche in dem von den beiden gegebenen Parabeln eingeschlossenen Flächenstreifen liegt (beispielsweise auf der Parabel $y - \frac{p^2 + q^2}{2} x^2 = 0$) ein Maximum ergeben. Nun lässt sich jede beliebige Curve analytisch durch einen variabeln Parameter $\varkappa$ darstellen, indem x und y als Functionen desselben ausgedrückt werden. Es liegt daher die Frage nahe, ob man nicht durch Untersuchung des Maximums oder Minimums auf allen einzelnen Curven, welche den Nullpunkt enthalten, zur Entscheidung über das Maximum oder Minimum in der *Ebene* gelangen kann. Es ist wohl zweifellos, dass hier ein Zusammenhang besteht; die Beschränkungen indessen, welche man den Functionen $x(\varkappa)$ und $y(\varkappa)$ und dadurch den in Betracht zu ziehenden Curven auferlegen muss, um auf die Function $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ die für Functionen einer Veränderlichen entwickelten Kriterien mit Erfolg anwenden zu können, machen auch diese Schlussweise unbrauchbar.

Offenbar nämlich ist die einzige Form, welche man den Functionen $x(\varkappa)$ und $y(\varkappa)$ geben kann, ohne die Principien der ganzen Theorie zu verlassen, diejenige von Reihen, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortschreiten. Man setze also:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x(\varkappa) &= \xi_1 \varkappa + \xi_2 \varkappa^2 + \cdots + \xi_m \varkappa^m, \\ y(\varkappa) &= \eta_1 \varkappa + \eta_2 \varkappa^2 + \cdots + \eta_n \varkappa^n, \end{aligned}$$

und stelle die Forderung, dass die Function $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ für $\varkappa = 0$ ein Maximum (resp. Minimum) werden solle, welche Werthe man auch für die ganzen positiven Zahlen m, n und die $m + n$ Grössen $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n$ annehmen mag, vorausgesetzt natürlich, dass nicht alle ξ und η gleichzeitig gleich Null sind.

Diese Forderung ist z. B. bei der Function

$$f(x, y) = (y - p^2x^2)(y - q^2x^2)$$

hinreichend, um das *Nichtstattfinden* eines Maximums oder Minimums zu Tage treten zu lassen. Denn für $m = 1$, $n = 2$ wird

$$f\big(x(\varkappa),\, y(\varkappa)\big) = \eta_1^2\varkappa^2 + \eta_1\big(2\eta_2 - (p^2+q^2)\,\xi_1^2\big)\,\varkappa^3 \\ + (\eta_2 - p^2\xi_1^2)(\eta_2 - q^2\xi_1^2)\,\varkappa^4.$$

Ist η_1 von Null verschieden, so ist der Coefficient von $\varkappa^2$ positiv, es findet daher auf allen solchen Curven im Nullpunkte ein Minimum statt; ist dagegen $\eta_1 = 0$, so reducirt sich die Entwickelung auf das Glied 4^{ter} Ordnung, und dieses kann durch geeignete Wahl der Constanten ξ_1 und η_2 $\left(\text{z. B. durch die Substitution } \eta_2 = \frac{p^2+q^2}{2}\,\xi_1^2\right)$ negativ gemacht werden; es findet daher auf den Curven der letzten Art unter Umständen ein Maximum statt. Es ist aber gerade bei diesem Beispiele evident, dass man durch Anwendung dieses Verfahrens eigentlich keinen Vortheil erlangt. Denn der Coefficient von $\varkappa^4$, welcher untersucht werden muss, hat genau die Gestalt der Function $f(x, y)$, nur dass x, y durch die Constanten ξ_1, η_2 ersetzt sind. Die Discussion des Vorzeichens dieser Coefficienten für die verschiedenen Werthe jener Constanten bietet daher an sich genau dieselbe Schwierigkeit, wie die entsprechende Discussion für die Function $f(x, y)$ selbst.

Das folgende Beispiel zeigt noch weiter, dass die gestellte Forderung nicht einmal eine *hinreichende* Bedingung des Minimums ausdrückt und schon aus diesem Grunde werthlos ist. Setzen wir nämlich

$$\varphi(x, y) = y - \sin^2 x,$$
$$\psi(x, y) = y - \sin^2 x - e^{-\frac{1}{x^2}},$$

so werden durch die Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ zwei Curven definirt, welche im Nullpunkte die x-Axe als gemeinschaftliche Tangente und überdies mit einander eine Berührung von unendlich hoher Ordnung haben. Es giebt alsdann keine in der Form (3) darstellbare Curve, welche vom Nullpunkte aus zwischen jene beiden fiele; denn eine solche müsste mit diesen Curven ebenfalls eine Berührung von unendlich hoher Ordnung haben, während offenbar jede Curve von der Form (3) als algebraische Curve nur eine Berührung von endlicher Ordnung mit jenen transcendenten Curven haben kann. Nun ist die Function $f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y)$ in der ganzen Ebene positiv, ausgenommen den zwischen den beiden Curven befindlichen Flächenstreifen, in welchem sie negativ ist; es findet daher an der Stelle $f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Trotzdem tritt auf jeder Curve (3) ein wirkliches Minimum ein, und zwar ein solches, welches durch die für Functionen einer Variabeln gültigen allgemeinen Kriterien deutlich erkennbar ist; in der That überzeugt

man sich leicht, dass bei *jeder* Wahl der Zahlen m, n und der Grössen $\xi_1, \dots \eta_n$ von Null *verschiedene* Coefficienten in der Entwickelung von $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ vorkommen, deren erster dann natürlich jedesmal von gerader Ordnung und positiv ist.

Man könnte die angegebene Methode so erweitern, dass sie auch bei dem letzten Beispiele nicht geradezu ein *falsches* Resultat liefern würde, indem man nämlich das Maximum und Minimum nicht nur auf allen Curven von der Form (3), sondern auch auf allen denjenigen Curven untersucht, welche aus der Form (3) dadurch hervorgehen, dass man m und n unendlich gross werden lässt. In dieser erweiterten Form ist auch die Curve $y - \sin^2 x = 0$ darstellbar, wenn man

$$x = \varkappa, \quad y = \left(1 - \frac{\varkappa^3}{3!} + \frac{\varkappa^5}{5!} - \cdots\right)^2$$

setzt; es würden für diese Curve alsdann die sämmtlichen Entwickelungscoefficienten der Function $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ verschwinden, sodass man einen Schluss auf das Minimum der Function $f(x, y)$ überhaupt nicht ziehen könnte. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese erweiterte Forderung wirklich eine zugleich nothwendige und hinreichende Bedingung des Minimums ausdrückt. Indes ist dieselbe praktisch noch unbrauchbarer, als diejenige, welche vorher angenommen war; denn sie macht durch Einführung unendlich vieler unbestimmter Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \eta_1, \eta_2, \dots$ im Allgemeinen eine unendlich grosse Anzahl von Einzeluntersuchungen nothwendig, da durch Nullsetzen einer genügenden Menge jener Grössen immer beliebig viele der Entwickelungscoefficienten von $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ zum Verschwinden gebracht werden können, wobei also jedesmal der erste nicht verschwindende Coefficient hinsichtlich des Vorzeichens zu untersuchen bleibt. Wir sehen daher von einer weiteren Discussion jener Forderung ab und schlagen jetzt einen Weg ein, der uns auf bequeme Art zu völlig allgemeinen und gleichzeitig praktisch brauchbaren Kriterien hinführen wird.

§ 4.

Fundamentale Eintheilung der Functionen von zwei Variabeln.

Wir beginnen mit einer wichtigen Unterscheidung aller im Nullpunkte verschwindenden Functionen $f(x, y)$ hinsichtlich ihres Verhaltens in der Umgebung dieser Stelle. Wir sahen nämlich, dass bei Functionen einer einzigen Veränderlichen die Anwendbarkeit der auf Potenzentwickelung gegründeten Kriterien des Maximums oder Minimums davon abhängig war, ob die Function $f(x)$ sich in der Umgebung der Stelle $x = 0$, an der sie verschwindet, schnell genug mit x veränderte, sei es in dem einen oder anderen Sinne; es musste eine

Potenz ax^n mit der Eigenschaft existiren, dass zwischen gewissen Grenzen $-g < x < g$ der absolute Werth von $f(x)$ beständig grösser als $[ax^n]$ (oder höchstens gleich $[ax^n]$) wurde; bei denjenigen Functionen, welche dieser Bedingung nicht genügten, konnte auf dem Wege der Potenzentwickelung überhaupt keine Entscheidung über das Maximum oder Minimum gewonnen werden. Offenbar wird für eine Function von zwei Variabeln eine analoge Bedingung existiren, von deren Erfüllung von vornherein die Möglichkeit abhängt, durch Potenzentwickelung über Maximum und Minimum zu entscheiden. Es fragt sich, wie diese Bedingung zu formuliren sein wird. Eine Potenz ar^n (wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) mit der Eigenschaft, dass für $0 < r < g$, d. h. innerhalb eines Kreises mit dem Radius g, überall $f(x, y)$ absolut grösser als ar^n sei, darf man jedenfalls nicht verlangen; denn dadurch würden überhaupt alle Functionen $f(x, y)$, die an der Stelle $(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum haben, von der Untersuchung ausgeschlossen, da dieselben auf jedem noch so kleinen Kreise um den Nullpunkt sowohl positiv als negativ und daher auch gleich Null werden können. Es wäre dies aber auch durchaus nicht die natürliche Verallgemeinerung unserer für Functionen eines einzigen Argumentes präcisirten Forderung; denn die charakteristische Eigenschaft der letzteren lag nur darin, dass das Verhalten der Function in der Umgebung des Nullpunktes bis zu einem *gewissen Grade der Deutlichkeit ausgeprägt* sein musste, gleichgültig, ob dies im Sinne des Maximums oder des Minimums oder des *Nichteintretens* von Maximum und Minimum der Fall war. Zu der wahren Verallgemeinerung jener Forderung für Functionen von zwei Variabeln führt folgende Ueberlegung.

Offenbar wird die im Nullpunkte verschwindende Function $f(x, y)$, da sie stetig ist, auf jedem um den Nullpunkt als Centrum mit einem beliebigen Radius r beschriebenen Kreise irgendwo einen grössten und einen kleinsten Werth annehmen (falls sie sich nicht auf eine Function der einen Variabeln $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ reducirt), und zwar werden die Vorzeichen dieser beiden *extremen Werthe*, welche wir mit $f_1(r)$ und $f_2(r)$ bezeichnen wollen, für genügend kleine Radien r das Eintreten oder Nichteintreten des Maximums oder Minimums im Nullpunkte erkennen lassen. Sind nämlich beide Grössen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ positiv, so wird ein Minimum, sind beide negativ, ein Maximum, sind endlich die Vorzeichen entgegengesetzt, weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinden. Der Grad der *Deutlichkeit*, bis zu welchem das Verhalten der Function $f(x, y)$ ausgeprägt ist, ist nun in allen drei Fällen gleichmässig daran zu messen, ob eine Potenz ar^n mit der Eigenschaft existirt, dass für *jeden* Werth von r unterhalb einer gewissen Grenze g *beide Extremwerthe* $f_1(r)$ und $f_2(r)$, *absolut genommen*, grösser als ar^n werden. Die Forderung, dass eine solche Potenz angebbar sei, ist

die gesuchte Verallgemeinerung der vorher für Functionen einer Veränderlichen präcisirten Bedingung, von welcher die Anwendbarkeit der allgemeinen Kriterien abhing; ist jene Forderung nicht erfüllt, so kann man auf die Gewinnung sicherer Kennzeichen des Maximums oder Minimums durch Potenzentwickelungen irgend welcher Art keinenfalls rechnen. Denn alsdann ist der äusserste Betrag, bis zu welchem die Function $f(x, y)$ in der Umgebung der Stelle (0, 0) entweder dem Werthe Null von der einen Seite nahekommt, oder um den sie darüber hinausgehend sich nach der andern Seite von demselben entfernt, ein so geringer, dass er sich durch keine noch so hohe Potenz von r ausdrücken lässt; die Potenzentwickelung kann daher auch nicht zur Unterscheidung zwischen den beiden Fällen führen, wo der Werth Null nicht ganz erreicht und wo er noch um ein Weniges überschritten wird. Ein Beispiel dieser Art liefert die Function $y^2 + e^{-\frac{p^2}{x^2}}$, welche ein Minimum, sowie die Function

$$y^2 - e^{-\frac{p^2}{x^2}} = \left(y + e^{-\frac{p^2}{2x^2}}\right)\left(y - e^{-\frac{p^2}{2x^2}}\right),$$

welche weder ein Maximum noch ein Minimum hat. Jene nähert sich dem Werthe Null von der positiven Seite bis zum Betrage $e^{-\frac{p^2}{r^2}}$ (für $y = 0$), diese überschreitet die Null um denselben Betrag nach der negativen Seite hin. Uebrigens gehören hierher auch sämmtliche Quadrate von Functionen, die sowohl positiv als negativ werden können, sowie überhaupt alle Functionen, welche in *jeder* Nähe der Stelle (0, 0) den Werth 0 zwar noch erreichen, aber nicht überschreiten.

Existirt nun andrerseits eine Potenz ar^n, deren Werth, solange r unterhalb einer gewissen Grenze g bleibt, immer kleiner als die absoluten Werthe der beiden Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ ist, so lässt sich die Frage, ob im Nullpunkte ein Maximum oder ein Minimum der Function $f(x, y)$ oder keins von beiden stattfindet, auf Grund der Potenzentwickelung immer mit Sicherheit und vermittelst einer endlichen Anzahl principiell geordneter Einzeluntersuchungen beantworten. Wie das geschieht, soll im Folgenden auseinandergesetzt werden.

§ 5.

Reduction des Problems von beliebigen Functionen auf ganze rationale Functionen.

Man entwickle die Functionen $f(x,y)$ mit Benutzung der Lagrange'schen Restform nach Potenzen von x und y. Bezeichnet man dann die Gesammtheit der Glieder r^{ter} Ordnung kurz mit $f^{(r)}(x, y)$, so wird:

$$(4)\qquad \begin{aligned} f(x,y) &= f^{(1)}(x,y) + \cdots + f^{(n)}(x,y) + R_{n+1}(x,y) \\ &= G_n(x,y) + R_{n+1}(x,y). \end{aligned}$$

Das Restglied $R_{n+1}(x, y)$ ist eine binäre Form $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten aus den partiellen Ableitungen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Function $f(x, y)$ für die Argumente ϑx, $\vartheta y (0 < \vartheta < 1)$ gebildet sind. Man kann in diesem Restgliede x und y durch r und zugleich alle Coefficienten durch die grösstmöglichen absoluten Werthe ersetzen, welche sie überhaupt annehmen können, so lange r unterhalb einer gewissen Grenze bleibt, und erhält so für den absoluten Werth von $R_{n+1}(x, y)$ eine obere Grenze Ar^{n+1}. Da nun für alle genügend kleinen r die mit $f_1(r)$ und $f_2(r)$ bezeichneten extremen Werthe der Function $f(x, y)$ nach Voraussetzung absolut grösser als ar^n sind, ar^n aber andrerseits wiederum grösser als Ar^{n+1} ist, so folgt aus Formel (4) *erstens*, dass für genügend kleine r immer die extremen Werthe der ganzen rationalen Function $G_n(x, y)$ mit den Grössen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entsprechend gleiche Vorzeichen haben; und *zweitens*, dass, wenn a' irgend eine Zahl zwischen 0 und a bedeutet, immer eine obere Grenze g' für den Radius r so angegeben werden kann, dass die beiden extremen Werthe von $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$ werden, solange r kleiner als g' bleibt.

Fixiren wir nämlich für's Erste einen Radius r, welcher kleiner als $\frac{a}{A}$ ist und somit der Bedingung $ar^n > Ar^{n+1}$ genügt, so wird auf der rechten Seite der Gleichung

$$(5)\qquad G_n(x, y) = f(x, y) - R_{n+1}(x, y)$$

jedenfalls an denjenigen beiden Stellen, welche den Extremen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ der Function $f(x, y)$ auf der Peripherie des Kreises r entsprechen, das Vorzeichen des ersten Gliedes massgebend sein, da dasselbe hier (absolut) grösser als ar^n ist, während das zweite Glied kleiner als Ar^{n+1} wird; haben nun die beiden Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ gleiches Vorzeichen, so ist überhaupt auf der ganzen Peripherie der Werth von $f(x, y)$, als zwischen den beiden Extremen liegend, absolut grösser als ar^n und stimmt daher nach (5) im Vorzeichen mit $G_n(x, y)$ überein, es haben daher auch die beiden Extreme von $G_n(x, y)$ gleiches Vorzeichen mit den Extremen von $f(x, y)$; haben dagegen die beiden Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entgegengesetzte Vorzeichen, so haben die entsprechenden Werthe von $G_n(x, y)$ ebenfalls entgegengesetzte Vorzeichen, es müssen daher um so mehr den beiden *Extremen* der letzteren Function entgegengesetzte Vorzeichen zukommen. Hiermit ist die *erste* der aufgestellten Behauptungen erwiesen.

Die *zweite* Behauptung ergiebt sich durch ganz ähnliche Ueberlegungen, wenn man den Radius r nicht nur kleiner als $\frac{a}{A}$, sondern

so klein annimmt, dass $ar^n - Ar^{n+1}$ grösser als $a'r^n$ wird, d. h. wenn man g' gleich $\frac{a-a'}{A}$ und r kleiner als g' macht. Dann nämlich hat die rechte Seite der Gleichung (5) für die den Extremen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entsprechenden Werthe von x, y nicht nur das Vorzeichen von $f(x, y)$, sondern ist auch absolut grösser als $a'r^n$. Es wird daher, wenn die Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ gleiches Vorzeichen haben, die rechte Seite der Gleichung (5) überhaupt auf der ganzen Peripherie absolut grösser als $a'r^n$ sein; und wenn die Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, werden die jenen Extremen entsprechenden, ebenfalls mit entgegengesetztem Zeichen versehenen Werthe von $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$ sein, um so mehr muss also dasselbe von den Extremen dieser letzteren Function gelten.

Wir können die beiden eben bewiesenen Behauptungen folgendermassen zusammenfassen.

„Es sei $f(x, y)$ eine an der Stelle $(0, 0)$ verschwindende Function, deren Verhalten in der Umgebung jener Stelle genügend deutlich ist, damit die Entscheidung über das Eintreten oder Nichteintreten eines Maximums resp. Minimums auf dem Wege der Potenzentwickelung nicht principiell unmöglich sei; mit anderen Worten, es existire eine Potenz ar^n von der Art, dass auf jedem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, dessen Radius r kleiner als eine bestimmte Grösse g ist, die beiden extremen Werthe (der grösste und der kleinste) der Function $f(x, y)$, $f_1(r)$ und $f_2(r)$, absolut grösser als ar^n seien. Entwickelt man dann $f(x, y)$ mit Benutzung der Lagrange'schen Restform nach Potenzen von x, y und bezeichnet die Gesammtheit aller Glieder der n ersten Dimensionen mit $G_n(x,y)$, das Restglied mit $R_{n+1}(x,y)$, sodass:

$$f(x, y) = G_n(x, y) + R_{n+1}(x, y)$$

wird, so verhält sich die ganze rationale Function $G_n(x, y)$ in der Umgebung der Stelle $(0, 0)$ ganz so wie die Function $f(x, y)$. Erstens nämlich stimmen die extremen Werthe beider Functionen für jeden genügend kleinen Radius r dem Vorzeichen nach entsprechend überein, woraus folgt, dass im Nullpunkte für beide Functionen gleichzeitig ein Maximum oder ein Minimum oder weder eines noch das andere eintritt; und zweitens sind, wenn a' irgend eine Zahl zwischen 0 und a bedeutet, für jeden Radius r innerhalb eines gewissen Kreises g' die extremen Werthe der Function $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$, woraus folgt, dass auch der Grad der *Deutlichkeit*, welchen das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ zeigt, der nämliche, wie bei der Function $f(x, y)$ ist."

Man überzeugt sich leicht, dass in dem zum Beweise des vorstehenden Satzes angestellten Ueberlegungen überall $f(x, y)$ mit $G_n(x, y)$ vertauscht werden kann, da nur die Gleichung (5) zur An-

wendung kommt. Man erhält dadurch einen neuen Satz, welcher gewissermassen als Umkehrung des vorstehenden gelten kann. Bedenkt man noch, dass, wenn $f(0, 0)$ verschieden von Null ist, man nur im Vorhergehenden überall $f(x, y)$ gurch die Differenz $f(x, y) - f(0, 0)$ zu ersetzen hat, so ergiebt sich durch Zusammenfassung beider Sätze schliesslich Folgendes:

Eine beliebig gegebene Function $f(x, y)$ werde nach Potenzen von x, y entwickelt. Lässt sich dann die Zahl n und eine positive Grösse a' so bestimmen, dass die aus allen Gliedern der ersten n Dimensionen gebildete ganze rationale Function $G_n(x, y)$ auf jedem Kreise r, der in einem gewissen Gebiete g' liegt, extreme Werthe von absolut grösserem Betrage als $a'r^n$ besitzt, so haben die beiden Functionen $f(x, y)$ und $G_n(x, y)$ im Nullpunkte gleichzeitig ein Maximum oder ein Minimum oder weder ein Maximum noch ein Minimum. Lässt sich dagegen eine solche Zahl n mit der angegebenen Eigenschaft nicht bestimmen, so ist die Entscheidung über das Verhalten der Function $f(x, y)$ auf dem Wege der Potenzentwickelung überhaupt principiell unmöglich. Es genügt hiernach, um aus der Function $G_n(x, y)$ einen Schluss auf die Function $f(x, y)$ zu ziehen, noch nicht, dass $G_n(x, y)$ ein deutliches Verhalten hinsichtlich des Maximums oder Minimums zeigt; vielmehr muss noch die auf die Grössenordnung der Extreme von $G_n(x, y)$ bezügliche Bedingung erfüllt sein.

Wir werden die letztere Thatsache später schon an Beispielen von der denkbar einfachsten Beschaffenheit bestätigt finden, *wo nämlich die Function $f(x, y)$ selbst eine ganze rationale Function ist und wo einmal die aus den ersten n Dimensionen zusammengesetzte Function $G_n(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes beständig positiv ist, während $f(x, y)$ auch negativ werden kann, ein andermal hingegen $G_n(x, y)$ sowohl positiv als negativ wird, während $f(x, y)$ constantes Vorzeichen bewahrt* (vgl. Beispiel (4) und (2) am Schluss).

Durch den aufgestellten Fundamentalsatz ist die Untersuchung der Function $f(x, y)$ zurückgeführt auf die Untersuchung der ganzen rationalen Function $G_n(x, y)$. Man wird zunächst $n = 2$ annehmen, dann $n = 3$ u. s. w., und jedesmal die entsprechende Function $G_n(x, y)$ hinsichtlich ihrer Extremwerthe prüfen. Ist dann die Entscheidung über das Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$ überhaupt auf dem Wege der Potenzentwickelung ausführbar, so muss man früher oder später zu einer Function $G_n(x, y)$ gelangen, für welche jene Extremwerthe absolut grösser als ein Ausdruck $a'r^n$ sind, und diese Function liefert die gesuchte Entscheidung.

Es ist jetzt die Frage zu beantworten: Wie kann man erkennen, ob eine Grenze g' und eine Grösse a' von der Art existiren, dass auf jedem Kreise $r < g'$ die Extremwerthe einer gegebenen ganzen rationalen

Function n^{ten} Grades $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$ werden? Und wie kann man eventuell die Vorzeichen jener Extremwerthe feststellen und damit schliesslich zur Entscheidung über das Maximum oder Minimum der Function $G_n(x, y)$ im Nullpunkte kommen? Mit anderen Worten: Wie gestaltet sich die Theorie der Maxima und Minima für ganze rationale Functionen, auf deren Behandlung der Fundamentalsatz das allgemeine Problem zurückführt?

Diese Frage lässt sich, wie die nachfolgende Untersuchung zeigen wird, mit absoluter Vollständigkeit beantworten.

§ 6.

Homogene Functionen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, wo $G_n(x, y)$ ein *homogener* Ausdruck n^{ten} Grades ist:

$$G_n(xy) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} y^i.$$

Der Werth einer solchen homogenen Function ändert sich auf jeder den Nullpunkt enthaltenden Geraden proportional der n^{ten} Potenz von r. Sind also G und G' die Extremwerthe von $G_n(x, y)$ auf der Peripherie des Einheitskreises, so sind Gr^n und $G'r^n$ die Extremwerthe auf einem beliebigen Kreise r. Die Vorzeichen von G und G' kann man direct durch Zerlegung der Form G_n in ihre linearen Factoren erkennen, zu deren Auffindung die Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades genügt. Im Voraus sieht man, dass, wenn die Ordnung n eine *ungerade* ist, G und G' von 0 verschieden und entgegengesetzt gleich sein müssen, da der Ausdruck $G_n(x, y)$ bei Vertauschung von x, y gegen $-x$, $-y$ sein Vorzeichen wechselt. Ist dagegen n eine *gerade* Zahl, und sind erstens die Linearfactoren imaginär, so kann die Form $G_n(x, y)$ weder ihr Vorzeichen wechseln, noch verschwinden, sie ist *definit* und die Extreme G und G' haben gleiche Vorzeichen; sind zweitens reelle Linearfactoren und mindestens einer derselben in ungerader Ordnung vorhanden, so nimmt die Form $G_n(x, y)$ beide Vorzeichen an, sie ist *indefinit* und das Vorzeichen von G' ist dem von G entgegengesetzt; treten endlich drittens reelle Linearfactoren zwar auf, aber jeder nur in gerader Ordnung, so kann die Form $G_n(x, y)$ zwar verschwinden, aber nicht das Zeichen wechseln, sie ist *semidefinit* und eins der Extreme G und G' ist gleich Null.

In allen Fällen mit Ausnahme des letzten, ist eine positive Zahl a' so bestimmbar, dass auf jedem beliebigen Kreise r die Extremwerthe der Function $G_n(x, y)$, nämlich Gr^n und $G'r^n$; absolut grösser als $a'r^n$ werden; man braucht ja nur a' kleiner als die absoluten Werthe

von G und G' anzunehmen. In allen jenen Fällen findet daher an der Stelle $(0, 0)$ auf genügend *deutliche* Weise (im vorher präcisirten Sinne des Wortes) entweder ein Maximum oder ein Minimum der Function $G_n(x, y)$ oder keines von beiden statt, worüber die Vorzeichen der Extreme G und G' entscheiden. Welches diese Vorzeichen sind, ist jedesmal leicht aus den Linearfactoren erkennbar; denn wenn die Form $G_n(x, y)$ indefinit ist, so sind die Vorzeichen entgegengesetzt, und wenn sie definit ist, stimmen sie unter einander und mit dem Vorzeichen der Form $G_n(x, y)$ selbst für irgend ein specielles Werthepaar von x, y überein. In dem Falle endlich, wo reelle Linearfactoren vorhanden sind, aber jeder nur in gerader Ordnung, tritt an der Stelle $(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum der Form $G_n(x, y)$ ein, da dieselbe in der Umgebung zwar nicht beide Vorzeichen erhalten, wohl aber verschwinden kann. Eine Grösse a' mit der verlangten Eigenschaft existirt in diesem Falle nicht.

Die Zerlegung der Function $G_n(x, y)$ in Linearfactoren, welche die Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades erfordert, ist übrigens nicht unbedingt nothwendig, sondern man kann auch durch elementare algebraische Operationen zum Ziele gelangen.

Zunächst nämlich wird man nach bekannter Methode durch Absonderung der etwaigen vielfachen Factoren die Function $G_n(x, y)$ auf die Form bringen:

$$G_n = \psi_m^m \psi_{m-1}^{m-1} \cdots \psi_2^2 \psi_1,$$

wo allgemein $\psi_\varkappa$ das einfache Product aller der Linearfactoren bezeichnet, welche G_n in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung enthält (sodass also, wenn kein Factor dieser Ordnung vorkommt, $\psi_\varkappa$ eine blosse Constante ist, und im Besondern die Function G_n sich auf ψ_1 reducirt, wenn sie nur einfache Factoren besitzt). Vermittelst des Sturm'schen Satzes lässt sich dann weiter für jede der Functionen $\psi_m, \ldots$ entscheiden, ob sich unter ihren Linearfactoren reelle befinden oder nicht; worauf man, da man auch die Exponenten $m, \ldots$ kennt, die vorher angegebenen Sätze unmittelbar anwenden kann.

Die eben skizzirte Theorie der ganzen homogenen Functionen liefert uns auf Grund des Fundamentaltheorems für die allgemeine Theorie des Maximums und Minimums beliebiger Functionen den bekannten Satz:

„*Sind in der Entwickelung der Function $f(x, y)$ nach Potenzen von x, y alle Glieder 1^{ter} bis $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension identisch gleich Null, während die Glieder n^{ter} Dimension eine Form $G_n(x, y)$ bilden, und ist erstens $G_n(x, y)$ indefinit (was bei ungeradem n immer der Fall ist), so findet an der Stelle $(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum der Function $f(x, y)$ statt; ist zweitens $G_n(x, y)$ definit, so tritt je nach*

dem Vorzeichen dieser Form ein Maximum oder Minimum von $f(x, y)$ *ein; ist endlich* $G_n(x, y)$ *semidefinit, so lässt sich das Verhalten der Function* $f(x, y)$ *aus dem Verhalten von* $G_n(x, y)$ *überhaupt nicht erkennen.*"*)

§ 7.

Nicht homogene Functionen.

Es sei nun $G_n(x, y)$ ein beliebiger (nicht homogener) Ausdruck n^{ten} Grades ohne constantes Glied. Die Frage, ob im Nullpunkte ein Minimum oder ein Maximum von $G_n(x, y)$ stattfindet, d. h. ob in der Umgebung desselben $G_n(x, y)$ überall dasselbe Vorzeichen hat, ist dann offenbar gleichbedeutend mit der Frage, ob die algebraische

---

*) Der Beweis dieses bekannten Satzes wird häufig auf Betrachtungen gegründet, deren Fehlerhaftigkeit wir im Anfange dieses Aufsatzes nachgewiesen haben. Herr Peano giebt, um den gewöhnlichen Fehler zu vermeiden, einen Beweis (p. 197), welcher auf demselben Grundgedanken wie der unsrige beruht. Es scheint mir indes, dass dieser Beweis viel zu umständlich ist, wofern man bei dem einzelnen Satze stehen bleiben und denselben nicht vielmehr bloss als Bestandtheil einer umfassenderen Theorie ansehen will. Hat man nur jenen einen Satz im Auge, so lässt sich der Beweis (für beliebig viele Variabeln $x, y, z, \ldots$) wohl am kürzesten dadurch führen, dass man in der Entwickelung der Function $f(x, y, z, \ldots)$ schon für das Glied n^{ter} Ordnung (nicht erst für das nächste) die Lagrange'sche Restform einführt. Es wird dann nämlich

$$f(x, y, \cdots) = \overline{G}_n(x, y, \cdots),$$

wo $\overline{G}_n(x, y, \cdots)$ eine Form n^{ten} Grades ist, deren Coefficienten nicht, wie diejenigen von $G_n(x, y, \ldots)$ aus den n^{ten} partiellen Ableitungen der Function $f(x, y, \ldots)$ für die Argumente $0, 0, \ldots$, sondern aus den entsprechenden Ableitungen für die Argumente $\vartheta x, \vartheta y, \ldots$ $(0 < \vartheta < 1)$ zusammengesetzt sind. Man erkennt nun leicht, dass, so lange r, d. i. $\sqrt{x^2 + y^2 + \cdots}$ und somit gleichzeitig die Grössen $\vartheta x, \vartheta y, \ldots$ unterhalb einer gewissen Grenze g bleiben, die Form $\overline{G}_n(x, y, \ldots)$ definit oder indefinit ist, jenachdem die Form $G_n(x, y, \ldots)$ definit oder indefinit ist. Denn die beiden extremen Werthe welche eine Form n^{ter} Ordnung mit unbestimmten Coefficienten annimmt, wenn man ihre Argumente $x, y, \ldots$ der Bedingung $x^2 + y^2 + \cdots = 1$ unterwirft, sind offenbar stetige (algebraische) Functionen jener Coefficienten; und da diese Extremwerthe für die Form $G_n(x, y, \ldots)$, falls dieselbe entweder definit oder indefinit (nur nicht semidefinit) ist, beide von Null verschieden sind, werden sie bei genügend kleinen Veränderungen der Coefficienten der Form, d. h. (wofern wir diese in die Form $\overline{G}_n(x, y, \ldots)$ übergehen lassen) bei genügend kleinen Werthen von $\vartheta x, \vartheta y, \ldots$ ihre Vorzeichen nicht wechseln. – Es findet daher an der Stelle $(0, 0, \ldots)$ ein Maximum oder Minimum der Function $\overline{G}_n(x, y, \ldots)$ (d. h. der Function $f(x, y, \ldots)$) oder weder das eine noch das andere statt, je nachdem die Form $G_n(x, y, \ldots)$ definit und entweder negativ oder positiv, oder indefinit ist. W. z. b. w.

Curve $G_n(x, y) = 0$ im Nullpunkte einen isolirten Punkt besitzt, oder nicht. Hierdurch wird der Gedanke nahe gelegt, die bei der Discussion der Singularitäten algebraischer Curven gebräuchlichen Methoden auf unsern Fall anzuwenden. In der That werden uns jene Methoden von wesentlichem Nutzen sein; denn wir werden vermittelst derselben die Discussion der Function $G_n(x, y)$ auf die Discussion einer Reihe *homogener* Functionen reduciren und so zur vollständigen Beantwortung nicht nur der Frage nach dem Maximum oder Minimum von $G_n(x, y)$, sondern auch der Frage nach der Existenz eines Ausdrucks $a'r^n$ gelangen, welcher für alle genügend kleinen Werthe von r kleiner sein soll, als die absoluten Beträge der dem Radius r entsprechenden Extremwerthe von $G_n(x, y)$.

1. Um uns zunächst über die verschiedenen Möglichkeiten, welche in dem Verhalten der Function $G_n(x, y)$ auftreten können, zu orientiren, fassen wir einen kleinen Kreis r ins Auge und suchen auf demselben diejenigen beiden Stellen, an welchen die Function $G_n(x, y)$ ihren grössten und ihren kleinsten Werth annimmt. Man findet dieselben bekanntlich, indem man die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial G_n(x, y)}{\partial x} - \lambda x = 0,$$

$$\frac{\partial G_n(x, y)}{\partial y} - \lambda y = 0,$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

nach x, y und λ auflöst. Durch Elimination von λ aus den beiden ersten Gleichungen entsteht die Gleichung n^{ten} Grades

$$(1) \qquad y\,\frac{\partial G_n(x, y)}{\partial x} - x\,\frac{\partial G_n(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Dieselbe muss für alle Werthe von x und y befriedigt werden, welche den Stellen der extremen Werthe von $G_n(x, y)$ auf ganz beliebigen Kreisen r entsprechen. Es liegen daher alle jene Extremstellen auf der durch die Gleichung (1) definirten algebraischen Curve. Nun ist aus der Theorie der algebraischen Functionen bekannt, dass jeder den Nullpunkt enthaltende Zweig einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung sich in der Umgebung des Nullpunktes durch eine unabhängige Variable $\varkappa$ in der Form:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a_1\varkappa + a_2\varkappa^2 + \cdots, \\ y = b_1\varkappa + b_2\varkappa^2 + \cdots \end{cases}$$

darstellen lässt; und zwar kann die Darstellung, welche auf unendlich viele Arten möglich ist, immer so eingerichtet werden, dass in jeder

der *beiden* Reihen der erste von Null verschiedene Coefficient (falls ein solcher überhaupt existirt) höchstens den Index n hat. Es sind also auch diejenigen beiden den Nullpunkt enthaltenden Zweige der algebraischen Curve (1), deren Schnittpunkte mit jedem Kreise von hinreichend kleinem Radius r die Stellen liefern, welche den extremen Werthen von $G_n(x, y)$ auf diesem Kreise entsprechen, in der Form (2) durch einen unabhängigen Parameter $\varkappa$ darstellbar, so lange wenigstens, als es sich nur um die unmittelbare Umgebung des Nullpunktes, d. h. um genügend kleine Werthe von $\varkappa$ handelt. Wir wollen jene Zweige kurz die beiden *Extremcurven* der Function $G_n(x, y)$ nennen.

Es ist jetzt der Fall, wo (ausser etwa für vereinzelte Werthe von r) die Extremwerthe von $G_n(x, y)$ beide von Null verschieden sind, von dem andern, wo einer derselben beständig gleich Null ist, zu trennen. Sind beide Extremwerthe von Null verschieden, so wird der Ausdruck $G_n(x, y)$, falls man für x und y die einer Extremcurve entsprechenden Reihen (2) einsetzt, mit einer Potenz $A\varkappa^m$ beginnen, welche für genügend kleine Werthe von $\varkappa$ sowohl das Vorzeichen als auch die Ordnung der Kleinheit des ganzen Ausdrucks bestimmt. Diese Ordnung ist die m^{te}, wofern man $\varkappa$ als Grösse erster Ordnung, und die $\frac{m}{\mu}^{\text{te}}$, wofern man r als Grösse erster Ordnung betrachtet und mit μ den niedrigsten in den Reihen (2) *wirklich vorkommenden* Exponenten von $\varkappa$ bezeichnet. Die Zahl μ ist, wie schon erwähnt, bei geeigneter Wahl der Parameterdarstellung (2) höchstens gleich n. Entsprechende Grössen A', m' und μ' erhält man für die zweite Extremcurve. Sind nun die Zahlen m und m' nicht beide gerade, so kann von einem Minimum oder Maximum der Function $G_n(x, y)$ im Nullpunkte keinenfalls die Rede sein, da die Function dann jedenfalls auf einer Extremcurve das Vorzeichen mit $\varkappa$ wechselt. Das Gleiche gilt, wenn zwar m und m' gerade Zahlen sind, A und A' aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, da alsdann auch die Function $G_n(x, y)$ auf den beiden Extremcurven verschiedene Vorzeichen aufweist. Ist endlich m und m' gerade und zugleich A von gleichem Vorzeichen mit A', so tritt ein Maximum oder Minimum der Function $G_n(x, y)$ ein, je nachdem dieses Vorzeichen das positive oder das negative ist. In allen drei Fällen lässt sich offenbar eine Grösse a' und eine obere Grenze g' des Radiusvectors r so bestimmen, dass für $r < g'$ die Werthe von $G_n(x, y)$ auf beiden Extremcurven überall absolut grösser als $a' r^p$ werden, wo mit p die grössere der beiden Zahlen $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{m'}{\mu'}$ bezeichnet ist, und zwar ist dieser Exponent p (der aber natürlich nicht nothwendig eine ganze Zahl zu sein braucht), zugleich der *kleinste*, für welchen ein Ausdruck $a' r^p$ mit der angegebenen Eigenschaft existirt.

Ist dagegen der Werth von $G_n(x, y)$ auf einer der beiden Extremcurven beständig gleich Null, so findet selbstverständlich kein Maximum oder Minimum im Nullpunkte statt; und noch weniger giebt es einen Ausdruck $a'r^p$ von der eben verlangten Art. Dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn die Function $G_n(x, y)$ einen quadratischen Factor enthält, durch dessen Nullsetzen eine den Nullpunkt enthaltende reelle Doppelcurve definirt wird, da sonst mit dem Verschwinden der Function $G_n(x, y)$ beim Fortgange auf irgend einem Kreise r ein Zeichenwechsel verbunden sein müsste. Nun kann man sich allemal im Voraus durch elementaralgebraische Operationen Gewissheit hinsichtlich der Existenz quadratischer Factoren überhaupt verschaffen. Wir wollen daher in der Folge der Einfachheit wegen annehmen, dass die Function $G_n(x, y)$ solche quadratische Factoren, durch welche *reelle* Doppelcurven definirt würden, jedenfalls nicht enthält.

Unter dieser Voraussetzung, deren Eintreffen man bei jedem einzelnen Beispiele in erster Linie zu prüfen haben wird, giebt es, den vorher angestellten Ueberlegungen zufolge, immer eine kleinste Zahl p, zu welcher sich eine Constante a' und eine obere Grenze g' des Radius r so bestimmen lässt, dass auf jedem Kreise $r < g'$ beide Extremwerthe der Function $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^p$ werden, und zwar drückt jene Zahl p (wenn man die Ordnung von r als Einheit nimmt) die Ordnung der Kleinheit der Function $G_n(x, y)$ auf derjenigen der beiden Extremcurven aus, auf welcher diese Ordnung die höhere ist. Ist p höchstens gleich n, so ist $a'r^p$ für kleine r nicht kleiner als $a'r^n$, die beiden Extremwerthe von $G_n(x, y)$ sind daher sicher auch absolut grösser als $a'r^n$; ist dagegen p grösser als n, so wird für kleine r mindestens einer der Extremwerthe von G_n absolut kleiner als ar^n, wie auch die Constante a gewählt werden mag; denn p ist der kleinste Exponent, für welchen die Extremwerthe absolut noch grösser als ein Ausdruck $a'r^p$ bleiben. Je nach dem Verhalten auf beiden Extremcurven tritt im Nullpunkte ein Maximum oder ein Minimum der Function $G_n(x, y)$ oder weder eins noch das andere ein. Indessen ist nach unserem Fundamentaltheorem die Function $G_n(x, y)$ für eine Function $f(x, y)$, aus deren Entwickelungsgliedern 1^{ter} bis n^{ter} Ordnung sie besteht, hinsichtlich des Maximums oder Minimums nur dann massgebend, wenn der charakteristische Exponent p höchstens gleich n ist.

2. Wollte man im einzelnen Falle die Function $G_n(x, y)$ auf dem Wege, welchen die vorstehenden allgemeinen Ueberlegungen genommen haben, discutiren, so müsste man die Coefficienten in den Reihen (2) wirklich berechnen und alsdann diese Reihen in die Function $G_n(x, y)$ einsetzen. Ein solches Verfahren wäre, da jene Coef-

ficienten von unübersichtlichen Gleichungen höheren Grades abhängen, äusserst schwerfällig. Nun lässt sich aber ein Algorithmus aufstellen, der aus lauter elementaren Operationen besteht und indirect schliesslich zu demselben Ziele führt, welches bei den vorstehenden Ueberlegungen direct ins Auge gefasst wurde. Dieser Algorithmus ist in seinen wesentlichen Zügen als Newton-Cramer'sche Regel aus der Theorie der Singularitäten algebraischer Curven längst bekannt.

Der Grundgedanke, durch welchen man zu diesem Algorithmus hingeleitet wird, ist folgender: Man denke sich zunächst die Reihen (2) mit ihren unbestimmten Coefficienten $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ in die Function $G_n(x, y)$ eingesetzt und diese nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt. Dann nehme man für die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ alle überhaupt möglichen Werthe an und untersuche jedesmal die niedrigste in der Entwickelung von $G_n(x, y)$ auftretende Potenz von $\varkappa$. Jedes System von Werthen der Coefficienten $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ stellt eine bestimmte Curve dar, und die niedrigste Potenz von $\varkappa$ charakterisirt jedesmal das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ auf derselben hinsichtlich des Maximums oder Minimums. Unter den unendlich vielen Curven kommen dann jedenfalls auch die beiden Extremcurven vor, welche die endgültige Entscheidung der gestellten Fragen liefern; die Discussion derselben wird daher in der Discussion aller überhaupt möglichen Curven implicite erhalten sein.

Es lässt sich aber weiter zeigen, dass man auf diesem Wege jedesmal schon durch eine *endliche* Anzahl einzelner Untersuchungen zu sicherer Entscheidung gelangen kann.

Man erkennt dies am besten, wenn man die Form der Reihen (2) von Anfang an noch beschränkt. Jede beliebige Einschränkung nämlich ist für unsern Zweck zulässig, sobald nur die Gewissheit vorliegt, dass durch dieselbe keine der beiden Extremcurven ausgeschlossen wird. Nun lässt sich jeder Zweig einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung, welche den Nullpunkt enthält, immer durch Gleichungen von der Form

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a_\alpha \varkappa^\alpha, \\ y = b_\beta \varkappa^\beta + b_{\beta+1} \varkappa^{\beta+1} + \cdots \end{cases}$$

ausdrücken, wo sowohl α als auch der Index β des ersten von Null verschiedenen Coefficienten b_β (falls ein solcher überhaupt existirt) höchstens gleich n ist. Unter den Curven von der Form (3) müssen daher nothwendig auch die beiden unbekannten Extremcurven enthalten sein.

Enthält nun, wie wir angenommen haben, die Function $G_n(x, y)$ keinen quadratischen Factor, dessen Nullsetzung eine reelle Doppelcurve definirt, so beginnen die den beiden Extremcurven (3) entsprechenden Entwickelungen von $G_n(x, y)$ mit Potenzen $A\varkappa^m$, resp.

$A'\varkappa^{m'}$. In die Coefficienten A und A' dieser Potenzen können die Grössen b jedenfalls höchstens bis zum Index m, resp. m' eingehen. Es wird daher, um das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes und speciell auf ihren beiden Extremcurven zu erkennen, genügen, dass man, unter M die grösste der Zahlen m und m' verstanden, nach Einführung der unbestimmten Reihen

$$x = a_\alpha \varkappa^\alpha,$$
$$y = b_1 \varkappa + b_2 \varkappa^2 + \cdots$$

in die Function $G_n(x, y)$ nur den ersten M Grössen $b_1, b_2, \ldots$ alle möglichen Werthe giebt; denn die Werthe der folgenden sind ohne Einfluss auf das Verhalten der Function. Nun kennt man allerdings die Zahl M nicht im Voraus; dieselbe ergiebt sich indessen im Laufe der Untersuchungen von selbst. Denn für beliebig angenommene Werthe einer gewissen Anzahl von Coefficienten b kann man, wie in der Folge ausführlich gezeigt werden soll, jedesmal entscheiden, ob die höheren Coefficienten noch Einfluss auf das erste Glied der Entwickelung von $G_n(x, y)$ haben können, oder nicht; zieht man also der Reihe nach immer mehr Coefficienten b in Betracht, so erkennt man den Moment, wo die Zahl M erreicht ist, ganz genau.

Durch die vorangehende Ueberlegung sollte zunächst nur nachgewiesen werden, dass man schliesslich immer zu einer Zahl M mit der Eigenschaft gelangen muss, dass die Coefficienten $b_{M+1}, b_{M+2}, \ldots$ für die Beurtheilung des Verhaltens von $G_n(x, y)$ auf den beiden Extremcurven unwesentlich sind.

3. Wir gehen jetzt dazu über, das in den Grundzügen angedeutete Verfahren schrittweise im Einzelnen durchzuführen.

Setzt man nach (3)

$$x = a_\alpha \varkappa^\alpha,$$
$$y = b_\beta \varkappa^\beta + b^{\beta+1} \varkappa^{\beta+1} + \cdots$$

und lässt die Coefficienten $a_\alpha, b_\beta, \ldots$ unbestimmt, während man den Zahlen α und β irgend welche Werthe giebt, so werden im Allgemeinen nicht alle Glieder der Function $G_n(x, y)$ bei der Entwickelung nach $\varkappa$ Beiträge zu der niedrigsten Potenz liefern. Man gewinnt einen Ueberblick über die verschiedenen möglichen Fälle vermittelst der Newton-Cramer'schen Regel.

Es sei nämlich $x^\xi y^\eta$ ein Potenzausdruck mit unbestimmten Exponenten ξ, η; wir fragen zunächst nach den sämmtlichen Werthen ξ, η, welche denselben, wenn darin

$$x = \varkappa^\alpha, \quad y = \varkappa^\beta \tag{4}$$

gesetzt wird, in eine gegebene Potenz $\varkappa^m$ verwandeln. Offenbar haben diese Eigenschaft alle diejenigen Zahlen ξ, η, welche der Gleichung

$$\alpha\xi + \beta\eta = m$$

genügen, und nur diese. Deuten wir ξ und η als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so definirt jene Gleichung eine gerade Linie, welche, wofern α, β, m positive Zahlen sind, sowohl die ξ- wie die η-Axe auf der *positiven* Seite schneidet. Fixirt man einen beliebigen Punkt $(\xi\eta)$ im *Innern* des von jener Geraden und den Axen ξ und η gebildeten Dreiecks, so ist für denselben immer $\alpha\xi + \beta\eta$ kleiner als m, d. h. $x^\xi y^\eta$ wird durch die Substitutionen (4) einer niedrigeren als der m^{ten} Potenz von $\varkappa$ gleich; umgekehrt wird für jeden, *ausserhalb* des Dreiecks in dem von der $+\xi$- und der $+\eta$-Axe gebildeten Winkel gelegenen Punkt $\alpha\xi + \beta\eta$ grösser als m, d. h. $x^\xi y^\eta$ wird einer höheren als m^{ten} Potenz von $\varkappa$ gleich.

Wir denken uns nun sämmtliche, den einzelnen Gliedern $x^\xi y^\eta$ des Ausdrucks $G_n(x, y)$ entsprechende Punkte $\xi\eta$ construirt und fixiren von diesen Punkten (die sämmtlich zwischen (oder auf) der $+\xi$- und der $+\eta$-Axe liegen) zunächst denjenigen, welcher der η-Axe am nächsten (resp. auf derselben) liegt, und, falls deren mehrere existiren, speciell denjenigen, welcher die kleinste Ordinate η hat. Um diesen Punkt P_1 drehen wir eine gerade Linie aus einer durch die *negative* η-Axe bestimmten Anfangslage gegen die Richtung der positiven ξ-Axe hin, bis sie einen der übrigen Punkte (P_2) trifft (oder gleichzeitig mehrere, in welchem Falle unter P_2 der am weitesten von P_1 entfernte zu verstehen ist) und verbinden P_1 mit P_2 durch eine Gerade. Hierauf drehen wir die bewegliche Linie in demselben Sinne so lange um den Punkt P_2, bis sie einen der übrigen Punkte (P_3) trifft (wobei, wenn gleichzeitig mehrere getroffen werden, wiederum unter P_3 der am weitesten von P_2 entfernte verstanden werden soll) und ziehen die Gerade P_2P_3. Dies ist so lange fortzusetzen, bis derjenige der Punkte P erreicht ist, welcher der ξ-Axe am nächsten (resp. auf derselben) liegt und, falls mehrere solche existiren, unter diesen zugleich die kleinste Abscisse ξ hat. Auf diese Weise entsteht eine *aus geradlinigen Stücken bestehende Curve* C, deren convexe Seite gegen den Anfangspunkt des Coordinatensystems gerichtet ist.

Nimmt man nun in den Reihen (3) für α und β irgend welche bestimmte Zahlen an, während die Coefficienten a und b noch unbestimmt bleiben sollen, so rührt die niedrigste Potenz von $\varkappa$ in der Entwickelung der Function $G_n(x, y)$ auf den Curven (3) zunächst nur von den Substitutionen $x = a_\alpha \varkappa^\alpha$, $y = b_\beta \varkappa^\beta$ her. Es können ferner zu dieser niedrigsten Potenz immer nur solche Glieder von $G_n(x, y)$ beitragen, deren entsprechende Punkte P auf der Curve C liegen. Denn ist $P_0 = (\xi_0\eta_0)$ ein beliebiger jener Punkte, der nicht auf C liegt, so bildet, wie wir gesehen haben, die durch P_0 gelegte Gerade

$$\alpha\xi + \beta\eta = \alpha\xi_0 + \beta\eta_0$$

mit der ξ- und der η-Axe ein Dreieck von der Beschaffenheit, dass jedes Glied $x^\xi y^\eta$, dessen Exponenten einem *innern* Punkte des Dreiecks entsprechen, eine niedrigere Potenz von $\varkappa$ liefert, als das dem Punkte P_0 selbst entsprechende Glied; bedenkt man aber, dass die durch P_0 gelegte Gerade (da α wie β positiv ist) sowohl die ξ-Axe als die η-Axe auf der positiven Seite trifft, so überzeugt man sich durch den Augenschein leicht davon, dass von den auf der Curve C gelegenen Punkten P immer mindestens einer ein innerer Punkt des betrachteten Dreiecks ist. — Aber auch von denjenigen Gliedern der Function $G_n(x, y)$ welchen Punkte auf der Curve C entsprechen, können nicht alle *gleichzeitig* Beiträge zu der niedrigsten Potenz von $\varkappa$ liefern; vielmehr betheiligen sich daran, je nach der Wahl der Zahlen α und β, entweder nur ein einziger der vorher mit $P_1, P_2, P_3, \ldots$ bezeichneten Eckpunkte, oder doch höchstens die Gesammtheit aller derjenigen Punkte, welche auf einer und derselben in der Curve C enthaltenen Geraden liegen. Denn verbindet man irgend zwei nicht auf derselben Geraden befindliche Curvenpunkte (P und P') mit einander, so entsteht wiederum ein Dreieck, in dessen Innerem das ganze Stück der Curve C von P bis P' verläuft; und da dieses Curvenstück sicher einen Eckpunkt enthält, d. h. einen Punkt, dem ein Glied der Function G_n entspricht, so hat man für dieses Glied wiederum eine niedrigere Potenz von $\varkappa$, als für die den Punkten P und P' entsprechenden Glieder.

Andrerseits betheiligt sich, wie sogleich gezeigt werden soll, jeder beliebige Eckpunkt von C und jede beliebige in C enthaltene Gerade bei richtiger Wahl der Zahlen α und β auch wirklich an der niedrigsten Potenz von $\varkappa$ in der Entwickelung von $G_n(x, y)$; und zwar kann man nach Belieben bewirken, dass diese niedrigste Potenz nur von einem einzigen (einem Eckpunkte entsprechenden) Gliede herrührt, oder aus mehreren (einer Geraden entsprechenden) Gliedern zusammengesetzt ist.

4. Wir ziehen zunächst einen beliebigen *Eckpunkt* (oder auch einen der beiden Eckpunkte) der Curve C in Betracht und legen durch denselben irgend eine Gerade, welche sowohl die positive ξ-Axe als die positive η-Axe schneidet und zugleich zwischen diesen beiden Schnittpunkten niemals auf die concave Seite der Curve C übertritt. Ist $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$ die Gleichung einer solchen Geraden, wobei offenbar in Anbetracht des Spielraums, den wir derselben gelassen haben, für α und β *ganze positive* Zahlen angenommen werden dürfen, so liefert, wenn wir $x = \varkappa^\alpha$, $y = \varkappa^\beta$ setzen, einzig und allein das jenem Eckpunkte entsprechende Glied von $G_n(x, y)$ die niedrigste Potenz von $\varkappa$; und zwar ist dies die Potenz $\varkappa^{\alpha\xi+\beta\eta}$, wenn ξ und η die Coordinaten des Eckpunktes sind. Denn alle anderen Punkte P liegen wiederum

ausserhalb der von der Linie $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$ und den Axen ξ und η gebildeten Dreiecks. Man sieht nun, dass auf den Curven

$$(5)\quad \begin{cases} x = \varkappa^{\alpha}, & y = \varkappa^{\beta}, \\ x = \varkappa^{\alpha}, & y = -\varkappa^{\beta}, \\ x = -\varkappa^{\alpha}, & y = \varkappa^{\beta}, \\ x = -\varkappa^{\alpha}, & y = -\varkappa^{\beta} \end{cases}$$

und überhaupt auf allen Curven von der Form (3) für die angenommenen Werthe von α und β im Nullpunkte nur dann gleichzeitig ein Minimum oder gleichzeitig ein Maximum der Function $G_n(x, y)$ stattfinden kann, wenn in dem betrachteten Gliede $x^{\xi} y^{\eta}$ dieser Function die Exponenten ξ und η beide gerade sind; und zwar findet alsdann, wenn der Coefficient jenes Gliedes positiv ist, ein Minimum, wenn er negativ ist, ein Maximum statt; ist dagegen mindestens einer der beiden Exponenten ξ und η ungerade, so hat die Function $G_n(x, y)$ an der Stelle (0, 0) weder ein Maximum noch ein Minimum.

Betrachten wir zunächst den letzten Fall eingehender! Offenbar wird bei geeigneter Bestimmung einer positiven Constanten a' die Function $G_n(x, y)$ auf den Curven (5) für genügend kleine Werthe von $\varkappa$ sowohl grösser als $a'\varkappa^{\alpha\xi+\beta\eta}$, als auch kleiner als $-a'\varkappa^{\alpha\xi+\beta\eta}$. Nennen wir nun ε die kleinere der beiden Zahlen α und β, und r, wie früher, den Radiusvector $\sqrt{x^2 + y^2}$, so ist r auf den betrachteten Curven von der Ordnung $\varkappa^{\varepsilon}$ und das Anfangsglied in der Entwickelung der Function $G_n(x, y)$ von der Ordnung $r^{\frac{\alpha\xi+\varkappa\eta}{\varepsilon}}$. Es wird daher (wiederum bei geeigneter Bestimmung einer positiven Constante a'') die Function $G_n(x, y)$ auf den Curven (5) sowohl grösser als $a'' r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$ als auch kleiner als $-a'' r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$. Nun ist klar, dass die Veränderung der Function $G_n(x, y)$ auf den beiden unbekannten Extremcurven mindestens ebenso rasch vor sich gehen muss, d. h. dass auf einer derselben $G_n(x, y)$ sicherlich auch grösser als $a'' r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$, auf der andern kleiner als $-a'' r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$ sein wird. Ist die Grösse $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ höchstens gleich n, so sind damit überhaupt alle hinsichtlich der Function G_n gestellten Fragen erledigt; denn es folgt in diesem Falle, dass das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ deutlich genug ist, um für eine beliebige Function $f(x, y)$, von der sie die Entwickelungsglieder 1ter bis $n$ter Ordnung bildet, massgebend zu sein. Ist dagegen $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ grösser als n, so zeigt die Untersuchung des einzelnen Eckpunktes zwar, dass die Function $G_n(x, y)$ selbst kein Maximum oder Minimum hat, aber

sie entscheidet nicht die Frage, ob die Aenderung auf den Extremcurven genügend stark ist, um für die Function $f(x, y)$ den Ausschlag zu geben. Indessen ist es möglich, dass man durch Ausnutzung des Spielraumes, den die Gerade $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$ und mit ihr die Zahlen α und β haben, auch dann noch die Grösse $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ gleich n oder kleiner als n machen kann, wenn dieses bei der zufällig getroffenen Wahl von α und β nicht der Fall war. Offenbar entspricht (für eine wirkliche Ecke) der *grösste* und der *kleinste* Werth jenes Quotienten $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ den beiden zur Curve C gehörigen Geraden, die in der betrachteten Ecke zusammenstossen. Da wir aber diese Geraden nachher noch besonders untersuchen werden, ist die Erörterung der entsprechenden Werthe von $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ an *dieser* Stelle unnöthig; wie wir denn überhaupt den Quotienten $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ hier nur zum Zwecke einer vorläufigen Orientirung über die verschiedenen Möglichkeiten erwähnt haben.

Im anderen Falle, wenn beide Exponenten ξ und η in dem betrachteten Gliede von $G_n(x, y)$ gerade sind, erkennt man aus der Untersuchung der einzelnen Ecke noch weniger als in dem eben besprochenen Falle. Man sieht nämlich alsdann nur erstens, dass auf den jenem einen Eckpunkte von C entsprechenden Curven (5) gleichzeitig ein Minimum, resp. Maximum von $G_n(x, y)$ im Nullpunkte stattfindet, und eventuell, wenn $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ höchstens gleich n ist, noch zweitens, dass das Verhalten auf *einer* der beiden Extremcurven allerdings die genügende Deutlichkeit besitzt. Dagegen bleibt das Verhalten auf der anderen Extremcurve durchaus ungewiss, man kann nicht einmal über das Vorzeichen auf derselben irgend einen Schluss ziehen, geschweige denn auf den Grad der Deutlichkeit. In diesem Falle muss man also die Discussion schon weiter führen, wenn man überhaupt nur die Antwort auf die erste der beiden Hauptfragen, nämlich die Frage nach dem Maximum oder Minimum von $G_n(x, y)$ erhalten will.

Es sind dann zunächst der Reihe nach alle Eckpunkte der Curve C einzeln zu untersuchen, und, falls sich unter ihnen keiner findet, von dessen Coordinaten ξ, η wenigstens eine ungerade ist, und für den zugleich

$$\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon} \leqq n$$

werden kann, die Ergebnisse dieser Einzeluntersuchungen mit einander zu vergleichen. Sind die Coordinaten irgend einer Ecke nicht beide gerade (ohne dass sich jedoch die obige Ungleichung erfüllen liesse), oder aber kommen unter den Gliedern von $G_n(x, y)$, welche

Eckpunkten entsprechen, wenigstens zwei $c\,x^\xi y^\eta$ und $c'x^{\xi'}y^{\eta'}$ vor, in denen alle Exponenten gerade Zahlen und die Coefficienten c und c' von entgegengesetztem Zeichen sind, so zeigt dies wenigstens, dass $G_n(x, y)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum im Nullpunkte besitzt. Sind dagegen in allen denjenigen Gliedern $cx^\xi y^\eta$ von $G_n(x, y)$, welche Ecken der Curve C angehören, beide Exponenten ξ und η gerade und zugleich die Coefficienten c sämmtlich von demselben Vorzeichen, so bleibt auch schon unsere erste Hauptfrage vorläufig noch unentschieden.

5. Unter Umständen können aber dann die *Endpunkte* der Curve C dieselbe entscheiden. Auch für sie werden die angedeuteten Untersuchungen auszuführen sein, und zwar in derselben Weise, wie für die eigentlichen Eckpunkte. Es tritt diesen gegenüber nur der eine Unterschied ein, dass in jedem Endpunkte bloss eine einzige Gerade der Curve C ausmündet und man daher in dem Werthe, welchen die Ordnungszahl $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ für diese Gerade annimmt, nur entweder den grössten oder den kleinsten von den, im Eckpunkte ihr gestatteten Werthen erhält. Offenbar wird man aber den andern Extremwerth jener Zahl für den einen Endpunkt (den Ausgangspunkt unserer Construction) dadurch erhalten, dass man (in dem entsprechenden Gliede von $G_n(x, y)$) $x = 0$, für den zweiten dadurch, dass man $y = 0$ setzt. Verschwindet dieses Glied hierbei nicht, so giebt seine Ordnung unmittelbar jenen anderen Extremwerth an. Liegt dagegen der erste Endpunkt nicht auf der y-Axe oder der zweite nicht auf der x-Axe, so enthält $G_n(x, y)$ den Factor x oder y und wird also durch jene Substitution identisch Null, sodass in diesem Falle etwa von einer unendlichhohen Ordnungszahl $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ gesprochen werden und von einem Maximum oder Minimum der Function $G_n(x, y)$ keinenfalls die Rede sein kann. Indem wir übrigens in dieser Weise bei der Discussion der beiden Eckpunkte von C gleich die Curven $x = 0$ und $y = 0$ in Betracht ziehen, werden wir in die Lage gesetzt, später die beiden Coefficienten a_α und b_β in den Reihen (3) immer von Null verschieden anzunehmen.

6. Hat auch die Untersuchung der beiden Eckpunkte noch keine vollständige Entscheidung der gestellten Fragen gegeben, so sind nun diejenigen Werthe von α und β in Betracht zu ziehen, für welche gleichzeitig mehrere Glieder von $G_n(x, y)$, deren entsprechende Punkte *auf einer und derselben in der Curve C enthaltenen Geraden liegen,* Beiträge zu der niedrigsten Potenz von $\varkappa$ liefern. Wie sind die Zahlen α und β einer bestimmten jener Geraden entsprechend zu wählen? Offenbar muss, wenn $\xi\eta$ und $\xi'\eta'$ zwei Punkte der Geraden sind,

$$\alpha\xi + \beta\eta = \alpha\xi' + \beta\eta', \quad \text{d. h.} \quad \alpha : \beta = \eta - \eta' : \xi' - \xi$$

werden; und durch diese Proportion ist α und β vollständig definirt, wenn man noch festsetzt, dass diese beiden ganzen positiven Zahlen frei von gemeinschaftlichen Divisoren sein sollen. Wir bestimmen jetzt der Reihe nach die Zahlen α, β für alle in der Curve C enthaltenen Geraden. Bilden wir dann jedesmal die Ausdrücke

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a_\alpha \varkappa^\alpha, \\ y = b_\beta \varkappa^\beta + b_{\beta+1} \varkappa^{\beta+1} + \cdots \end{cases}$$

und lassen die Coefficienten a_α, b_β, ... zunächst unbestimmt, so rührt (nach Nr. 3) in der Entwickelung der Function $G_n(x, y)$ die niedrigste Potenz von $\varkappa$ immer nur von denjenigen Gliedern dieser Function her, welche Punkten der in Betracht gezogenen Geraden entsprechen; und zwar treten darin, wie bereits früher bemerkt wurde, von den in (3) vorkommenden Coefficienten nur die ersten, nämlich a_α und b_β auf. Es ist nun jedesmal zu untersuchen, wie jene niedrigste Potenz sich für ganz beliebige Werthe der Grössen a_α und b_β, von denen jedoch keine gleich Null sein darf, verhält: ob sie beständig positiv oder beständig negativ oder beider Zeichen fähig ist, oder ob sie endlich zwar verschwinden, aber nicht das Vorzeichen wechseln kann. Tritt einer der drei ersten Fälle ein, so ist die Untersuchung für die betreffende Gerade abgeschlossen; auf allen Curven (3), die der betrachteten Geraden α, β entsprechen, beginnt dann die Entwickelung der Function $G_n(x, y)$ sicher mit der Potenz $\varkappa^{\alpha\xi+\beta\eta}$ und die Function selbst wird also, wenn wieder ε die kleinere der beiden Zahlen α und β bezeichnet, auf jeder dieser Curven in der Nähe des Nullpunktes von der Ordnung $r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$. Im letzten Falle hingegen wird, falls nicht die für eine andere Gerade angestellte Untersuchung bereits definitive Ergebnisse hinsichtlich des Verhaltens der Function G_n zu Tage gefördert hat, die Hinzufügung der höheren Coefficienten $b_{\beta+1}, \ldots$ nothwendig.

Wir wollen zunächst den Fall in Betracht ziehen, dass man für alle den verschiedenen Geraden von C entsprechenden Exponenten α, β, auch ohne Berücksichtigung der höheren Coefficienten $b_{\beta+1}, \ldots$ abgeschlossene Resultate erhalten hat, also nirgends dem letzten Falle begegnet ist. Dann ist die Untersuchung überhaupt beendet. Denn sie ist bei der Betrachtung der Ecken und der Geraden von C für alle in der Form (3) darstellbaren Curven durchgeführt worden, die nicht mit der x- oder y-Axe zusammenfallen, und bei der Discussion der beiden Endpunkte von C auch für die Curven $x = 0$ und $y = 0$ selbst, und unter allen diesen Curven müssen sich auch die beiden Extremcurven befinden, welche für das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ entscheidend sind. Es ergiebt sich nun entweder, dass alle jene Curven

bei der Entwickelung von $G_n(x, y)$ ein positives Anfangsglied, oder dass alle ein negatives Anfangsglied, oder dass einige ein positives, andere ein negatives Anfangsglied liefern. Im ersten Falle hat $G_n(x, y)$ im Nullpunkte ein Minimum, im zweiten ein Maximum, im dritten endlich weder Minimum noch Maximum. In allen drei Fällen aber ist das Verhalten von $G_n(x, y)$ auf jeder der beiden Extremcurven durch eine Potenz von r gegeben, deren Exponent einer der im Laufe der Untersuchung vorgekommenen Ordnungszahlen $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ ist. Findet ein Maximum oder Minimum statt, so gelten für die beiden Extremcurven offenbar der *grösste* und der *kleinste* aller im Laufe der Untersuchung vorgekommenen Werthe von $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$; tritt weder Maximum, noch Minimum ein, so gilt für die eine Extremcurve der *kleinste* vorgekommene Werth von $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$, welcher einem *positiven* Anfangsgliede entspricht: für die andere der *kleinste* Werth derselben Zahl, welcher ein *negatives* Anfangsglied geliefert hat. In allen Fällen sind die Werthe von $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ für die beiden Extremcurven jetzt mit Sicherheit festgestellt und damit die Deutlichkeit des Verhaltens von $G_n(x, y)$ erkannt; dasselbe ist für eine beliebige Function $f(x, y)$, deren Entwickelungsglieder erster bis n^{ter} Ordnung G_n bildet, massgebend oder nicht, jenachdem beide Werthe jener Ordnungszahl höchstens gleich n sind oder nicht.

Es bleibt aber noch übrig zu zeigen, wie man für eine bestimmte Gerade der Curve C entscheidet, welcher von unsern vier Fällen eintritt. Zur Beantwortung dieser Frage reichen die für die Untersuchung *homogener* Ausdrücke angegebenen Hülfsmittel aus. Der Coefficient des Anfangsgliedes in der Entwickelung des Werthes, welchen $G_n(x, y)$ durch die einer bestimmten Geraden α, β von C zugehörigen Substitutionen (3) erhält, ist nämlich aus den Coefficienten derjenigen Glieder der Function $G_n(x, y)$, welche Punkten der betrachteten Geraden entsprechen, und aus den beiden unbestimmten Grössen a_α und b_β zusammengesetzt und es handelt sich darum, ihn hinsichtlich seines Vorzeichens für beliebige Werthe der letzten beiden Grössen zu prüfen. Setzen wir aber, was die Willkürlichkeit derselben nicht beschränkt,

$$a_\alpha = \pm a^\alpha, \quad b_\beta = \pm b^\beta,$$

d. h. also: geben wir den Substitutionen (3) die Form

$$x = \pm a^\alpha x^\alpha, \quad x = \pm b^\beta x^\beta + b_{\beta+1} x^{\alpha+1} + \cdots,$$

so wird offenbar der zu untersuchende Coefficient homogen in a und b, und seine Discussion damit zurückgeführt auf die Discussion von *vier homogenen* Functionen der Grössen a und b (entsprechend den vier Vorzeichencombinationen), welche sich auf zwei, resp. auf eine reduciren, wenn alle Glieder von $G_n(x, y)$, deren Punkte der betrachteten

Geraden entsprechen, in Bezug auf x oder in Bezug auf y, resp. in Bezug auf beide Variabeln von gerader Ordnung sind. Erweisen sich diese homogenen Functionen sämmtlich als *definit* oder als *indefinit*, so tritt für die betrachtete Gerade einer der ersten drei Fälle ein; ist aber irgend eine derselben semidefinit, so erhalten wir den vierten Fall.

7. Bevor wir zur Untersuchung dieses vierten Falles übergehen, wollen wir noch zeigen, dass die Untersuchung der *einzelnen Ecken*, mit welcher wir die Discussion begonnen haben, durch die jetzt angegebene Erörterung der verschiedenen in C enthaltenen Geraden *ganz und gar überflüssig wird.* Zu dem Zwecke fassen wir eine der *beiden* Geraden von C ins Auge, welche in einer beliebigen Ecke P zusammenstossen, und zwar, um die Vorstellung zu fixiren, diejenige, welche von P aus gegen die ξ-Axe gerichtet ist. Sind α und β die derselben entsprechenden Exponenten, so ist $x = \underset{-}{+} a^\alpha \varkappa^\alpha$ $y = \underset{-}{+} b^\beta \varkappa^\beta$ zu setzen, und derjenige homogene Ausdruck der Grössen a und b zu untersuchen, welcher den ersten Entwickelungscoefficienten von $G_n(x,y)$ bildet. Nun enthält in diesem Ausdrucke das dem Punkte P entsprechende Glied zugleich die höchste Potenz von b und die niedrigste von a; man wird also dadurch, dass man a sehr klein gegen b macht, immer erreichen können, dass der ganze Ausdruck das Vorzeichen jenes Gliedes annimmt. Dasselbe kann bei der anderen in dem Eckpunkte P mündenden Geraden dadurch bewirkt werden, dass man umgekehrt b klein gegen a macht. Was aber die vorher mit $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ bezeichnete Ordnung betrifft, welche das zur Ecke P gehörige Glied von $G_n(x, y)$ im Vergleiche zu r besitzt, so sind, wie schon in Nr. 4 erwähnt wurde, der grösste und der kleinste aller Werthe, die jene Ordnungszahl $\frac{\alpha\beta + \xi\eta}{\varepsilon}$ in dem Eckpunkte überhaupt annehmen kann, eben diejenigen, welche den beiden in P zusammenstossenden Geraden der Curve C entsprechen. In derselben Weise wird durch die Discussion der *einen* Geraden von C, die in einem *Endpunkte* mündet, sowohl das Vorzeichen des ihm entsprechenden Gliedes von $G_n(x, y)$ als auch (Nr. 5) der grösste oder der kleinste von allen den Werthen erkannt, deren $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ in dem Endpunkte fähig ist. Man braucht also in der That schliesslich *nur die Geraden der Curve C, sowie* (für $x = 0$, resp. $y = 0$) *die beiden Glieder von $G_n(x, y)$ zu untersuchen, welche dem ersten und dem letzten Punkte dieser Curve entsprechen.*

8. Wir kommen jetzt schliesslich zu dem Falle, wo die Untersuchung der verschiedenen in der Curve C enthaltenen Geraden und der Endpunkte von C noch nicht zu abgeschlossenen Resultaten geführt hat, indem für eine oder mehrere jener Geraden die niedrigste Potenz

in der Entwickelung von $G_n(x, y)$ ohne eines Zeichenwechsels fähig zu sein, doch durch geeignete Bestimmung der beiden Grössen a_α und b_β, oder, wenn man nach Nr. 7, $a_\alpha = \pm a^\alpha$, $b_\beta = \pm b^\beta$ setzt, bei passender Wahl der Vorzeichen und des Verhältnisses $a : b$, zum Verschwinden gebracht werden kann. In diesem Falle wird möglicher Weise die eine von beiden Extremcurven, oder unter Umständen beide, in der Schaar derjenigen Curven (3) zu suchen sein, für welche jener erste Entwickelungscoefficient verschwindet. Existiren mehrere Geraden α, β von C oder auch zu einer und derselben Geraden mehrere Werthe von $a : b$, resp. mehrere Zeichencombinationen, welche dieses Verschwinden bewirken, so wird die Untersuchung für jede einzelne solche Werth- und Zeichenzusammenstellung weiter zu führen sein. Man bilde alsdann für jeden einzelnen Fall mit den betreffenden bestimmten Werthen von α, β und $a : b$ und mit den bezüglichen Vorzeichen die Substitutionen:

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \pm a^\alpha \varkappa^\alpha, \\ y = \pm \varkappa^\beta (b^\beta + \varkappa') \end{cases}$$

und verwandle dadurch die Function $G_n(x, y)$ in eine Function $G'(\varkappa, \varkappa')$ von $\varkappa$ und $\varkappa'$. Dann untersuche man die Function $G'(\varkappa, \varkappa')$ der beiden Argumente $\varkappa$ und $\varkappa'$ genau in derselben Weise, wie vorher die Function $G_n(x, y)$ der beiden Argumente x und y. Man construire also wieder in einem rechtwinkligen Axensystem $\xi' \eta'$ diejenigen Punkte, deren Coordinaten den Exponenten ξ' und η' von $\varkappa$ und $\varkappa'$ in den verschiedenen Gliedern des Ausdrucks $G'(\varkappa, \varkappa')$ gleich sind, und zeichne die zugehörige Curve C'. Dann untersuche man auf die frühere Weise die verschiedenen Geraden, welche diese Curve bilden, sowie denjenigen (End-) Punkt von C', welcher auf der ξ'-Axe oder ihr zunächst liegt. Der andere Endpunkt (der Anfangspunkt) der Curve C' kommt nämlich hier nicht mehr in Betracht, weil der Fall $\varkappa = 0$ nach (6) $x = 0$, $y = 0$ nach sich ziehen würde und daher auszuschliessen ist, während der Fall $\varkappa' = 0$ nicht übergangen werden darf. Man erhält so, den verschiedenen Graden von C' entsprechend, eine Reihe von Substitutionen

$$\varkappa = \pm a'^{\alpha'} \varkappa''^{\alpha'}, \quad \varkappa' = \pm b'^{\beta'} \varkappa''^{\beta'},$$

welche, in $G'(\varkappa, \varkappa')$ eingeführt, bei unbestimmten Werthen von $a' b'$, jedesmal ein Anfangsglied

$$A'' \varkappa''^{\alpha' \xi' + \beta' \eta'}$$

der Entwickelung dieser Function liefern. Dieses Anfangsglied ist in Bezug auf $\varkappa$ von der Ordnung:

$$\varkappa^{\frac{\alpha' \xi' + \beta' \eta'}{\alpha'}}$$

und in Bezug auf r also von der Ordnung:

$$r^{\frac{\alpha'\xi'+\beta'\eta'}{\alpha'\varepsilon}},$$

wenn ε, wie vorher, die kleinere der beiden Zahlen α und β bedeutet. Es kommt dann zur Entscheidung des Maximums oder Minimums von $G_n(x, y)$ wieder auf den Coefficienten jenes Anfangsgliedes, zur Entscheidung des Deutlichkeitsgrades auf den Quotienten $\frac{\alpha'\xi'+\beta'\eta'}{\alpha'\varepsilon}$ an. Ausserdem ist noch das Verhalten der Function $G'(\varkappa, \varkappa')$ für $\varkappa' = 0$ zu untersuchen, welches sich durch das dem letzten Punkte von C' entsprechende Glied der Function offenbart.

Treten auch hier wieder unbestimmte Resultate auf, so ist das Verfahren in derselben Weise fortzusetzen. Den in Nr. 2 angestellten Ueberlegungen zu Folge muss die Untersuchung nach einer endlichen Anzahl von Operationen schliesslich von selbst ihren Abschluss finden, falls nicht $G_n(x, y)$ einen quadratischen Factor enthält, durch dessen Nullsetzen eine den Nullpunkt enthaltende reelle Doppelcurve definirt wird. Es lassen sich also — wenn man diesen Fall ausschliesst — die beiden Fragen nach dem Eintreten oder Nichteintreten eines Maximums oder Minimums und nach dem Grade der Deutlichkeit, welchen das Verhalten der Function $G_n(x\ y)$ zeigt, auf dem angegebenen Wege jedesmal mit Sicherheit entscheiden.

§ 8.

Beispiele.

$$1., \quad G_4(x, y) = y^2 - (p^2+q^2)x^2y + p^2q^2x^4$$

(Beispiel von Peano). Die den einzelnen Gliedern von $G_4(x, y)$ entsprechenden Punkte der $\xi\eta$-Ebene sind (02), (21), (40); die Curve C verbindet dieselben in der Reihenfolge, in welcher sie eben genannt wurden, und zwar ist C hier eine einzige Gerade. Es sind zunächst die den Endpunkten entsprechenden Glieder y^2 und $p^2q^2x^4$ einzeln zu untersuchen, und zwar das erste für $x = 0$, das letzte für $y = 0$; es zeigt sich, dass beide positiv und resp. von der Ordnung r^2 und r^4 sind. Es bleibt nun noch übrig, die Gerade C selbst zu untersuchen. Die Gleichung derselben ist $\xi + 2\eta = 4$; ihr entspricht die Proportion $\alpha : \beta = 1 : 2$ und es ist daher

$$x = a\varkappa, \qquad y = \pm\, b^2\varkappa^2$$

zu setzen, wodurch $G_4(x, y)$ in:

$$\left(b^4 \pm (p^2+q^2)a^2b^2 + p^2q^2a^4\right)\varkappa^4$$

übergeht. Zur Untersuchung des homogenen Ausdrucks

$$b^4 \pm (p^2+q^2)a^2b^2 + p^2q^2a^4$$

löst man denselben am Einfachsten in seine Factoren auf. Dies giebt zunächst $(b^2 \pm p^2a^2)(b^2 \pm q^2a^2)$; und für das untere Vorzeichen weiterhin

$$(b+pa)(b-pa)(b+qa)(b-qa).$$

Es sind also, wenn das untere Vorzeichen gewählt wird, reelle einfache Linearfactoren vorhanden, die Form ist daher indefinit und es findet kein Maximum oder Minimum der Function $G_4(x, y)$ statt.

Da auch die der Geraden C entsprechende Potenz $\varkappa^4$ von der Ordnung r^4 ist $\left(\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon} = \frac{4}{1}\right)$, so verhält sich zugleich die Function $G_4(x, y)$ genügend deutlich, um massgebend für jede beliebige Function $f(x, y)$ zu sein, deren Entwickelungsglieder 1^{ter} bis 4^{ter} Ordnung sie bildet, d. h. jede Function, welche aus $G_4(x, y)$ durch Vermehrung um Glieder von 5^{ter} und höherer Dimension entsteht, theilt mit $G_4(x, y)$ die Eigenschaft, im Nullpunkte weder ein Maximum noch ein Minimum, zu haben. —

$$2., \quad G_3(x, y) = y^2 + x^2y.$$

Die den beiden Gliedern der Function entsprechenden Punkte $\xi\eta$ sind (02) und (21): die Curve C besteht aus der sie verbindenden Geraden. Für den ersten Endpunkt ist $x = 0$, für den andern $y = 0$ zu setzen. dies giebt für $G_3(x, y)$ resp. die Werthe y^2 und 0, und man sieht schon, dass ein Maximum oder Minimum jedenfalls nicht stattfinden kann. Um den Grad der Deutlichkeit zu erkennen, welchen das Verhalten der Function aufweist, ist noch die Linie C in Betracht zu ziehen. Dieselbe hat die nämliche Gleichung $\xi + 2\eta = 4$, wie im ersten Beispiel; man muss also wieder $x = a\varkappa$, $y = \pm b^2\varkappa^2$ setzen, wodurch $G_3(x, y)$ in $(b^4 \pm a^2b^2)\varkappa^4$ übergeht. Die dem unteren Vorzeichen entsprechende Form $b^4 - a^2b^2$ oder $b^2(b^2-a^2)$ ist offenbar indefinit, $G_3(x, y)$ kann daher sowohl positiv als negativ werden. Indessen ist $\varkappa^4$ von der Ordnung $r^4\left(\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon} = \frac{4}{1}\right)$, also von höherer Ordnung als r^3. Es hat daher die Function $G_3(x, y)$ auf allen denjenigen Curven, wo sie negativ wird, eine höhere Grössenordnung als r^3, woraus folgt, dass das Verhalten jener Function für eine beliebige Function $f(x, y)$, deren Glieder 1^{ter} bis 3^{ter} Dimension sie bildet, *nicht* massgebend ist. In der That hat z. B. die Function

$$f(x, y) = y^2 + x^2y + x^4$$

im Nullpunkte ein richtiges Minimum (siehe das folgende Beispiel).

$$3., \quad G_4(x, y) = y^2 + x^2y + x^4.$$

Dass diese Function ein Minimum hat, erkennt man leicht, wenn man sie in der Form $\left(y + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^4$ schreibt. Aber ist das Minimum

deutlich genug, um massgebend für eine beliebige Function $f(x, y)$ zu sein, die in den Gliedern 1^{ter} bis 4^{ter} Ordnung mit jener Function übereinstimmt?

Um hierüber zu entscheiden, müssen wir unsere allgemeine Methode in Anwendung bringen. Die Punkte $\xi\eta$ und die Curve C sind dieselben, wie im Beispiel (1). Die Endpunkte geben für $G_4(x, y)$ die positiven Werthe y^2 und x^4, deren Ordnung resp. r^2 und r^4, also jedenfalls nicht höher als r^4 ist. Für die Gerade C ist wieder $x = a\varkappa$, $y = \pm b^2\varkappa^2$ zu setzen, wodurch

$$G_4(x, y) = (b^4 \pm a^2b^2 + a^4)\varkappa^4$$

wird. Die Formen $b^4 + a^2b^2 + a^4$ und $b^4 - a^2b^2 + a^4$ sind beide definit und positiv, was man am leichtesten durch die Transformation

$$b^4 \pm a^2b^2 + a^4 = \left(b^2 \pm \frac{1}{2}a^2\right)^2 + \frac{3}{4}a^4$$

erkennt. Es findet also ein Minimum statt, und da auf keiner Curve die Ordnung von $G_4(x, y)$ höher als r^4 ist, so haben auch alle Functionen $f(x, y)$, deren Glieder 1^{ter} bis 4^{ter} Dimension gleich $G_4(x, y)$ sind, im Nullpunkte ein Minimum.

$$4., \quad G_4(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 + y^4.$$

Schreibt man $G_n(x, y) = (y - x^2)^2 + y^4$, so sieht man unmittelbar, dass ein Minimum stattfindet, es ist indessen nicht erkennbar, ob dasselbe einen genügenden Grad der Deutlichkeit besitzt, um für beliebige Functionen $f(x, y)$, deren Glieder 1^{ter} bis 4^{ter} Dimension mit $G_4(x, y)$ übereinstimmen, massgebend zu sein. Wir führen daher die Untersuchung nach unserer allgemeinen Methode durch.

Die Punkte $\xi\eta$ sind hier (02), (21), (40), (04). Die Curve C besteht hier wieder aus der einen Geraden, welche die drei Punkte (02, (21), (40) verbindet und die Gleichung $\xi + 2\eta = 4$ hat. Der Punkt (04) kommt, da er nicht auf C liegt, zunächst gar nicht in Betracht. Für die beiden Endpunkte von C wird, wie vorher, $G_4(x, y)$ resp. gleich y^2 oder gleich x^4, also positiv und höchstens von der Ordnung r^4. Setzt man, der Geraden C entsprechend, $x + a\varkappa$, $y = \pm b^2\varkappa^2$, so enthält das Anfangsglied der Entwickelung von $G_4(x, y)$ nach Potenzen von $\varkappa$ die Gestalt

$$(b^4 \mp 2a^2b^2 + a^4)\varkappa^4.$$

Der Coefficient von $\varkappa^4$ ist hier für das untere Zeichen definit und positiv, für das obere hingegen semidefinit, indem er zwar (für $a^2 = b^2$) verschwinden, aber nicht negativ werden kann. Es lässt sich also vorläufig nur behaupten, dass die Function $G_4(x, y)$ positiv und höchstens von der Ordnung r^4 auf allen denjenigen Curven ist, welchen bei der Darstellung durch einen Parameter $\varkappa$ nicht die Anfangsglieder

$\pm a\varkappa$ für x und $a^2\varkappa^2$ für y (resp. $\pm a\varkappa^m$ für x und $a^2\varkappa^{2m}$ für y, da nur das Verhältniss der Exponenten α und β bestimmt ist) zukommen. Für diese speciellen Curven muss die Untersuchung weiter geführt werden.

Wir setzen, entsprechend unsern allgemeinen Vorschriften,

$$x = \varkappa, \qquad y = \varkappa^2(1 + \varkappa'),$$

indem wir $\varkappa$ statt $a\varkappa$ schreiben, wodurch offenbar die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird. Dann geht $G_4(x, y)$ über in:

$$G'(\varkappa, \varkappa') = \varkappa^4\varkappa'^2 + \varkappa^8(1 + \varkappa')^5.$$

Der Ausdruck $G'(\varkappa, \varkappa')$ könnte nun auf demselben Wege, wie vorher der Ausdruck $G_4(x, y)$ geprüft werden. Man übersieht indessen direct, dass derselbe immer positiv ist, da ja der Fall $x = 0$ hier ausgeschlossen werden muss.

Die Function $G_4(x, y)$ hat also auf allen Curven der letzen Art, ebenso wie auf allen früheren und somit sicher auch auf den beiden massgebenden Extremcurven ein Minimum im Nullpunkte, woraus folgt, dass ein Minimum überhaupt stattfindet. Indessen ist die Grössenordnung der Functionswerthe auf einer der beiden Extremcurven durch eine sehr hohe Potenz von r (die 8^{te}) gegeben; denn die Entwickelung von $G'(\varkappa\varkappa')$ fängt, sobald $\varkappa'$ der zweiten oder einer höheren Potenz von $\varkappa$ proportional gesetzt wird, mit $\varkappa^8$ an, und $\varkappa$ hat selbst die Ordnung des Radius r. Das Verhalten der Function $G_4(x, y)$ ist daher, obschon dieselbe selbst ein deutliches Minimum zeigt, für eine beliebige Function $f(x, y)$, deren Glieder 1^{ter} bis 4^{ter} Dimension sie bildet, nicht massgebend. In der That hat z. B. die Function

$$f(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 + y^4 - x^6$$

kein Minimum. Denn nähert man sich dem Nullpunkte auf der Curve $y - x^2 = 0$, auf welcher $f(x, y) = x^6(x^2 - 1)$ ist, so tritt im Nullpunkte sogar ein Maximum ein.

5., Wir geben noch ein Beispiel, bei welchem die Curve C nicht, wie in den vorhergehenden Fällen, aus einer einzigen Geraden, sondern aus mehreren geradlinigen Stücken besteht. Es sei

$$G_{12}(x,y) = x^2y^4 - 3x^4y^3 + x^6y^2 - 3xy^7 + y^8 - 10x^{10}y + 5x^{12}.$$

Von den 7 Punkten, welche man, entsprechend den 7 Gliedern des vorstehenden Ausdruckes, in der $\xi\eta$-Ebene zu construiren hat, fallen 5 auf die Curve C, nämlich der Reihe nach die Punkte (0, 8), (2, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 0), die beiden übrigen Punkte (1, 7) und (10, 1) kommen überhaupt nicht in Betracht. Den Endpunkten von C entsprechen die Ausdrücke y^8 und x^{12}, welche positiv und resp. von der Grössenordnung r^8 und r^{12} sind. Die drei in C enthaltenen Geraden haben resp. die Gleichungen

$$2\xi + \eta = 8,$$
$$\xi + 2\eta = 10,$$
$$\xi + 3\eta = 12.$$

Für die erste derselben ist also $x = a^2\varkappa^2$, $y = b\varkappa$,

für die zweite $x = a\varkappa$, $y = \pm b^2\varkappa^2$,

für die dritte $x = a\varkappa$, $y = b^3\varkappa^3$

zu setzen. Dies giebt für $G_{12}(x, y)$ die drei Anfangsglieder:

$$(b^8 + a^4b^4)\varkappa^8 = b^4(b^4 + a^4)\varkappa^8,$$
$$(a^2b^8 \mp 3a^4b^6 + a^6b^4)\varkappa^{10} = a^2b^4((a^2 \mp b^2)^2 \mp a^2b^2)\varkappa^{10}.$$
$$(a^6b^6 + 5a^{12})\varkappa^{12} = a^6(b^6 + 5a^6)\varkappa^{12}.$$

Dieselben sind resp. von den Grössenordnungen r^8, r^{10}, r^{12}; das erste und dritte ist ferner durchaus positiv, das zweite hingegen wird bei der Wahl des oberen Vorzeichens auch negativ (z. B. für $b^2 = a^2$). Es kann daher weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinden, und zwar wird $G_{12}(x, y)$ auf einer der beiden unbekannten Extremcurven sicher das der ersten Geraden von C entsprechende Verhalten zeigen, nämlich in der Nähe des Nullpunktes positiv und proportional r^8 sein, auf der anderen Extremcurve hingegen entsprechend der zweiten jener Geraden, schliesslich negativ und proportional r^{10} werden. Das Verhalten der Function ist also genügend deutlich, um den Schluss zu motiviren, dass *jede beliebige* Function $f(x, y)$, deren Glieder erster bis 12^{ter} Dimension $G_n(x, y)$ übereinstimmen, ebenfalls weder ein Maximum noch ein Minimum im Nullpunkte haben kann. —

Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen.

(Vierte Abhandlung).

Von

Martin Krause in Dresden.

In einigen Arbeiten gleichen Titels*) ist gezeigt worden, dass das Problem, die doppelt periodischen Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen zu entwickeln, darauf reducirt werden kann, die Functionen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(mv + ma, m\tau)}{\vartheta_\beta(v, \tau)} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_\alpha(v-a)}{\vartheta_\beta(v-b) \cdot \vartheta_\gamma(mv, m\tau)}$$

durch Reihen der genannten Art darzustellen. Für die erste Kategorie ist dieses Problem auf mehrfache Weise gelöst worden. Der Zweck der folgenden Betrachtungen ist es, die analogen Untersuchungen für die zweite Kategorie von Functionen anzustellen. Zuerst soll eine indirecte Methode angegeben werden, mit deren Hülfe die Functionen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v-a)}{\vartheta_\beta(v-b) \cdot \vartheta_\gamma(mv, m\tau)}$$

in trigonometrische Reihen entwickelt werden können. Diese Methode beruht auf der Theorie der Restfunctionen, die von Herrn Appell zuerst aufgestellt worden ist, und die sich hier von ganz besonderer Einfachheit zeigt. Die andern Methoden sind directe und führen auf systematischem Wege zu den Appell'schen Restfunctionen.

§ 1.

Indirecte Methode, die Functionen $\vartheta_\alpha(v-a) : \vartheta_\beta(v-b) . \vartheta_\gamma(mv, m\tau)$ in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Da a und b völlig willkürliche Grössen sind, so können auch die Indices α und β beliebig gewählt werden. Wir wollen sie gleich Null setzen. γ kann die Werthe 0, 1, 2, 3 annehmen. Die Betrachtungen

*) Vergl. diese Annalen Bd. 30, 32, 33.

bleiben in jedem der Fälle ganz analog. Wir wählen $\gamma = 0$, betrachten also die Function:

$$(1) \qquad f(v) = \frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v-b)\cdot\vartheta_0(mv, m\tau)}.$$

Hierbei wollen wir b der Beschränkung unterwerfen, dass es von $\frac{k}{m}$ verschieden sein muss (k eine ganze Zahl). Die Function $f(v)$ genügt nun den Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(v+1) &= f(v), \\ f(v+\tau) &= -\,e^{-2\pi i(b-a)+\pi i m(2v+\tau)}\cdot f(v), \end{aligned}$$

wird überdies unendlich gross an denjenigen Stellen, an denen entweder:

$$\vartheta_0(v-b) = 0$$

oder

$$\vartheta_0(mv, m\tau) = 0$$

wird und zwar überall von der ersten Ordnung.

Es soll nun versucht werden, Functionen herzustellen, die denselben beiden Bedingungsgleichungen Genüge leisten und überdies an den definirten Stellen von derselben Art unendlich gross werden, wie die vorgelegten Functionen. Dieselben setzen sich aus gewissen Restfunctionen linear zusammen, die zuerst von Herrn Appell in die Analysis eingeführt worden sind.

Wir definiren dazu erstens:

$$(3) \qquad \varphi(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n\cdot\frac{e^{2\pi i bmn}\cdot q^{mn(n+1)}\cdot e^{2\pi i v}\cdot e^{2\pi i n(a-b)}}{e^{2\pi i b}q^{2n+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Als Function von v betrachtet, hat dann $\varphi(v)$ die Unendlichkeitspunkte — von ganzen Zahlen abgesehen:

$$v = b + \frac{(2n+1)\tau}{2}.$$

Ferner ist:

$$\varphi(v+1) = \varphi(v)$$

$$\varphi(v+\tau) =$$

$$= -\,e^{2\pi i(a-b)}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \frac{e^{2\pi i bmn}\cdot q^{m(n^2+n+1)}\cdot e^{2\pi i v}\cdot e^{2\pi i n(a-b)}\cdot e^{2\pi i bm}\cdot q^{m(2n+1)}}{e^{2\pi i b}\cdot q^{2n+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Um diesen Ausdruck in eine übersichtlichere Form zu bringen, bilden wir

$$e^{2\pi i(a-b)+\pi i m(2v+\tau)}\varphi(v) =$$

$$= e^{2\pi i(a-b)}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \frac{e^{2\pi i bmn}\cdot q^{m(n^2+n+1)}\cdot e^{2\pi i v}\cdot e^{2\pi i n(a-b)}\cdot e^{2\pi i m v}}{e^{2\pi i b}\cdot q^{2n+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Addiren wir die beiden Ausdrücke, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen:

$$\varphi(v+\tau) + e^{2\pi i(a-b)+\pi i m(2v+\tau)} \cdot \varphi(v) = \tag{4}$$

$$= -i \cdot q^{\frac{3}{4}m} \cdot e^{\pi i(a-b)+\pi i m(2v-b)} \cdot \sum_{0}^{m-1}{}_r\, e^{-2\pi i r(v-b)} \cdot \vartheta_1\left(a+(m-1)b+r\tau, m\tau\right).$$

Nun nehmen wir zweitens die Functionen:

$$\varphi_k(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{mn(n+1)} \cdot e^{2\pi i v} \cdot e^{2\pi i n(a-b)}}{\alpha_k \cdot q^{2n+1} - e^{2\pi i v}}, \tag{5}$$

bei welchen gesetzt ist:

$$\alpha_k = e^{\frac{2\pi i k}{m}}.$$

Diese Functionen werden dann unendlich an den Punkten:

$$v = \frac{k}{m} + \frac{2n+1}{2}\tau,$$

wenn man wiederum von ganzen Zahlen absieht.

Ferner ist:

$$\varphi_k(v+1) = \varphi_k(v),$$

$$\varphi_k(v+\tau) = -e^{2\pi i(a-b)} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \frac{q^{m(n^2+n+1)}\, e^{2\pi i v} \cdot e^{2\pi i n(a-b)} \cdot \alpha_k^m \cdot q^{m(2n+1)}}{\alpha_k \cdot q^{2n+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Wir bilden nun analog wie vorhin:

$$e^{2\pi i(a-b)+\pi i m(2v+\tau)} \cdot \varphi_k(v) =$$

$$= e^{2\pi i(a-b)} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{m(n^2+n+1)} \cdot e^{2\pi i v} \cdot e^{2\pi i n(a-b)} \cdot e^{2\pi i m v}}{\alpha_k \cdot q^{2n+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Addiren wir die beiden Ausdrücke, so erhalten wir nach einfachen Reductionen:

$$\varphi_k(v+\tau) + e^{2\pi i(a-b)+\pi i m(2v+\tau)} \cdot \varphi_k(v) = \tag{6}$$

$$= -i \cdot q^{\frac{3}{4}m} \cdot e^{i\pi(a-b)} \cdot e^{2\pi i m v} \sum_{0}^{m-1}{}_r\, e^{-2\pi i r v} \cdot \alpha_k^{r} \cdot \vartheta_1(a-b+r\tau, m\tau).$$

Denken wir uns nun die Function $f(v)$ um den Punkt

$$v = b + \frac{\tau}{2}$$

herum entwickelt, so lautet der Factor von

$$\frac{1}{v-b-\frac{\tau}{2}}:$$

$$R = \frac{1}{i} \cdot e^{\pi i(a+(m-1)b)} \cdot q^{\frac{m}{4}} \cdot \frac{\vartheta_1(b-a)}{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(mb, m\tau)}. \tag{7}$$

Denken wir uns ferner die Function $f(v)$ um den Punkt:

$$v = \frac{k}{m} + \frac{\tau}{2}$$

herum entwickelt, so lautet der Factor von

$$\frac{1}{v - \frac{k}{m} - \frac{\tau}{2}}:$$

$$R_k = \frac{1}{i} \cdot e^{\pi i (a-b)} \cdot q^{\frac{m}{4}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(a - \frac{k}{m}\right)}{m \cdot \Theta_1' \cdot \vartheta_1\left(b - \frac{k}{m}\right)}, \tag{8}$$

wobei unter Θ_1' der Werth des ersten Differentialquotienten von $\vartheta_1(mv, m\tau)$ nach seinem Argument für den Nullwerth des letzteren verstanden ist.

Setzen wir nun:

$$\varphi(v) = R \cdot \varphi(v) + \sum_0^{m-1} {}^k R_k \cdot \varphi_k(v), \tag{9}$$

so folgt leicht, dass $\varphi(v)$ der Gleichung Genüge leistet:

$$\varphi(v+\tau) = -e^{-2\pi i(a-b) + \pi i m(2v+\tau)} \cdot \varphi(v).$$

Der Beweis kann auf allgemeine Sätze der Functionentheorie gestützt werden, ähnlich wie es Herr Appell gethan hat. Wir können denselben aber auch mit Hülfe einiger bekannter Thetarelationen geben.

In der That, in einer Arbeit von Enneper*) findet sich für ungerade m die Formel:

$$\frac{m \cdot \Theta_1' \cdot \vartheta_1(x+my, m\tau) \cdot \vartheta_0(x, \tau)}{\vartheta_1' \cdot \vartheta_0(my, m\tau) \cdot \vartheta_0(x, m\tau)} = \sum_0^{m-1} {}^k (-1)^k \cdot \frac{\vartheta_1\left(x+y+\frac{k}{m}, \tau\right)}{\vartheta_0\left(y+\frac{k}{m}, \tau\right)}.$$

Setzen wir an Stelle von $x : x - \frac{m\tau}{2}$, $y : y + \frac{m\tau}{2}$, so erhalten wir:

$$\frac{m \cdot \Theta_1' \cdot \vartheta_1(x+my, m\tau) \cdot \vartheta_1(x, \tau)}{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(my, m\tau) \cdot \vartheta_1(x, m\tau)} = \sum_0^{m-1} {}^k \frac{\vartheta_1\left(x+y+\frac{k}{m}, \tau\right)}{\vartheta_1\left(y+\frac{k}{m}, \tau\right)},$$

oder wenn wir an Stelle von x und y die Grössen a und b durch die Gleichungen einführen:

$$x = a - b, \quad y = b,$$

$$\frac{m \cdot \Theta_1' \cdot \vartheta_1\left(a+(m-1)b, m\tau\right) \cdot \vartheta_1(a-b, \tau)}{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(mb, m\tau) \cdot \vartheta_1(a-b, m\tau)} = \sum_0^{m-1} {}^k \frac{\vartheta_1\left(a-\frac{k}{m}, \tau\right)}{\vartheta_1\left(b-\frac{k}{m}, \tau\right)}.$$

*) Göttinger Nachrichten. 1883.

Setzen wir endlich an Stelle von $b : b - r\tau$, so erhalten wir die allgemeine Formel:

$$(10)\qquad \frac{m\,.\,\Theta_1'\,.\,\vartheta_1\left(a+(m-1)b+r\tau,\,m\tau\right)\,.\,\vartheta_1(a-b,\tau)}{\vartheta_1'\,.\,\vartheta_1(mb,m\tau)\,.\,\vartheta_1(a-b+r\tau,m\tau)}$$

$$= e^{-2\pi i r b}\,.\sum_0^{m-1}{}^{k} e^{\frac{2kr\pi i}{m}}\,.\,\frac{\vartheta_1\left(a-\frac{k}{m}\right)}{\vartheta_1\left(b-\frac{k}{m}\right)}.$$

Eine ähnliche Formel gilt für gerade m.

Hieraus folgt dann unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung, welcher $\varphi(v)$ Genüge leisten soll.

Somit leistet $\varphi(v)$ denselben Gleichungen Genüge wie $f(v)$. Da auch die Unendlichkeitspunkte übereinstimmen und die Art des Unendlichwerdens eine analoge ist, so folgt:

$$(11)\qquad \frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v-b)\,.\,\vartheta_0(mv,m\tau)} = c\left[R\quad \varphi(v) + \sum_0^{m-1}{}^{k} R_k\cdot\varphi_k(v)\right].$$

Die Constante c folgt leicht gleich

$$(12)\qquad c = -2\pi i.$$

Hiermit ist das Problem gelöst, und es bleibt nur noch übrig, die Grössen $\varphi(v)$ in Doppelsummen zu verwandeln.

Es ist nun:

$$\varphi(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} \frac{(-1)^r\cdot e^{2\pi i b m r}\,.\,q^{mr(r+1)}\,.\,e^{2\pi i v}\,.\,e^{2\pi i r(a-b)}}{e^{2\pi i b}\,.\,q^{2r+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Wir greifen zunächst die Glieder heraus, die sich auf negative Werthe von r beziehen. Dieselben können geschrieben werden:

$$-\sum_0^{\infty}{}^{r} \frac{(-1)^r\cdot e^{-2\pi i b\left(m(r+1)+1\right)}\,.\,q^{mr(r+1)+2r+1}\,.\,e^{2\pi i v}\,.\,e^{-2\pi i(r+1)(a-b)}}{1-e^{-2\pi i b}\,.\,q^{2r+1}\,.\,e^{2\pi i v}}.$$

Diesen Ausdruck können wir nach Potenzen von

$$e^{-2\pi i b}\,.\,q^{2r+1}\,.\,e^{2\pi i v}$$

entwickeln. Das Resultat bringen wir in die folgende Form:

$$\sum_{\frac{m+1}{2}}^{\infty}{}^{n} A_n\,.\,e^{\pi i(2n+1-m)v},$$

wobei A_n gesetzt ist gleich:

$$A_n = -\sum_0^{\infty}{}^{r}(-1)^r.\,e^{-\pi i b(2mr+m+2n+1)}.\,q^{mr^2+\frac{(2r+1)(2n+1)}{2}-\frac{m}{2}}.\,e^{-2\pi i(r+1)(a-b)}.$$

Hierbei ist m als ungerade Zahl angenommen. Der Fall eines geraden m kann ganz analog behandelt werden.

Aehnlich nehmen die Glieder, die sich auf den Nullwerth und die positiven Werthe von r beziehen, die Form an:

$$\sum_{\frac{m-1}{2}}^{\infty} {}^{n} B_n \,.\, e^{-\pi i(2n+1-m)v},$$

wobei B_n gesetzt ist gleich:

$$B_n = -\sum_{0}^{\infty} {}^{r} (-1)^r \,.\, e^{\pi i b(2mr-m+2n+1)} \,.\, q^{mr^2 + \frac{(2r+1)(2n+1)}{2} - \frac{m}{2}} \,.\, e^{2\pi i r(a-b)}.$$

Wir können demgemäss die ganze Summe auch folgendermassen schreiben:

$$(13)\quad \varphi(v) = \sum_{1}^{\infty} {}^{r} \sum_{\frac{m+1}{2}}^{\infty} {}^{n} (-1)^r q^{mr^2+r(2n+1)-mr} \,.\, e^{\pi i(2n+1-m)\left(v-b-\frac{\tau}{2}\right)} \,.\, e^{-\pi i r\left(2a+2(m-1)b+m\tau\right)}$$

$$-\sum_{0}^{\infty} {}^{r} \sum_{\frac{m-1}{2}}^{\infty} {}^{n} (-1)^r q^{mr^2+r(2n+1)-mr} \,.\, e^{-\pi i(2n+1-m)\left(v-b-\frac{\tau}{2}\right)} \,.\, e^{\pi i r\left(2a+2(m-1)b+m\tau\right)}.$$

Hieraus folgt die Form:

$$(14)\quad \varphi(v) = -\sum_{0}^{\infty} {}^{n} e^{2\pi n i\left(-v+b+\frac{\tau}{2}\right)} + \sum_{0}^{\infty} {}^{r} (-1)^{r+1} \,.\, q^{mr^2} \,.\, e^{\pi i r\left(2a+2(m-1)b+m\tau\right)}$$

$$+2i\sum_{1}^{\infty} {}^{r} \sum_{1}^{\infty} {}^{n} (-1)^r \,.\, q^{mr^2+2nr} \,.\, \sin w\pi,$$

$$w = 2n\left(v-b-\frac{\tau}{2}\right) - r\left(2a+2(m-1)b+m\tau\right).$$

Hiermit ist das Problem für die Function $\varphi(v)$ vollkommen durchgeführt. Auf die etwaigen Convergenzbedingungen braucht nicht näher eingegangen zu werden.

Genau so wird

$$(15)\quad \varphi_k(v) = \sum_{1}^{\infty} {}^{r} \sum_{\frac{m+1}{2}}^{\infty} {}^{n} (-1)^r \,.\, q^{mr^2+r(2n+1)-mr} \,.\, e^{\pi i(2n+1-m)\left(v-\frac{k}{m}-\frac{\tau}{2}\right)} \,.\, e^{-\pi i r(2a-2b+m\tau)}$$

$$-\sum_{0}^{\infty} {}^{r} \sum_{\frac{m-1}{2}}^{\infty} {}^{n} (-1)^r \,.\, q^{mr^2+r(2n+1)-mr} \,.\, e^{-\pi i(2n+1-m)\left(v-\frac{k}{m}-\frac{\tau}{2}\right)} \,.\, e^{+\pi i r(2a-2b+m\tau)},$$

oder auch:

$$(16)\ \varphi_k(v) = -\sum_0^\infty {}^n e^{2\pi i n\left(-v+\frac{k}{m}+\frac{\tau}{2}\right)} + \sum_0^\infty {}^r (-1)^{r+1} q^{mr^2} e^{\pi i r(2a-2b+m\tau)}$$

$$+ 2i \sum_1^\infty {}^r \sum_1^\infty {}^n (-1)^r . q^{mr^2+2nr} \sin w_1 \pi,$$

$$w_1 = 2n\left(v - \frac{k}{m} - \frac{\tau}{2}\right) - r(2a-2b+m\tau).$$

§ 2.

Erste directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Es soll nun eine directe Methode angegeben werden, mit deren Hülfe die Primfunctionen in trigonometrische Reihen entwickelt werden können. Wir nehmen dazu an, dass $b = \frac{1}{2}$ ist, setzen überdies fest, dass m eine ungerade Zahl sei. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass in allen anderen Fällen durchaus analog verfahren werden kann.

Unter den gemachten Voraussetzungen können wir setzen:

$$(1)\quad \frac{\vartheta_1(v-a)}{\pi\, \vartheta_2(v) . \vartheta_1(mv, m\tau)} = \sum_0^{m-1} {}^k (-1)^{k+1} . \frac{\vartheta_1\left(a - \frac{k}{m}\right)}{m . \Theta_1' . \vartheta_2\left(\frac{k}{m}\right) . \sin \pi\left(v - \frac{k}{m}\right)}$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} . \frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta_1' . \vartheta_2(0, m\tau) . \cos \pi v}$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^n c_{2n+1} . e^{\pi i(2n+1)v} .$$

Die Richtigkeit der Behauptung folgt leicht, wenn wir die Unendlichkeitspunkte links und rechts betrachten und um dieselben die entsprechenden Reihenentwickelungen herstellen.

Setzen wir links und rechts an Stelle von v: $v + \frac{\tau}{2}$, so erhalten wir:

$$e^{\pi i\left(mv+a+\frac{m\tau}{4}\right)} . \frac{\vartheta_0(v-a)}{\pi . \vartheta_3(v) . \vartheta_0(mv, m\tau)} = \sum_0^{m-1} {}^k \frac{(-1)^{k+1} . \vartheta_1\left(a - \frac{k}{m}\right)}{m . \Theta_1' . \vartheta_2\left(\frac{k}{m}\right) . \sin \pi\left(v - \frac{k}{m} + \frac{\tau}{2}\right)}$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}\ \vartheta_2(a)}{\vartheta_1' . \vartheta_2(0, m\tau)\ \cos \pi\left(v + \frac{\tau}{2}\right)} + \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^n c_{2n+1} . e^{\pi i(2n+1)v} . q^{\frac{2n+1}{2}} .$$

Durch Entwickelung des reciproken Sinus und Cosinus ergiebt sich:

$$(2)\quad \frac{\vartheta_0(v-a)}{\pi\vartheta_3(v).\vartheta_0(mv,m\tau)} = \frac{2i.e^{-\pi i a}}{m.\Theta_1'}\sum_0^{m-1}{}^k\sum_0^{\infty}{}^n(-1)^k.e^{i\pi v(2n+1-m)}$$
$$.q^{\frac{2n+1}{2}-\frac{m}{4}}.e^{\frac{-i\pi k(2n+1)}{m}}.\frac{\vartheta_1\left(a-\frac{k}{m}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{k}{m}\right)}$$
$$+\frac{2(-1)^{\frac{m-1}{2}}.\vartheta_2(a)}{\vartheta_1'.\vartheta_2(0,m\tau)}.e^{-\pi i a}.\sum_0^{\infty}{}^n(-1)^n.e^{i\pi v(2n+1-m)}$$
$$.q^{\frac{2n+1}{2}-\frac{m}{4}}$$
$$+e^{-\pi i a}.\sum_0^{\infty}{}^n c_{2n+1}.e^{\pi i v(2n+1-m)}.q^{\frac{2n+1}{2}-\frac{m}{4}}.$$

Andrerseits sind wir aber berechtigt, anzusetzen:

$$(3)\quad \frac{1}{\pi}.\frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_3(v).\vartheta_0(mv,m\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n b_{2n}.e^{\pi i v(2n+1-m)},$$

Mithin folgt durch Vergleichung für den Nullwerth und für positive Werthe von n:

$$(4)\quad b_{2n}.q^{\frac{m}{4}-\frac{2n+1}{2}} = \frac{2i.e^{-\pi i a}}{m\,\Theta_1'}\sum_0^{m-1}{}^k(-1)^k.e^{\frac{-i\pi k(2n+1)}{m}}.\frac{\vartheta_1\left(a-\frac{k}{m}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{k}{m}\right)}$$
$$+2(-1)^{\frac{m-1}{2}+n}e^{-\pi i a}.\frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta_1'.\vartheta_2(0,m\tau)}+e^{-\pi i a}.c_{2n+1}.$$

Ist dagegen n negativ, so wird:

$$(5)\quad b_{2n}.q^{\frac{m}{4}-\frac{2n+1}{2}} = e^{-\pi i a}.c_{2n+1}.$$

Die Grössen b und c hängen jedenfalls von a ab, wir wollen sie unter solchen Umständen bezeichnen durch:

$$b_{2n}(a) \quad\text{und}\quad c_{2n+1}(a).$$

Dann folgt für alle Werthe von n:

$$c_{2n+1}(a) = c_{-2n-1}(-a),$$
$$b_{2n-2+2m}(a) = b_{-2n}(-a),$$

also vermöge Gleichung (5):

$$(6)\quad c_{2n+1}(a) = q^{\frac{2n+1}{2}+\frac{m}{4}}.e^{-\pi i a}.b_{2n+2m}$$

für

$$n = 0, 1, \ldots, \infty.$$

Setzen wir diesen Werth in Gleichung (4) ein, so nimmt dieselbe die Form einer Recursionsformel an, welcher die Grössen b Genüge leisten.

Aus ihr ergiebt sich für b_{2n} der Werth:

$$(7)\quad b_{2n}\cdot q^{\frac{m}{4}-\frac{2n+1}{2}} = 2i\sum_{0}^{m-1}{}_k (-1)^k . e^{\frac{-i\pi k(2n+1)}{m}} . e^{-i\pi a}\frac{\vartheta_1\left(a-\frac{k}{m}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{k}{m}\right)}\sum_{0}^{\infty} e^{-2\pi i r a} . q^{r^2 m + r(2n+1)}$$

$$+2(-1)^{n+\frac{m-1}{2}} \cdot e^{-\pi i a} . \frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta_1' . \vartheta_2(0, m\tau)}\sum_{0}^{\infty}(-1)^r . e^{-2\pi i r a} . q^{r^2 m + r(2n+1)}.$$

Die Formel gilt für $n = 0$ und für alle positiven Werthe von n.

Für negative Werthe von n sind die Grössen b bestimmt vermöge der Formel:

$$b_{-2n}(-a) = b_{2n-2+2m}(a).$$

Die Uebereinstimmung der soeben gefundenen Resultate mit den im vorigen Paragraphen entwickelten braucht nicht näher nachgewiesen zu werden.

Somit sind wir auf systematischem Wege zur Aufstellung der Appell'schen Functionen gekommen.

§ 3.

Zweite directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Die zweite directe Methode, mit deren Hülfe die Primfunctionen in trigonometrische Reihen entwickelt werden sollen, hat viele Aehnlichkeit mit der ersten. Sie unterscheidet sich von derselben im wesentlichen dadurch, dass wir uns von vornherein die Entwickelung nach Potenzen von $e^{\pi i v}$ und $e^{\pi i a}$ angesetzt denken.

Wir setzen nämlich:

$$(1)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_1(v-a)}{\vartheta_2(v)\cdot\vartheta_1(mv, m\tau)} = \sum_{0}^{m-1}{}_k \frac{(-1)^{k+1} . \vartheta_1\left(a-\frac{k}{m}\right)}{m . \Theta_1' . \vartheta_2\left(\frac{k}{m}\right) . \sin\pi\left(v-\frac{k}{m}\right)}$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}\vartheta_2(a)}{\vartheta_1' . \vartheta_2(0, m\tau) . \cos\pi v}$$

$$+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n c_{2n+1, 2r+1} . e^{\pi i(2n+1)v+\pi i(2r+1)a},$$

und ähnlich:

$$(2)\qquad \frac{\vartheta_0(v-a)}{\pi\,.\,\vartheta_0(v)\,.\,\vartheta_0(mv,\,m\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, b_{2n,\,2r}\,.\,e^{\pi i(2n+1-m)v+2\pi i r a}.$$

Dann folgt genau so wie bei der ersten Methode für $n=0$ und für positive Werthe von n:

$$(3)\qquad q^{\frac{m}{4}-\frac{2n+1}{2}}\,.\,b_{2n,\,2r} = \frac{2(-1)^r\cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}}{m\,.\,\Theta_1'} \sum_0^{m-1}{}_k \frac{(-1)^k\cdot e^{-\frac{i\pi k}{m}(2n+2r+2)}}{\vartheta_2\left(\frac{k}{m}\right)}$$

$$+\frac{2(-1)^{\frac{m-1}{2}+n}\cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}}{\vartheta_1'\,.\,\vartheta_2(0,\,m\tau)} + c_{2n+1,\,2r+1}.$$

Für negative Werthe von n wird:

$$(4)\qquad q^{\frac{m}{4}-\frac{2n+1}{2}}\,.\,b_{2n,\,2r} = c_{2n+1,\,2r+1}.$$

Andrerseits ist:

$$c_{2n+1,\,2r+1} = q^{\frac{m}{4}+\frac{2n+1}{2}}\,.\,b_{2n+2m,\,2r+2}$$

für $n=0$ und positive Werthe von n.

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (3) ein, so erhalten wir wieder eine Recursionsformel, welcher die Grössen b Genüge leisten.

Dieselbe nimmt durch die folgende Erwägung eine besonders einfache Gestalt an.

Fassen wir den Ausdruck:

$$\frac{\vartheta_0(v-a)}{\pi\,.\,\vartheta_3(v)\,.\,\vartheta_0(mv,\,m\tau)}$$

als Function von a auf und bezeichnen ihn als solche durch $\psi(a)$, so ist:

$$\psi(a+\tau) = e^{\pi i(2v-2a-\tau)}\,.\,\psi(\tau),$$

also:

$$b_{2n,\,2r} = b_{2n+2,\,2r-2}\cdot q^{2r-1}$$

oder:

$$(5)\qquad b_{2n,\,2r} = b_{2n+2r,\,0}\cdot q^{r^2}.$$

Hieraus folgt, dass wir berechtigt sind, in Gl. (3) von vornherein $r=0$ anzunehmen.

Dieselbe erhält dann die Gestalt:

$$(6)\quad q^{\frac{m}{4}-\frac{2n+1}{2}}\cdot b_{2n,0}=\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{m\,.\,\Theta_1'}\cdot\sum_0^{m-1}{}_k\frac{(-1)^k\,.\,e^{\frac{-i\pi k}{m}(2n+2)}}{\vartheta_2\left(\frac{k}{m}\right)}$$

$$+\frac{2(-1)^{\frac{m+1}{2}+n}\,.\,q^{\frac{1}{4}}}{\vartheta_1'\,.\,\vartheta_2(0,\,m\tau)}+q^{\frac{m}{4}+\frac{2n+1}{2}+1}\,.\,b_{2n+2m+2,0}\,.$$

Hiermit sind wir wiederum am Ziel. Der fertige Ausdruck für $b_{2n,0}$ folgt unmittelbar, braucht aber nicht weiter hingeschrieben zu werden.

Dresden, den 17. Juni 1889.

Sur les cartes géographiques.

Par

A. Korkine à St. Pétersbourg.

Quand on se propose de représenter une partie d'une surface Σ sur une autre surface Σ', on rapporte tous les points de Σ aux coordonnées u, v, choisies à volonté et de même les points de Σ' aux coordonnées quelconques u', v'. Si l'on fait maintenant u et v fonctions de u', v', de manière que réciproquement u' et v' soient aussi des fonctions de u, v, à tout point (u, v) de la surface Σ correspondra un point (u', v') de Σ' et réciproquement. Une partie de la surface Σ aura sa correspondante sur Σ'; celle-ci sera la représentation, ou la carte de celle-là.

Pour avoir une carte de caractère détérminé on l'assujétit à de certaines conditions. Ainsi on demande souvent que les angles sur la carte soient égaux à leurs correspondants. On obtient de la sorte des cartes, qui ont tout d'abord attiré l'attention des géomètres et dont la théorie est suffisamment connue.

On demande aussi souvent que le rapport de toute partie de Σ à sa correspondante soit constant pour toute la carte. On connait quelques cas particuliers très-remarquables de telles cartes, mais on s'est très-peu occupé de leur theorie générale.

M. O. Bonnet dans sa thèse de docteur*) a posé une question générale de ce genre pour la représentation d'une sphère sur un plan, ayant ajouté la condition, que les méridiens et les parallèles sur la carte soient perpendiculaires entre eux. Il réduit le problème à l'intégration d'une certaine équation aux différences partielles du second ordre. Comme cette intégration n'est pas effectuée, la question est restée sans solution.

Cependant les cartes de M. Bonnet jouissent des propriétés simples très-remarquables et méritent l'attention sous le rapport théorique et pratique.

*) Sur la théorie mathématique des cartes géographiques Journ. de Liouville tome XVII. 1852.

Comme personne jusqu'à présent n'a repris la question, j'en donnerai la solution générale et au lieu d'une sphère je vais prendre une surface quelconque de révolution.

1. Supposons d'abord que Σ et Σ' soient des surfaces quelconques et désignons respectivement par ds, ds' les élements linéaires de ces surfaces; alors on aura

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$ds'^2 = E'\,du'^2 + 2F'\,du'dv' + G'\,dv'^2,$$

E, F, G étant des fonctions données de u, v; E', F', G' celles de u', v'.

L'élement superficiel de Σ' pour le point (u', v') est

$$du'\,dv'\sqrt{E'G' - F'^2};$$

celui de la surface Σ relatif au point (u, v) exprimée en u', v' et leurs différentielles prend la forme

$$du'\,dv'\sqrt{EG - F^2}\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'}\,\frac{\partial v}{\partial u'}\right).$$

Si l'on veut maintenant que le rapport de toute partie de la surface Σ à sa correspondante sur Σ' soit constante et égale à un nombre donné k, il faut et il suffit que le rapport de deux élements superficiels se réduise à k.

Il résulte de là cette équation

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'}\,\frac{\partial v}{\partial u'} = k\cdot\frac{\sqrt{E'G' - F'^2}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Ajoutons encore la condition que sur Σ' les lignes correspondantes aux lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, soient perpendiculaires entre elles. Pour l'exprimer analytiquement considérons u' et v' comme fonctions de u et v, de sorte que tous les points de Σ' soient déterminés par les coordonnées u, v; alors le coefficient de $du\,dv$ dans la nouvelle expression de ds'^2 doit être nul. Cela donne l'équation

$$E'\,\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial u}\right) + G'\,\frac{\partial v'}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial v} = 0.$$

Or en désignant par Δ le déterminant

$$\frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'}\,\frac{\partial v}{\partial u'}$$

on a

$$\Delta\frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial v'},\quad \Delta\frac{\partial u'}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial v'},\quad \Delta\frac{\partial v'}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial u'},\quad \Delta\frac{\partial v'}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial u'}.$$

En vertu de ces valeurs l'équation précedente deviendra

$$(2) \qquad E'\,\frac{\partial u}{\partial v'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} - F'\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial u}{\partial v'}\,\frac{\partial v}{\partial u'}\right) + G'\,\frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial u'} = 0.$$

On trouvera toutes les cartes qui remplissent les deux conditions

mentionnées en déduisant des équations (1) et (2) les expressions générales de u et v en fonctions de u' et v', ou bien, en exprimant de la manière la plus générale u, v, u', v' en fonctions de deux variables indépendantes quelconques.

2. Supposons maintenant que Σ soit une surface de révolution et Σ' un plan; alors en déterminant les points de Σ par leur latitude u et longitude v on aura

$$ds^2 = du^2 + [\varphi(u)]^2\, dv^2,$$

$\varphi(u)$ étant une fonction donnée de u, qui ne dépend point de v. Donc

$$E = 1,\quad F = 0,\quad G = [\varphi(u)]^2,\quad \sqrt{EG - F^2} = \varphi(u).$$

Soient x et y les coordonnées rectangulaires rectilignes d'un point sur le plan Σ' et faisons

$$u' = x + y\sqrt{-1},\qquad v' = x - y\sqrt{-1},$$

alors il viendra

$$ds'^2 = du'\, dv',$$

et par conséquent

$$E' = 0,\quad F' = \frac{1}{2},\quad G' = 0,\quad \sqrt{E'G' - F'^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2}.$$

Faisons encore

(3)
$$U = \frac{4}{k\sqrt{-1}} \int \varphi(u)\, du;$$

alors les équations (1) et (2) deviennent

(*)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial u'}\,\dfrac{\partial v}{\partial v'} - \dfrac{\partial U}{\partial v'}\,\dfrac{\partial v}{\partial u'} = 2, \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial u'}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial v'} + \dfrac{\partial U}{\partial v'}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial u'} = 0. \end{cases}$$

De là on tire

(4)
$$\frac{\partial U}{\partial u'} = \frac{1}{\dfrac{\partial v}{\partial v'}},\qquad \frac{\partial U}{\partial v'} = -\frac{1}{\dfrac{\partial v}{\partial u'}}.$$

L'équation

$$\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\partial U}{\partial v'}\right) = \frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\partial U}{\partial u'}\right)$$

étant développée devient

$$\frac{1}{\left(\dfrac{\partial v}{\partial u'}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial u'^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{\partial v}{\partial v'}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial v'^2} = 0.$$

Il est évident que U satisfait à une équation pareille; par conséquent en désignant par Z indifféremment U ou v, on obtient l'équation

$$\frac{1}{\left(\dfrac{\partial Z}{\partial u'}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial u'^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{\partial Z}{\partial v'}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial v'^2} = 0.$$

Faisant pour abréger à la manière ordinaire

$$\frac{\partial Z}{\partial u'} = p, \quad \frac{\partial Z}{\partial v'} = q, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial u'^2} = r, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial u' \partial v'} = s, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial v'^2} = t,$$

on a donc

$$\frac{r}{p^2} + \frac{t}{q^2} = 0. \tag{5}$$

C'est de l'intégration de cette équation que dépend la résolution du problème.

3. Avant de l'entreprendre remarquons d'abord que toute solution Z de l'équation (5) peut être multipliée par une constante; le produit sera une autre solution.

Ensuite il est évident qu'on peut remplacer les variables U, v, u', v' par $U - U_0$, $v - v_0$, $u' - u_0'$, $v' - v_0'$ les quantités U_0, v_0, u_0', v_0' étant des constantes arbitraires.

Remarquons encore que dans l'ensemble de solutions U et v des équations (4) il faut distinguer celles, qui donnent pour u et v des valeurs réelles en x et y, de celles dont résultent des valeurs imaginaires.

Les premières fournissent des représentations ou des cartes réelles dont on peut tracer les canevas; les autres ne conduisent immédiatement à rien, quoiqu'elles puissent aussi être utilisées pour obtenir des cartes réelles, comme nous le fairons voir dans un des numéros suivants.

Supposons que nous ayons une solution Z de l'équation (5), qui étant exprimée en fonction de x et y a une valeur réelle. D'abord on peut faire $v = Z$. Des équations (4) on déduira alors pour U une certaine valeur $\frac{Y}{\sqrt{-1}}$, Y étant réel.

L'équation (3) donnera

$$\int \varphi(u)\, du = \frac{k}{4} Y,$$

ce qui avec

$$v = Z$$

déterminera une carte réelle.

Ensuite on peut au lieu de Z prendre la solution $-\frac{Z}{\sqrt{-1}}$ et faire $U = -\frac{Z}{\sqrt{-1}}$. Les équations (3) et (4) donneront alors

$$\int \varphi(u)\, du = -\frac{k}{4} Z, \quad v = Y.$$

Ces deux équations déterminent une autre carte réelle, que nous nommerons conjuguée de la première.

Dans celle-ci $Z =$ const. est l'équation des méridiens et $Y =$ const. celle des parallèles; dans sa conjuguée réciproquement $Z =$ const. représente les parallèles et $Y =$ const. les mèridiens.

Tout canevas des cartes dont nous nous occupons a donc une double signification.

4. Pour faire l'intégration de l'équation

$$\frac{r}{p^2}+\frac{t}{q^2}=0 \tag{5}$$

nous allons distinguer deux cas: d'abord quand il existe entre p et q une équation quelconque, de sorte que p et q soient des fonctions d'une seule variable λ; ensuite quand p et q sont deux variables indépendantes entre elles.

Dans le premier cas soient

$$p=\varphi(\lambda),\quad q=\psi(\lambda),$$

λ étant une fonction de u' et v'. Comme on a

$$\frac{\partial p}{\partial v'}=\frac{\partial q}{\partial u'},$$

il viendra

$$\varphi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial v'}=\psi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial u'}. \tag{6}$$

Or nous avons

$$r=\frac{\partial p}{\partial u'}=\varphi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial u'},\quad t=\frac{\partial q}{\partial v'}=\psi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial v'};$$

donc en portant ces valeurs avec celle de p et q dans l'équation (5), on obtiendra

$$\frac{1}{(\varphi(\lambda))^2}\cdot\varphi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial u'}+\frac{1}{(\psi(\lambda))^2}\psi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial v'}=0.$$

De là, en ayant égard à l'équation (6), on déduit

$$\left[\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\right]^2+\left[\frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)}\right]^2=0.$$

Il résulte de cette équation

$$\varphi(\lambda)=\mathsf{A}[\psi(\lambda)]^{\mp\sqrt{-1}},$$

A étant une constante arbitraire.

En substituant cette valeur dans l'équation (6) on aura

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u'}-\frac{A}{\mp\sqrt{-1}\,[\psi(\lambda)]^{1\mp\sqrt{-1}}}\frac{\partial\lambda}{\partial v'}=0$$

Si λ n'est pas une constante, on obtient en intégrant cette équation

$$u'\pm\frac{\sqrt{-1}}{\mathsf{A}}[\psi(\lambda)]^{1\pm\sqrt{-1}}\cdot v'=\omega(\lambda), \tag{7}$$

$\omega(\lambda)$ étant une fonction arbitraire de λ.

De l'équation (8) on trouvera toutes les valeurs variables de λ.

5. Supposons que λ soit une constante et avec elle aussi les quantités $p=\varphi(\lambda)$, $q=\psi(\lambda)$. Faisons

$$p = h e^{\alpha\sqrt{-1}}, \quad q = h e^{-\alpha\sqrt{-1}}$$

où h et α sont des constantes et prenons $Z = v$.

Alors nous aurons

$$v = h(e^{\alpha\sqrt{-1}} u' + e^{-\alpha\sqrt{-1}} v').$$

Comme $u' = x + y\sqrt{-1}$, $v' = x - y\sqrt{-1}$ sont deux imaginaires conjuguées et v est réel, h et α sont aussi réelles. On a donc

$$v = 2h\,(x \cos\alpha - y \sin\alpha).$$

D'après les équations (4) on aura encore

$$U = \sqrt{-1} \cdot \frac{2}{h}\,(x \sin\alpha + y \cos\alpha).$$

En ayant égard à l'équation (3) et aux remarques du n° 3 et désignant par x_0, y_0, u_0, v_0 des constantes arbitraires on obtient

$$v - v_0 = 2h\,[(x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha],$$

$$-\frac{2}{k}\int_{u_0}^{u} \varphi(u)\,du = \frac{1}{h}\,[(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha].$$

Si l'on prend le point (x_0, y_0) pour l'origine des coordonnées et qu'on tourne convenablement les axes, on peut écrire ces équations plus simplement

$$v - v_0 = 2hx, \quad -\frac{2}{k}\int_{u_0}^{u}\varphi(u)\,du = \frac{1}{h}\,y.$$

Elles donnent des cartes dont le canevas consiste en droites parallèles pour les méridiens et pour les parallèles en droites perpendiculaires aux méridiens.

Les conjuguées de ces cartes leur sont parfaitement semblables.

6. Comme de deux fonctions $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ l'une est complétement arbitraire, faisons

$$\psi(\lambda) = e^{\alpha + \lambda \pm \lambda\sqrt{-1}}, \quad \mathsf{A} = e^{\alpha(1 \pm \sqrt{-1})},$$

α étant une constante, et prenons les signes supérieurs ou inférieurs simultanement avec ceux de la formule

$$p = \varphi(\lambda) = \mathsf{A}[\psi(\lambda)]^{\mp\sqrt{-1}}.$$

Nous aurons

$$p = e^{\alpha + \lambda \mp \lambda\sqrt{-1}}, \quad q = e^{\alpha + \lambda \pm \lambda\sqrt{-1}}. \tag{8}$$

L'équation (7) deviendra donc

$$u' \pm \sqrt{-1}\, e^{\pm 2\lambda\sqrt{-1}} \cdot v' = \omega(\lambda).$$

Faisons maintenant

$$u' = \varrho e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad v' = \varrho e^{-\theta\sqrt{-1}},$$

et l'équation précédente s'écrira plus simplement

$$\rho \cos\left(\lambda \mp \Theta + \frac{\varpi}{4}\right) = \Omega(\lambda), \tag{7}$$

$\Omega(\lambda)$ étant une fonction arbitraire de λ.

Pour avoir toutes les valeurs réelles de Z dans le cas dont nous nous occupons, il suffit de prendre toutes les valeurs réelles de λ, qui satisfont à l'équation (7) et de supposer la constante α aussi réelle.

Soit, par exemple, $\Omega(\lambda) = 0$; alors on tire de l'équation (7) une des valeurs de λ

$$\lambda = \Theta + \frac{\varpi}{4}\cdot$$

Pour cette valeur de λ on doit prendre les signes supérieures dans les équations (8). En faisant $Z = v$ on aura en vertu des équations (4)

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U}{\partial u'}\cdot\frac{\partial u'}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial v'}\,\frac{\partial v'}{\partial \rho} = \frac{1}{q}\,\frac{\partial u'}{\partial \rho} - \frac{1}{p}\,\frac{\partial v'}{\partial \rho}\cdot$$

D'après les valeurs précédentes de u', v', p et q on aura

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -\sqrt{-1}\,C\cdot e^{-\Theta},$$

C étant une constante réelle. De la même manière on obtiendra

$$\frac{\partial U}{\partial \Theta} = \sqrt{-1}\,C\rho e^{-\Theta}.$$

Donc

$$U = -\sqrt{-1}\cdot C\rho e^{-\Theta}.$$

D'une manière absolument semblable on aura

$$Z = v = \frac{2}{C}\,\rho e^{\Theta}.$$

Ainsi d'après l'équation (3) et n° 3 on obtient

$$v - v_0 = \frac{2}{C}\,\rho e^{\Theta},$$

$$\int_{u_0}^{u} \varphi(u)\,du = \frac{kC}{4}\,\rho e^{-\Theta}.$$

Le canevas de ces cartes est donc composé de spirales logarithmiques orthogonales.

Les cartes conjuguées sont semblables.

7. Considérons maintenant le cas général, savoir, celui où p et q sont deux variables indépendantes entre elles.

Pour faire l'intégration de l'équation (5) nous allons prendre au lieu de u' et v' deux nouvelles variables indépendantes ξ et η en les déterminant par les équations

$$p = e^{-(\xi+\eta) - (\xi-\eta)\sqrt{-1}}, \quad q = e^{(\xi+\eta) - (\xi-\eta)\sqrt{-1}}. \tag{9}$$

La nouvelle fonction inconnue z sera définie par l'équation

$$u' = e^{\xi+\eta}\cdot z, \tag{10}$$

Les équations (9) donnent immédiatement

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial\xi} &= r\frac{\partial u'}{\partial\xi} + s\frac{\partial v'}{\partial\xi} = -e^{-(\xi+\eta)-(\xi-\eta)\sqrt{-1}}\cdot(1+\sqrt{-1})\\ &= -p(1+\sqrt{-1}),\\ \frac{\partial p}{\partial\eta} &= r\frac{\partial u'}{\partial\eta} + s\frac{\partial v'}{\partial\eta} = -p(1-\sqrt{-1}),\end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial\xi} &= s\frac{\partial u'}{\partial\xi} + t\frac{\partial v'}{\partial\xi} = q(1-\sqrt{-1}),\\ \frac{\partial q}{\partial\eta} &= s\frac{\partial u'}{\partial\eta} + t\frac{\partial v'}{\partial\eta} = q(1+\sqrt{-1}).\end{aligned}\right. \tag{12}$$

En désignant par δ le déterminant

$$\frac{\partial u'}{\partial\xi}\,\frac{\partial v'}{\partial\eta} - \frac{\partial v'}{\partial\xi}\,\frac{\partial u'}{\partial\eta},$$

on tire des équations (11)

$$\begin{aligned} r &= -\frac{p}{\delta}\left[\left(\frac{\partial v'}{\partial\eta} - \frac{\partial v'}{\partial\xi}\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial v'}{\partial\eta} + \frac{\partial v'}{\partial\xi}\right)\right],\\ s &= \frac{p}{\delta}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta} - \frac{\partial u'}{\partial\xi}\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta} + \frac{\partial u'}{\partial\xi}\right)\right],\end{aligned}$$

et de même des équations (12)

$$\begin{aligned} s &= \frac{q}{\delta}\left[\left(\frac{\partial v'}{\partial\eta} - \frac{\partial v'}{\partial\xi}\right) - \sqrt{-1}\left(\frac{\partial v'}{\partial\eta} + \frac{\partial v'}{\partial\xi}\right)\right],\\ t &= \frac{q}{\delta}\left[-\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta} - \frac{\partial u'}{\partial\xi}\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta} + \frac{\partial u'}{\partial\xi}\right)\right].\end{aligned}$$

En comparant les deux valeurs de s il viendra

$$\begin{aligned} &q\left[\left(\frac{\partial v'}{\partial\eta} - \frac{\partial v'}{\partial\xi}\right) - \sqrt{-1}\left(\frac{\partial v'}{\partial\eta} + \frac{\partial v'}{\partial\xi}\right)\right]\\ &= p\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta} - \frac{\partial u'}{\partial\xi}\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta} + \frac{\partial u'}{\partial\xi}\right)\right].\end{aligned} \tag{13}$$

L'équation

$$\frac{r}{p^2} + \frac{t}{q^2} = 0, \tag{5}$$

en y substituant les valeurs précédentes de r et t, deviendra

$$\begin{aligned} &q\left[\left(\frac{\partial v'}{\partial\eta} - \frac{\partial v'}{\partial\xi}\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial v'}{\partial\eta} + \frac{\partial v'}{\partial\xi}\right)\right]\\ &= p\left[-\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta} - \frac{\partial u'}{\partial\xi}\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta} + \frac{\partial u'}{\partial\xi}\right)\right].\end{aligned} \tag{14}$$

Des équations (13) et (14) on déduit facilement

$$\frac{\partial v'}{\partial \eta} = \sqrt{-1}\,\frac{p}{q}\,\frac{\partial u'}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial \xi} = -\sqrt{-1}\,\frac{p}{q}\,\frac{\partial u'}{\partial \xi}.$$

En vertu des valeurs (9) de p et q et de l'équation (10) on aura

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v'}{\partial \eta} = \sqrt{-1}\, e^{-(\xi+\eta)} \left(\dfrac{\partial z}{\partial \eta} + z\right), \\ \dfrac{\partial v'}{\partial \xi} = -\sqrt{-1}\, e^{-(\xi+\eta)} \left(\dfrac{\partial z}{\partial \xi} + z\right). \end{cases}$$

Maintenant pour déterminer Z comme fonction de ξ et η nous avons

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} = p\,\frac{\partial u'}{\partial \eta} + q\,\frac{\partial v'}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = p\,\frac{\partial u'}{\partial \xi} + q\,\frac{\partial v'}{\partial \xi}.$$

En vertu des équations (9), (10), (15) on tire de là

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial \eta} = (1+\sqrt{-1})\, e^{-(\xi-\eta)\sqrt{-1}} \cdot \left(\dfrac{\partial z}{\partial \eta} + z\right), \\ \dfrac{\partial Z}{\partial \xi} = (1-\sqrt{-1})\, e^{-(\xi-\eta)\sqrt{-1}} \cdot \left(\dfrac{\partial z}{\partial \xi} + z\right). \end{cases}$$

En substituant dans l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v'}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v'}{\partial \xi}\right)$$

les valeurs (15) de $\dfrac{\partial v'}{\partial \eta}$, $\dfrac{\partial v'}{\partial \xi}$ il viendra

$$(17)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\, \partial \eta} = z.$$

On aurait le même résultat en développant l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right).$$

et en ayant égard aux équations (16).

Ainsi la résolution des équations (4) ou celle de l'équation (5) se réduit définitivement à l'intégration de l'équation (17). Or cette dernière est bien-connue et son intégrale générale s'exprime, comme on sait, au moyen des intégrales définies. Poisson l'a discutée en détail dans son grand ouvrage sur la théorie mathématique de la chaleur ainsi-que dans ses mémoires.

Ayant une valeur quelconque de z on la portera dans les équations (15) et on aura v' par quadrature comme fonction de ξ et η.

Ensuite on substituera la même valeur de z dans les équations (16) et on obtiendra Z aussi par quadrature. Enfin l'équation (10) donnera la valeur de u'.

Les expressions de $u' = x + y\sqrt{-1}$ et $v' = x - y\sqrt{-1}$ en ξ et η conduiront à celles de x et y. Si l'on trouve pour Z une valeur réelle, on faira comme dans le n° 3 et on obtiendra de deux manières différentes u, v, x, y comme fonctions de ξ et η.

Comme on connait l'intégrale générale de l'équation (17), si l'on y ajoute encore les considérations des n° 4 et 5, on aura toutes les représentations possibles d'une surface de révolution sur un plan qui jouissent de deux propriétés énoncées au commencement.

8. Pour éclaircir la théorie par quelques exemples prenons d'abord

$$z = -\frac{\sqrt{-1}}{2} e^{(\xi-\eta)\sqrt{-1}}, \tag{18}$$

ce qui est évidemment une solution de l'équation (17).

Afin d'avoir u et v en x et y exprimons p et q en u' et v'. Nous avons d'après l'équation (10)

$$e^{-(\xi+\eta)} = \frac{z}{u'}$$

et l'équation (18) nous donne

$$e^{-(\xi-\eta)\sqrt{-1}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2z};$$

donc en vertu des équations (9) on aura

$$p = \frac{\partial Z}{\partial u'} = e^{-(\xi+\eta)} \cdot e^{-(\xi-\eta)\sqrt{-1}} = -\frac{z}{u'} \cdot \frac{\sqrt{-1}}{2z} = -\frac{\sqrt{-1}}{2u'}.$$

De même les équations (15) d'aprés la valeur (18) de z donnent

$$\frac{\partial v'}{\partial \eta} = \frac{1-\sqrt{-1}}{2} e^{-(\xi+\eta)+(\xi-\eta)\sqrt{-1}},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial \xi} = -\frac{1+\sqrt{-1}}{2} e^{-(\xi+\eta)+(\xi-\eta)\sqrt{-1}};$$

donc il vient

$$v' = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\, e^{-(\xi+\eta)+(\xi-\eta)\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{-1} \cdot \frac{1}{q}.$$

Il suit de là

$$q = \frac{\partial Z}{\partial v'} = \frac{\sqrt{-1}}{2v'}.$$

Prenons maintenant suivant le n° 3 hZ au lieu de Z, en désignant par h une constante quelconque; nous aurons

$$\frac{\partial Z}{\partial u'} = -\frac{h\sqrt{-1}}{2u'},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v'} = \frac{h\sqrt{-1}}{2v'};$$

par conséquent

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial u'}du' + \frac{\partial Z}{\partial v'}dv' = h\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

De là il vient

$$Z = h \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \text{Const.}$$

En faisant $Z = v - v_0$ on aura d'après les équations (4)

$$\frac{\partial U}{\partial u'} = \frac{1}{\frac{\partial Z}{\partial v'}} = -\frac{2\sqrt{-1}}{h}v',$$

$$\frac{\partial U}{\partial v'} = -\frac{1}{\frac{\partial Z}{\partial u'}} = -\frac{2\sqrt{-1}}{h}u';$$

donc

$$U = -\frac{2\sqrt{-1}}{h}u'v' + \text{Const.}$$

Si l'on prend les coordonnées polaires ϱ et Θ au lieu de x et y, en faisant $x = \varrho\cos\Theta$, $y = \varrho\sin\Theta$, et que l'on désigne par ϱ_0, Θ_0, u_0, v_0 des constantes arbitraires, on aura d'après le n° 3

$$v - v_0 = h(\Theta - \Theta_0),$$

$$\int_{u_0}^{u}\varphi(u)\,du = \frac{k}{2h}(\varrho^2 - \varrho_0^2).$$

Ces deux équations définissent les cartes dont les méridiens sont des droites issues du pôle et les parallèles sont des cercles concentriques ayant le pôle pour centre.

Les cartes conjuguées sont données par les équations

$$v - v_0 = l(\varrho^2 - \varrho_0^2),$$

$$\int_{u_0}^{u}\varphi(u)\,du = \frac{k}{2l}(\Theta - \Theta_0),$$

l étant une constante.

Il est facile de voir que tous les cas dans lesquels le système de méridiens ou celui de parallèles est représenté par des droites sont renfermés dans les formules précédentes et dans celles du n° 5.

Il n'est pas difficile non plus de démontrer que les cartes du n° actuel sont les seules dans lesquelles les méridiens ou les parallèles sont représentées par un système de cercles.

9. Faisons

$$z = A \cdot e^{\frac{-2m(m-1)(\xi+\eta)-(2m-1)(\xi-\eta)\sqrt{-1}}{m^2+(m-1)^2}}$$

où A est une constante, et nous aurons une solution de l'équation (17). Si l'on prend

$$\lg A = \frac{m \lg (2m-1) - (2m-1)\lg m}{m^2 + (m-1)^2},$$

on déduira de là comme dans le n° précédent

$$Z = u'^m v'^{\frac{m}{2m-1}}.$$

Pour $m = \frac{1}{2}$ au lieu de cette valeur de Z on aura

$$Z = u'^{\frac{1}{2}} e^{\alpha v'},$$

α étant une constante.

Or u' et v' étant deux imaginaires conjuguées, il faut pour avoir une valeur réelle de Z, que m soit ou zéro, ce ne conduit à aucune carte, ou l'unité, ce qui donne le cas discuté au n° 8, ou bien imaginaire et de la forme $\alpha + \sqrt{\alpha(1-\alpha)}\sqrt{-1}$, α étant une constante positive, qui ne surpasse pas l'unité.

Faisons donc

$$m = + \sqrt{\alpha(1-\alpha)} \cdot \sqrt{-1}, \quad Z = v - v_0,$$

et nous aurons

$$v - v_0 = h\,(u' - u_0')^{\alpha + \sqrt{\alpha(1-\alpha)}\cdot\sqrt{-1}}(v' - v_0')^{\alpha - \sqrt{\alpha(1-\alpha)}\sqrt{-1}}$$

h, u_0', v_0' étant des constantes.

De là en vertu des équations (4) on obtient facilement

$$U = \frac{\sqrt{-1}}{h\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}(u' - u_0')^{1-\alpha-\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\sqrt{-1}}$$
$$\cdot (v' - v_0')^{1-\alpha+\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\cdot\sqrt{-1}} + \text{Const.}$$

Si nous faisons

$$u' - u_0' = \varrho e^{\Theta\sqrt{-1}},$$
$$v' - v_0' = \varrho e^{-\Theta\sqrt{-1}},$$

nous exprimerons u et v en coordonnées polaires ϱ et Θ par les équations

$$v - v_0 = h\varrho^{2\alpha} e^{-2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\cdot\theta},$$

$$\int_{u_0}^{u} \varphi(u)\,du = -\frac{k}{4h\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,\varrho^{2(1-\alpha)} e^{2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\cdot\theta}.$$

Nous aurons donc les cartes dont les méridiens et les parallèles sont des spirales logarithmiques.

Les cartes conjuguées sont pareilles.

10. Nous allons maintenant montrer comment on peut employer les solutions imaginaires de l'équation (5) pour trouver des cartes réelles.

Supposons que nous ayons une solution

$$Z_1 = X + Y\sqrt{-1},$$

X, Y étant des fonctions de u' et v' qui sont réelles quand on les exprime en x et y; alors on aura une autre solution

$$Z_2 = X - Y\sqrt{-1}.$$

Appliquons à l'équation (15) la transformation connue sous le nom de celle de Legendre.

Pour cela on prendra p et q pour variables indépendantes et une certaine variable w, définie par l'équation

$$w = pu' + qv' - Z$$

sera la nouvelle fonction inconnue. Alors on aura

$$u' = \frac{\partial w}{\partial p}, \quad v' = \frac{\partial w}{\partial q}, \quad p = \frac{\partial Z}{\partial u'}, \quad q = \frac{\partial Z}{\partial v'}.$$

L'équation (5) deviendra

$$\frac{1}{q^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = 0 \tag{19}$$

et sera linéaire.

La valeur $Z = Z_1$ fournira une solution w_1 de l'équation (19), qui sera determinée par les équations

$$w_1 = pu' + qv' - Z_1, \quad p = \frac{\partial Z_1}{\partial u'}, \quad q = \frac{\partial Z_1}{\partial v'}.$$

En éliminant u' et v' on aura w_1 comme fonction p et q.

De même les équations

$$w_2 = pu' + qv' - Z_2, \quad p = \frac{\partial Z_2}{\partial u'}, \quad q = \frac{\partial Z_2}{\partial v'}$$

donneront une autre solution w_2 de l'équation (19).

Or cette dernière étant linéaire, la somme $w_1 + w_2$ et la différence $\sqrt{-1}\,(w_1 - w_2)$ sont aussi ses solutions. En désignant l'une ou l'autre par w_3, on trouvera la valeur correspondante $Z = Z_3$ en fonction de u' et v' si l'on élimine p et q des équations

$$Z_3 = pu' + qv' - w_3, \quad u' = \frac{\partial w_3}{\partial p}, \quad v' = \frac{\partial w_3}{\partial q}.$$

La fonction Z_3 sera la solution réelle de l'équation (5) et donnera deux cartes conjuguées comme dans le n^0 3.

Par exemple, supposons que la constante m soit réelle dans la fonction

$$Z_1 = u'^m v'^{\frac{m}{2m-1}},$$

mais différente de zéro, de $\frac{1}{2}$ et de l'unité. Alors Z_1 est imaginaire et la valeur conjuguée sera

$$Z_2 = u'^{\frac{m}{2m-1}} v'^m.$$

Conformément à ce que nous avons dit, prenons d'abord Z_1 et nous aurons

$$(20)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\partial Z_1}{\partial u'} = m u'^{m-1} v'^{\frac{m}{2m-1}} = \dfrac{m Z_1}{u'}, \\ q = \dfrac{\partial Z_1}{\partial v'} = \dfrac{m}{2m-1} u'^m v'^{\frac{-m+1}{2m-1}} = \dfrac{m Z_1}{(2m-1)v'}, \end{cases}$$

$$p u' + q v' = \frac{2m^2}{2m-1} Z_1, \quad w_1 = \frac{m}{l} Z_1,$$

où la constante l désigne, pour abréger, la quantité

$$\frac{m(2m-1)}{m^2 + (m-1)^2}.$$

Il reste d'exprimer Z_1 en p et q pour avoir w_1.

Or en désignant par K une constante telle-que

$$\lg K = \frac{l}{2m-1} \lg(2m-1) - \frac{l}{m} \lg m$$

on obtient des équations (20)

$$m Z_1 = p u' = K p^l q^{\frac{l}{2m-1}};$$

on a par conséquent

$$w_1 = \frac{m Z_1}{l} = \frac{K}{l} p^l q^{\frac{l}{2m-1}}.$$

Absolument de la même manière on déduit

$$w_2 = \frac{K}{l} \cdot p^{\frac{l}{2m-1}} q^l.$$

En désignant par a une constante arbitraire et multipliant la somme $w_1 + w_2$ par $\frac{am}{K}$ on peut prendre

$$w_3 = \frac{am}{l} \left(p^l q^{\frac{l}{2m-1}} + p^{\frac{l}{2m-1}} q^l \right).$$

Des équations

$$(21)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{am}{p}\left(p^l q^{\frac{l}{2m-1}} + \dfrac{1}{2m-1} p^{\frac{l}{2m-1}} q^l\right), \\ v' = \dfrac{am}{q}\left(\dfrac{1}{2m-1} p^l q^{\frac{l}{2m-1}} + p^{\frac{l}{2m-1}} q^l\right), \end{cases}$$

$$Z_3 = pu' + qv' - w_3$$

on déduira facilement

$$Z_3 = \frac{l}{m} w_3 = a\left(p^l q^{\frac{l}{2m-1}} + p^{\frac{l}{2m-1}} q\right).$$

Faisons $Z_3 = v$ et nous aurons d'après les équations (4)

$$\frac{\partial U}{\partial u'} = \frac{1}{q}, \qquad \frac{\partial U}{\partial v'} = -\frac{1}{p},$$

par conséquent

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \frac{1}{q}\frac{\partial u'}{\partial p} - \frac{1}{p}\frac{\partial v'}{\partial p},$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{1}{q}\frac{\partial u'}{\partial q} - \frac{1}{p}\frac{\partial v'}{\partial q}.$$

En portant ici les valeurs des dérivées de u' et v' tirées des équations (21), on aura facilement

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \frac{-al}{2m-1}\left(p^{l-2} q^{\frac{l}{2m-1}-1} + (2m-1) p^{\frac{l}{2m-1}-2} q^{l-1}\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{al}{2m-1}\left((2m-1) p^{l-1} q^{\frac{l}{2m-1}-2} + p^{\frac{l}{2m-1}-1} q^{l-2}\right).$$

De là on obtient

$$U = \frac{al}{(2m-1)(l-1)}\left(p^{\frac{l}{2m-1}-1} q^{l-1} - p^{l-1} q^{\frac{l}{2m-1}-1}\right).$$

Faisons

$$p = Re^{\varphi\sqrt{-1}}, \quad q = Re^{-\varphi\sqrt{-1}}, \quad u' = \varrho e^{\Theta\sqrt{-1}}, \quad v' = \varrho e^{-\Theta\sqrt{-1}}$$

et nous aurons

$$v = 2aR^{\frac{2m^2}{m^2+(m-1)^2}} \cos\left[\frac{2m(m-1)}{m^2+(m-1)^2}\cdot\varphi\right],$$

$$U = -2\sqrt{-1}\,\frac{am}{m-1}\cdot R^{\frac{-2(m-1)^2}{m^2+(m-1)^2}} \sin\left[\frac{2m(m-1)}{m^2+(m-1)^2}\,\varphi\right].$$

Pour avoir les variables R et φ comme fonctions de coordonnées polaires ϱ et Θ nous allons nous servir des équations (21). Elles donnent facilement

$$(22)\begin{cases}\varrho\cos(\varphi+\Theta)=\dfrac{2am^2}{2m-1}\cdot R^{\frac{2m-1}{m^2+(m-1)^2}}\cdot\cos\left[\dfrac{2m(m-1)}{m^2+(m-1)^2}\cdot\varphi\right],\\ \varrho\sin(\varphi+\Theta)=\dfrac{2am(m-1)}{2m-1}\cdot R^{\frac{2m-1}{m^2+(m-1)^2}}\cdot\sin\left[\dfrac{2m(m-1)}{m^2+(m-1)^2}\cdot\varphi\right],\end{cases}$$

De là on déduit pour déterminer φ cette équation

$$\operatorname{tg}(\varphi+\Theta)=\frac{m-1}{m}\operatorname{tg}\left[\frac{2m(m-1)}{m^2+(m-1)^2}\cdot\varphi\right].$$

La variable R se trouvera de l'une des équations (22).

Les valeurs de v et U en vertu des équations (22) deviennent

$$v=\frac{2m-1}{m^2}\,\varrho R\cos(\varphi+\Theta),$$

$$U=-\sqrt{-1}\,\frac{2m-1}{(m-1)^2}\,\frac{\varrho}{R}\sin(\varphi+\Theta).$$

Donc la carte sera définie par les équations

$$v-v_0=\frac{2m-1}{m^2}\,\varrho R\cos(\varphi+\Theta),$$

$$\int_{u_0}^{u}\varphi(u)\,du=\frac{2m-1}{(m-1)^2}\cdot\frac{k}{4}\,\frac{\varrho}{R}\sin(\varphi+\Theta),$$

et les équations (22).

Je vais enfin remarquer qu'on peut aussi se servir de la symétrie de nos variables U, v, u', v' pour obtenir de nouvelles solutions des équations (4) lorsqu'on en a déjà quelques-unes. En effet en faisant $U_1=\frac{1}{4}U$ et regardant u' et v' comme fonctions de U_1 et v on aura en vertu des équations (*) du n⁰ 2

$$\frac{\partial u'}{\partial U_1}\,\frac{\partial v'}{\partial v}-\frac{\partial u'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v'}{\partial U_1}=2,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial U_1}\,\frac{\partial v'}{\partial v}+\frac{\partial u'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v'}{\partial U_1}=0.$$

Ces équations sont absolument semblables à celles du n⁰ 2; donc on peut remplacer $U_1=\frac{1}{4}U$ et v respectivement par u' et v' et réciproquement.

Supposons que nous avons

$$U_1=\frac{1}{4}U=\varphi(u',v'),\quad v=\psi(u',v'),$$

et que de là on tire

$$u'=\omega(U_1,v),\quad v'=\Omega(U_1,v);$$

alors, en vertu de ce que nous avons dit, on aura

$$U=\omega(u',v'),\quad v=\Omega(u',v').$$

Par exemple les valeurs du n° 8

$$U_1 = \frac{1}{4} U = -\frac{\sqrt{-1}}{2h} u'v',$$

$$v = \frac{h\sqrt{-1}}{2} \log\left(\frac{v'}{u'}\right)$$

donnent

$$u' = (2\sqrt{-1}\, h)^{\frac{1}{2}} U_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{v\sqrt{-1}}{h}},$$

$$v' = (2\sqrt{-1}\, h)^{\frac{1}{2}} U_1^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{v\sqrt{-1}}{h}}.$$

En faisant donc la transposition mentionnée et remplaçant $\frac{\sqrt{-1}}{h}$ par α, il viendra

$$U = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \sqrt{-1}\, u'^{\frac{1}{2}} e^{\alpha v'},$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \sqrt{-1}\, u'^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha v'}.$$

Ces deux équations définissent une carte imaginaire, mais elles donnent une nouvelle solution

$$Z = u'^{\frac{1}{2}} e^{\alpha v'}$$

de l'équation (5) indiquée au n° 9. On en tirera une carte réelle en se servant des considérations exposées ci-dessus.

2. Aout 1889.